ANNÉE 2003-2004 SESSION DE SEPTEMBRE 2004

GU : SM4 PM **UE** : 411 MP

Date : Jeudi 02 Septembre 2004, 14.00-17.00 Durée : 3 heures

Documents non autorisés

Indication de barème : chacun des quatre exercices est noté sur 5 points ; figure aussi une question de cours notée sur 4 points. Le total T (inférieur ou égal à 24) sera reporté comme une note sur 20 (si $T \geq 20$, la note finale sera donc 20/20). Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. La question de cours (relative au cours de probabilités) est indépendante des textes des quatre exercices.

Exercice 1 (intégration)

Soient ϵ et R deux nombres strictement positifs tels que $\epsilon < R$. On note $C(\epsilon, R)$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$C(\epsilon, R) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \epsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}\,.$$

1. Calculer, pour $\epsilon > 0$ arbitairement petit, l'intégrale triple

$$I(\epsilon, R) := \iiint_{C(\epsilon,R)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. Quelle est la limite de $I(\epsilon, R)$ lorsque ϵ tend vers 0 ?

3. On considère le champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z) := (x^2, y^2, -2z(x+y)+z^3)$ dans $\mathbb{R}^3$; calculer le rotationnel et la divergence de ce champ de vecteurs.

4. Calculer le flux $\Phi(\epsilon, R)$ du champ de vecteurs $\vec{F}$ sortant du domaine $C(\epsilon, R)$ (c'est-à-dire le flux du champ à travers la surface matérialisant le bord de $C(\epsilon, R)$, la normale pointant vers l'extérieur de ce domaine), puis la limite de $\Phi(\epsilon, R)$ lorsque ϵ tend vers 0.

Exercice 2 (formes différentielles, intégrale curviligne)

1. Soit α un paramètre strictement positif ; pour quelles valeurs de α la forme différentielle ω_α définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\omega_\alpha(x,y) := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

est-elle une forme fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Existe-t-il une valeur de α telle que ω_α soit une forme exacte dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

2. Vérifier que la forme différentielle

$$\omega \ : (x,y) \to \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}(xdx+ydy)$$

est une forme exacte dans $\mathbb{R}^2$; exhiber un potentiel dont elle dérive.

3. Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le chemin paramétré

$$\gamma \ : t \in [0,2\pi] \to (a\cos t, b\sin t)\,,$$

a et b étant deux nombres strictement positifs.

4. Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne de la forme différentielle $xdy - ydx$ sur le même chemin paramétré γ.

Exercice 3 (probabilités)

Soit N un nombre entier strictement supérieur à 1. On tire un nombre au hasard dans la liste $\{1, ..., N\}$, la distribution de probabilité étant la loi uniforme (tous les tirages sont équiprobables).

1. Soit p un diviseur premier de N (c'est-à-dire un entier $p > 1$ divisant N et dont les seuls diviseurs sont 1 et p). Calculer en fonction de N et de p la probabilité de l'évènement

$$A_p := \{\text{le nombre tiré est un multiple de } p\}\,,$$

puis la probabilité de son complémentaire.

2. Soient $p_1, ..., p_k$ les nombres premiers distincts divisant N. Montrer que les évènements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants. Sont-ils incompatibles ?

3. On tire un nombre au hasard entre 1 et N ; quelle est la probabilité que ce nombre soit premier avec N, c'est-à-dire ne soit divisible par aucun des diviseurs premiers $p_1, ..., p_k$ de N ? On exprimera cette probabilité en fonction de $p_1, ..., p_k$.

4. On note $\varphi(N)$ le nombre d'entiers entre 1 et N premiers avec N ; déduire du calcul effectué au **3** la célèbre formule d'Euler

$$\varphi(N) = N \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j})\,.$$

Exercice 4 (probabilités)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre μ ; que vaut $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$? Exprimer en fonction de μ l'espérance et la variance de X.

2. On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ est une loi binomiale de paramètres (k, p) (avec $p \in [0, 1]$), ce qui signifie

$$P(Y = l | X = k) = \begin{cases} \dfrac{k!}{l!\,(k-l)!} p^l (1-p)^{k-l} \text{ si } l \leq k \\ 0 \qquad \text{si } l > k\,. \end{cases}$$

Quelle loi suit la variable Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Questions de cours (probabilités)

1. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (avec des hypothèses bien précisées). Expliquez en brièvement l'intérêt pratique.

2. Enoncer les lois faible et forte des grands nombres (toujours avec des hypothèses bien précisées). Expliquez-en brièvement l'intérêt pratique.

3. Montrer comment la loi faible des grands nombres se déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.