ANNÉE 2003-2004 SESSION DE SEPTEMBRE 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ANAL

Date : Jeudi 02 Septembre 2004, 11.00-12.30 Durée : 1 h 30

Documents non autorisés

TEXTE (en italiques) et CORRIGÉ

Exercice 1 (analyse)

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions toutes définies sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Que signifie chacune des trois assertions suivantes :*

- *la série de fonctions $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ?*
- *la série de fonctions $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur I ?*
- *la série de fonctions $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ?*

Dire que la série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge simplement sur I signifie que pour tout $t\in I$, la suite numérique $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)\Big)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $S(t)$ (ou encore, puisque l'on ne connait pas *a priori* $S(t)$, que cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$).

Dire que la série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge normalement sur I signifie qu'il existe une série numérique à termes positifs $[w_n]_{n\geq n_1}$ convergente telle que pour tout $n\geq n_1$, on ait

$$\forall t\in I\,,\ |f_n(t)|\leq w_n\,.$$

Dire que la série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I signifie que la suite de fonctions $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une limite S (ou encore, puisque l'on ne connait pas *a priori* $S(t)$, que cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N(\epsilon)\ \text{t.q}\ \forall\, q\geq p\geq N(\epsilon)\,,\ \Big|\sum_{k=p}^{q} f_k(t)\Big|\leq\epsilon\Big).$$

2. *On suppose que $I=\mathbb{R}$ et que $f_n(t):=\dfrac{(-1)^n}{n+1+t^2}$. La série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Converge t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? Converge t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Pour chacune des trois questions,* *on justifiera soigneusement la réponse à partir des définitions rappelées au* **1** *et de résultats du cours que l'on citera.*

La série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ en vertu du critère des séries alternées : en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(1/(n+1+t^2))_{n\geq 0}$ est bien une suite décroissante tendant vers 0.

Il n'y a pas convergence normale car, si cela était le cas, la série numérique $[f_n(0)]_{n\geq 0} = [1/(n+1)]_{n\geq 0}$ devrait être convergente, ce qui est faux d'après le critère de Riemann (la série $[1/n^\alpha]_{n\geq 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ lorsque α est un nombre réel).

Le critère des séries alternées nous dit que le reste $R_n(t)$ de la série numérique $[(-1)^n/(n+1+t^2)]_{n\geq 0}$ est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit ici par

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{n+2+t^2} \leq \frac{1}{n+2}\,.$$

Comme cette majoration est indépendante de t, la série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ converge bien uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (algèbre).

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, T un opérateur de E dans lui-même et ϵ un nombre réel strictement positif. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de l'espace vectoriel E telle que, si $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ (i indice de ligne, j indice de colonne) désigne la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$, on ait :

$$\begin{array}{l} \forall i,j \in \{1,...,n\},\ i > j \implies a_{i,j} = 0 \\ \forall i,j \in \{1,...,n\},\ i < j \implies |a_{i,j}| < \epsilon \end{array}$$

[on citera toujours précisément les résultats du cours d'algèbre utilisés ici].

Le résultat est bien sûr immédiat si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1. On admettra (hypothèse inductive) qu'il est vrai lorsque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Soit donc E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et T un opérateur de E dans lui-même. Puisque tout polynôme à coefficients complexes est scindé, l'opérateur T est trigonalisable ; il existe donc une base $\mathcal{B}_0 = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ telle que la matrice $[b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ de T dans cette base soit triangulaire supérieure, soit

$$\begin{array}{rcl} T(\vec{f}_1) &=& b_{1,1}\vec{f}_1 \\ T(\vec{f}_2) &=& b_{1,2}\vec{f}_1 + b_{2,2}\vec{f}_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\vdots &= \vdots \\
T(\vec{f}_{n-1}) &= b_{1,n-1}\vec{f}_1 + b_{2,n-1}\vec{f}_2 + \cdots + b_{n-1,n-1}\vec{f}_{n-1} \\
T(\vec{f}_n) &= b_{1,n}\vec{f}_1 + b_{2,n}\vec{f}_2 + \cdots + b_{n,n}\vec{f}_n\,.
\end{aligned}$$

Soit F le sous-espace vectoriel (de dimension $n-1$) engendré par $\vec{f}_2, ..., \vec{f}_n$ et p l'opérateur qui à $x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + \cdots + x_n\vec{f}_n$ associe $x_2\vec{f}_2 + \cdots + x_n\vec{f}_n$. On construit un opérateur $\widetilde{T}$ de F dans lui-même en posant

$$\widetilde{T}(\vec{V}) = p(T(\vec{V}))$$

pour tout $\vec{V}$ dans F. Il existe (d'après l'hypothèse de récurrence) une base $(\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ de F dans laquelle la matrice de $\widetilde{T}$ soit triangulaire supérieure avec tous ses coefficients strictement au dessus de la diagonale de module sytictement inférieur à ϵ. On a donc

$$\begin{aligned}
T(\vec{f}_1) &= b_{1,1}\vec{f}_1 \\
T(\vec{e}_2) &= \widetilde{b}_{1,2}\vec{f}_1 + a_{2,2}\vec{e}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
T(\vec{e}_{n-1}) &= \widetilde{b}_{1,n-1}\vec{f}_1 + a_{2,n-1}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}\vec{e}_{n-1} \\
T(\vec{e}_n) &= \widetilde{b}_{1,n}\vec{f}_1 + a_{2,n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n,n}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

avec $|a_{i,j}| < \epsilon$ si $j > i \geq 2$ et des coefficients complexes $\widetilde{b}_{1,2}, ..., \widetilde{b}_{1,n}$ sur lesquels on ne sait *a priori* rien. Si l'on pose $\vec{e}_1 = M\vec{f}_1$ avec $M > 0$, on a donc

$$\begin{aligned}
T(\vec{e}_1) &= b_{1,1}\vec{f}_1 \\
T(\vec{e}_2) &= \frac{\widetilde{b}_{1,2}}{M}\vec{e}_1 + a_{2,2}\vec{e}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
T(\vec{e}_{n-1}) &= \frac{\widetilde{b}_{1,n-1}}{M}\vec{e}_1 + a_{2,n-1}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}\vec{e}_{n-1} \\
T(\vec{e}_n) &= \frac{\widetilde{b}_{1,n}}{M}\vec{e}_1 + a_{2,n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n,n}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

et, en choisissant M tel que $\max_{2\leq j\leq n} |\widetilde{b}_{1,j}| < \epsilon M$ (ce qui est bien sûr possible), on voit que la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ convient.

Exercice 3 (algèbre).

1. *Donner les définitions du rang et de la signature d'une forme quadratique sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Enoncer la loi d'inertie de Sylvester permettant* *la classification des formes quadratiques sur un tel $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Que devient cette loi d'inertie dans le cadre des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels ?*

Le rang d'une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est par définition le rang de sa matrice dans une base arbitraire du $\mathbb{R}$-espace. La signature est définie à partir d'une réduction de Gauss de la forme quadratique ; si cette réduction permet d'exprimer Q dans les coordonnées $(X_1, X_2, ..., X_n)$ dans la nouvelle base comme

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j^2$$

(ce que permet le procédé de réduction de Gauss), alors la signature est par définition le couple d'entiers dont la première composante est le nombre de $\lambda_j > 0$, la seconde le nombre de $\lambda_j < 0$, la somme des composantes étant égale au rang.

La loi d'inertie s'énonce ainsi : étant donnée une forme quadratique Q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de Q s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & \text{zéros}(n-r-s, n-r-s) \end{pmatrix},$$

où (r, s) désigne la signature de la forme ; de plus le couple (r, s) est l'unique couple d'entiers entre 0 et n ayant cette propriété lorsque la forme Q est fixée.

Dans le cas complexe, la loi d'inertie s'énonce ainsi : étant donnée une forme quadratique Q sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de Q s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \text{zéros}(n-r, n-r) \end{pmatrix},$$

où r désigne cette fois le rang de la forme Q ; ce nombre r est l'unique entier entre 0 et n ayant cette propriété lorsque la forme Q est fixée.

2. *Calculer le rang et la signature de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ par*

$$Q(x, y, z) := 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy - 2yz - 2xz\,.$$

Une réduction de Gauss nous donne

$$Q(x, y, z) \;=\; 2(x^2 - x(2y + z)) + 2y^2 - z^2 - 2yz$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big(x - \frac{2y+z}{2}\Big)^2 - \frac{(2y+z)^2}{2} + 2y^2 - z^2 - 2yz \\
&= 2\Big(x - \frac{2y+z}{2}\Big)^2 - \frac{3z^2}{2} - 4yz \\
&= 2\Big(x - \frac{2y+z}{2}\Big)^2 - \frac{3}{2}\Big(z^2 + \frac{8yz}{3}\Big) \\
&= 2\Big(x - \frac{2y+z}{2}\Big)^2 - \frac{3}{2}\Big(z + \frac{4y}{3}\Big)^2 + \frac{8z^2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que le rang est 3 et la signature $(2,1)$.

3. *Décrire géométriquement l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\vec{OM}$ soit un vecteur isotrope pour la forme quadratique Q.*

Dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, Q s'exprime sous la forme

$$Q(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$$

(la base est donnée par des vecteurs dirigeant les sous-espaces propres de la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $4, 1, -2$). Dans le nouveau repère orthonormé constituée des trois vecteurs propres, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{OM}$ soit isotrope pour Q est donc le cône de révolution (avec ses deux nappes)

$$Z = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$$

autour de l'axe OZ (dirigé par le vecteur propre correspondant à la valeur propre -2, soit le vecteur $(1,1,2)$), de demi-ouverture $\pi/4$, privé de son sommet $(0,0,0)$.

Exercice 4 (analyse).

Soit α un nombre réel strictement positif et f la fonction $f:\ ]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t > 0\,,\ f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^\alpha t)\,.$$

1. *Montrer que f est une fonction de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ dont on exprimera sous forme de la somme d'une série de fonctions la dérivée $f^{(p)}$ à un ordre arbitraire $p \in \mathbb{N}$.*

Pour tout $n \geq 1$, la fonction

$$t \in]0,+\infty[\to \exp(-n^\alpha t)$$

est de classe C^∞, sa dérivée p-ème étant la fonction

$$t \in]0,+\infty[\to (-1)^p n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t)\,.$$

Pour tout $t_0 > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série de fonctions

$$[(-1)^p n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t)]_{n\geq 1}$$

est normalement, donc uniformément, convergente sur $]t_0,+\infty[$ car

$$\forall t \geq t_0\,,\ \forall n \geq 1\,,\ |(-1)^p n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t)| \leq n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t_0)$$

et que la série numérique $[n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t_0)]_{n\geq 1}$ converge : en effet, il existe une constante C telle que pour tout $x > 0$, $\exp(-x) \leq C x^{-p-2/\alpha}$, d'où $n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t_0) \leq n^{-2} t_0^{-p-2/\alpha}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Les conditions d'application du théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions s'appliquent donc sur tout intervalle $]t_0,+\infty[$ avec $t_0 > 0$ arbitraire. La fonction f est donc C^∞ sur $]0,+\infty[$, de dérivée p-ème la fonction

$$t \in]0,+\infty[\to (-1)^p \sum_{n\geq 1} n^{\alpha p} \exp(-n^\alpha t)\,.$$

2. *Prouver, pour tout a,b tels que $0 < a \leq b < +\infty$ l'égalité*

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-n^\alpha a) - \exp(-n^\alpha b)}{n^\alpha}\,.$$

Le fait que la série de fonctions $[\exp(-n^\alpha t)]_{n\geq 1}$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,b]$ (voir la question précédente) permet d'intervertir prise d'intégrale et sommation (c'est le théorème du cours d'analyse relatif à l'intégration d'une série de fonctions terme à terme sur un intervalle). Comme

$$\int_a^b \exp(-n^\alpha t)dt = \left[-\frac{\exp(-n^\alpha t)}{n^\alpha} \right]_a^b,$$

on a bien la formule voulue

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-n^\alpha a) - \exp(-n^\alpha b)}{n^\alpha}\,.$$

3. *Prouver, pour tout $a > 0$, la formule*

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-n^\alpha a)}{n^\alpha}$$

[on citera toujours précisément les résultats du cours d'analyse utilisés ici].

Pour tout $b \geq a$, on a

$$\frac{\exp(-n^\alpha a) - \exp(-n^\alpha b)}{n^\alpha} \leq \frac{\exp(-n^\alpha a)}{n^\alpha}\,.$$

Comme la série numérique $[\exp(-n^\alpha a)/n^\alpha]_{n\geq 1}$ est convergente, on peut intervertir la prise de limite en b et le processus de sommation (voir la remarque 2.5 du cours d'analyse), d'où la formule voulue.