Semestre 5, Année 2008-2009 SESSION 1

UE : MHT512

Date : 18 Décembre 2008, 14h-17h Durée : 3h

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Question de cours. *Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans le contexte abstrait (sur un espace Ω équipé d'une tribu et d'une mesure, les fonctions étant à valeurs dans $\mathbb{R}$).*

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables convergeant μ presque partout vers une fonction $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ f, avec la clause de domination

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall \omega \in \Omega\,,\ |f_n(\omega)| \leq g(\omega)\,,$$

où $g\ : \Omega \to +\infty$ est une fonction intégrable par rapport à la mesure μ, f et toutes les fonctions f_n le sont aussi et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f\, d\mu\,.$$

Exercice (intégration théorique). *Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, toutes $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables. On suppose*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega (f_n(\omega))^2 d\mu(\omega) < \infty \text{ et } \int_\Omega f_n(\omega) f_m(\omega)\, d\mu(\omega) = 0 \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N}, m \neq n.$$

Montrer que la suite $(\dot{f}_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et en déduire (en citant précisément les théorèmes auxquels il est fait référence) qu'il existe une fonction $f\ : \Omega \to \mathbb{R}$, $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, telle que $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et qu'une suite extraite $(f_{n_k})_k$ de la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f μ-presque partout sur Ω. La suite $(\dot{f}_n)_n$ converge-t'elle dans $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$? Si oui, vers quel élément ?

L'exercice, tel qu'il était posé, n'avait guère d'intérêt. En voici la solution cependant. On vérifie tout de suite en développant le carré sous l'intégrale et en utilisant la linéarité de la prise d'intégrale que si $n > m$

$$\int_\Omega (f_n - f_m)^2\, d\mu = \int_\Omega f_n^2\, d\mu + \int_\Omega f_m^2\, d\mu$$

(les intégrales de toutes les fonctions $f_k f_l$ avec $k \neq l$ étant nulles). Comme la série de terme général $\int_\Omega f_n^2\, d\mu$ est convergente, la suite

$$\Big(\int_\Omega f_n^2\, d\mu\Big)_n$$

tend vers 0 et bien sûr la suite $(\dot{f}_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. D'après le théorème de Riesz-Fischer qui affirme que cet espace est un espace normé complet lorsqu'on le munit de sa norme de Minkowski $\| \ \|_2$, on peut affirmer que la suite $(\dot{f}_n)_n$ converge dans $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ vers un élément $\dot{f}$. On note ici que le recours au théorème de Riesz-Fischer était inutile, puisque la suite $(\dot{f}_n)_n$ converge bien sûr vers $\dot{f} = \dot{0}$! Un avatar de la preuve de ce théorème assure aussi que l'on peut extraire de la suite de représentants $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{n_k})_k$ convergeant μ-presque partout vers un représentant de $\dot{f}$. La suite $(\dot{f}_n)_n$ converge, elle, dans $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ vers $\dot{f} = \dot{0}$.

Remarque. En fait, la question aurait été plus intéressante (et c'est comme cela qu'elle aurait dû être posée) si l'on avait considéré au lieu de la suite $(\dot{f}_n)_n$ la suite $(\dot{F}_n)_n$ des sommes partielles $\dot{F}_n := \dot{f}_0 + \cdots + \dot{f}_n$. La suite $(\dot{F}_n)_n$ est de Cauchy car

$$\int_\Omega (F_n - F_m)^2 \, d\mu = \sum_{k=m+1}^{n} \int_\Omega f_k^2 \, d\mu$$

si $n > m$ (cette fois l'hypothèse est vraiment utile) et que la suite des restes de la série de terme général $\|f_k\|_2^2$ tend vers 0. On peut ici embrayer comme auparavant avec le théorème de Riesz-Fischer, dire que $(\dot{F}_n)$ converge vers un élément $\dot{F}$ de $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et affirmer que l'on peut extraire de la suite de représentants $(F_n)_n$ une sous-suite $(F_{n_k})_k$ convergeant μ-presque partout vers un représentant de $\dot{F}$. La suite $(\dot{f}_n)_n$ converge, elle, dans $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ vers $\dot{F}$.

La question a été bien sûr notée telle qu'elle était (malheureusement) posée.

Problème (intégration pratique).

Partie I. *Dans toute cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que*

$$\frac{|\log(1-t)|}{t} = -\frac{\log(1-t)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k+1} \quad \forall t \in [0,1[\,.$$

1.1. *Soit $f \ :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur $]0,1[$ (par rapport à la tribu borélienne), telle que*

$$\int_{]0,1[} |f(t)|^p \frac{|\log(1-t)|}{t} \, dt < +\infty \,. \qquad (*)$$

Montrer (en le justifiant par le théorème adéquat) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \in]0,1[\mapsto (f(t))^p \, t^k$ est intégrable sur $]0,1[$ et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_{]0,1[} |f(t)|^p \, t^k \, dt < +\infty \,.$$

D'après le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, on a

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[} |f(t)|^p \frac{|\log(1-t)|}{t}\,dt &= \int_{]0,1[} |f(t)|^p \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k+1}\Big)\,dt \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} \int_{]0,1[} t^k |f(t)|^p\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_{]0,1[} t^k |f(t)|^p\,dt < \infty\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat (puisque si une somme de nombres positifs est finie, tous ces nombres sont finis).

1.2. *Montrer, en utilisant convenablement l'inégalité de Hölder (que l'on rappellera) que l'on a*

$$\Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\,dt\Big)^p \leq \Big(\frac{1}{k+1}\Big)^{p-1} \times \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|^p\, t^k\,dt\Big).$$

En déduire que la fonction

$$(t_1,t_2,...,t_p) \in]0,1[^p \longmapsto \frac{\prod_{j=1}^{p} f(t_j)}{1-\prod_{j=1}^{p} t_j} = \frac{f(t_1)\times\cdots\times f(t_p)}{1-(t_1\times\cdots\times t_p)}$$

est intégrable sur $]0,1[^p$ *(par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^p$*) et que*

$$\int\cdots\int_{]0,1[^p} \left(\frac{\prod_{j=1}^{p} f(t_j)}{1-\prod_{j=1}^{p} t_j}\right) dt_1 dt_2\cdots dt_p = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} f(t)\, t^k\,dt\Big)^p. \qquad (\dagger)$$

Si φ,ψ sont deux fonctions mesurables positives $\Omega \longrightarrow [0,+\infty]$ et $p \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \varphi\psi d\mu \leq \Big(\int_\Omega |\varphi|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega |\psi|^{p'} d\mu\Big)^{1/p'}.$$

Dans le cas particulier ici, $\Omega =]0,1[$, $d\mu = dt$, $\varphi(t) = |f(t)|t^{k/p}$ et $\psi(t) = t^{k/p'}$ $(1/p+1/p' = 1)$; l'inégalité de Hölder donne donc, après élévation à la puissance p :

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt\Big)^p &\le \Big(\int_{]0,1[} t^k\, dt\Big)^{p/p'} \times \int_{]0,1[} |f(t)|^p t^k\, dt \\
&= \Big(\frac{1}{k+1}\Big)^{p-1} \int_{]0,1[} |f(t)|^p t^k\, dt\,.
\end{aligned}$$

On reconnaîtra dans la suite de la question le début du DM2 (on prend simplement ici $p \ge 2$ au lieu de $p = 2$). Pour tout $t_1, ..., t_p$ dans $[0, 1[$, on a (expression de la somme de la série géométrique de raison $t_1 \dots t_p$)

$$\frac{1}{1 - t_1 \cdots t_p} = \sum_{k=0}^{\infty} (t_1 \cdots t_p)^k\,.$$

Il résulte du théorème de Fubini-Tonnelli que

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int_{]0,1[^p} \left(\frac{\prod_{j=1}^{p} |f(t_j)|}{1 - \prod_{j=1}^{p} t_j} \right) dt_1 dt_2 \cdots dt_p \\
= \ & \int \cdots \int_{]0,1[^p} \Big| \prod_{j=1}^{p} |f(t_j)| \Big| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (t_1 \cdots t_p)^k \Big) dt_1 \cdots dt_p \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty} \int \cdots \int_{]0,1[^p} \Big| \prod_{j=1}^{p} f(t_j) \Big| \prod_{j=1}^{p} t_j^k\, dt_1 \dots dt_p \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt \Big)^p \\
\le \ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{p-1}} \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt \Big)^p \\
\le \ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt \Big)^p < +\infty
\end{aligned}$$

d'après les inégalités établies précédemment dans cette question, le résultat de **(1.1)** et le fait que $p \ge 2$, *i.e* $p - 1 \ge 1$. Comme la clause d'application du théorème de Fubini est remplie (les inégalités ci-dessus le montrent), on peut retirer les valeurs absolues dans les intégrants ci-dessus et le théorème de Fubini (appliqué d'abord avec la mesure produit de la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[^p$ et de la mesure de décompte sur $\mathbb{N}$, puis ensuite avec la mesure produit sur $]0, 1[^p$) nous donne bien la formule (†).

1.3. *Soient x et y des nombres réels. Montrer que la fonction*

$$f = f_{x,y} \ : t \in]0,1[\mapsto t^x (1-t)^y$$

vérifie la condition $(*)$ si et seulement si (x,y) appartient à l'ouvert

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > -1/p,\, y > -1/p\}\,.$$

Au voisinage de $t = 0$, comme on a $|\log(1-t)| \sim |t|$, dire que la fonction $t \mapsto |f_{x,y}(t)|^p |\log(1-t)|/t$ est intégrable au voisinage de $t = 0$ équivaut, d'après le critère de Riemann, à dire que $px > -1$, soit $x > -1/p$. Comme on a aussi $1 \leq |\log(1-t)| = O(|1-t|^{-\epsilon})$ au voisinage de $t = 1$ pour tout $\epsilon > 0$, l'intégrabilité au voisinage de $t = 1$ de $t \mapsto |f_{x,y}(t)|^p |\log(1-t)|/t$ équivaut, toujours d'après le critère de Riemann, à la condition $py > -1$, soit $y > -1/p$. Le fait que $f_{x,y}$ vérifie la condition $(*)$ équivaut donc bien à $x > -1/p$ et $y > -1/p$, soit $(x,y) \in U$.

1.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que la fonction*

$$\Phi_k \ : (x,y) \in U \mapsto \int_0^1 t^{x+k} (1-t)^y \, dt$$

est une fonction de classe C^1 sur U et que, pour tout (x,y) dans U,

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \,, \ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log(1-t) \, dt \,.$$

Pour tout $(x,y) \in U$, pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} t^{x+k}(1-t)^y |\log t| &\leq t^{-(1/p)+k}(1-t)^{-1/p} |\log t| \\ t^{x+k}(1-t)^y |\log(1-t)| &\leq t^{-(1/p)+k}(1-t)^{-1/p} \,|\log(1-t)|\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

D'autre, part, pour t fixé dans $]0,1[$, la fonction

$$(x,y) \in U \longmapsto t^{x+k}(1-t)^y$$

est de classe C^1 dans U, de dérivées partielles par rapport à x et y les fonctions $(x,y) \mapsto t^{x+k}(1-t)^y \log t$ et $(x,y) \mapsto t^{x+k}(1-t)^y \log(1-t)$. Du fait des clauses de domination (1) et de ce que les deux fonctions dominantes

$$\begin{aligned} t \in]0,1[&\longmapsto t^{-1/p+k}(1-t)^{-1/p} \log t \\ t \in]0,1[&\longmapsto t^{-1/p+k}(1-t)^{-1/p} \log(1-t) \end{aligned}$$

sont intégrables sur $]0,1[$ (d'après le critère de Riemann et le fait que $|\log t| = O(t^{-\epsilon})$ au voisinage de $t=0$ et $|\log(1-t)| = O((1-t)^{-\epsilon})$ au voisinage de $t=1$ pour tout $\epsilon > 0$), le théorème de dérivation des intégrales fonctions de plusieurs paramètres (ici deux) assure que Φ_k est de classe C^1 sur U et que l'on a

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \,, \; \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log(1-t) \, dt \,.$$

1.5. *En utilisant convenablement l'inégalité de Hölder, montrer que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont dans $l^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$, alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\,|v_k|^{p-1} \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p\Big)^{1-1/p} < +\infty \,.$$

En déduire que, pour tout $(x,y) \in U$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big| \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \Big| \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, dt \Big)^{p-1} < +\infty \,.$$

Il suffit, pour obtenir la première inégalité demandée, d'appliquer l'inégalité de Hölder avec p et p' en remarquant que $1/p + 1/p' = 1$, soit $p' = p/(p-1)$, d'où $(|v_k|^{p-1})^{p'} = |v_k|^p$. Ensuite, on remarque que la fonction

$$t \mapsto t^x (1-t)^y \, \log t$$

vérifie toujours, lorsque $(x,y) \in U$, la condition $(*)$ (car $|\log t| = O(t^{\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$). Si l'on pose

$$u_k := \int_0^1 (t^x(1-t)^y) \log t) t^k \, dt \,,$$

il résulte de la question (**1.2**) que la suite $(u_k)_k$ est dans $l^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$; comme $f_{x,y}$ vérifie aussi la condition $(*)$, il en est de même de la suite $(v_k)_k$, où

$$v_k := \int_0^1 (t^x(1-t)^y) \, t^k dt = \int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, dt \,.$$

Pour obtenir la seconde affirmation de cette question, il suffit donc d'appliquer l'inégalité que l'on vient juste d'établir à partir de l'inégalité de Hölder avec précisément ce choix particulier de u_k et v_k.

1.6. *Vérifier, pour tout $(x,y) \in U$, l'identité*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \Big) \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, dt \Big)^{p-1}$$

$$= \int \cdots \int_{]0,1[^p} \frac{(\log t_1) \times \Big(\prod\limits_{j=1}^{p} t_j \Big)^x \Big(\prod\limits_{j=1}^{p} (1-t_j) \Big)^y}{1 - \prod\limits_{j=1}^{p} t_j} \, dt_1 \ldots dt_p \, .$$

Avec comme choix particulier $f = f_{x,y}$ ($(x,y) \in U$), le membre de droite de la formule (†) s'écrit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\Phi_k(x,y))^p$. La dérivée partielle par rapport à x de $(x,y) \mapsto (\Phi_k(x,y))^p$ est

$$(x,y) \mapsto p \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \Big) \times \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, dt \Big)^{p-1} .$$

On fixe $y > -1/p$. On peut majorer en module, pour tout x tel que $x > -(1/p) + \epsilon$, cette quantité par

$$w_k(\epsilon) = \Big(\int_0^1 t^{-(1/p)+\epsilon+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \Big) \times \Big(\int_0^1 t^{-(1/p)+\epsilon+k}(1-t)^y \, dt \Big)^{p-1} .$$

comme $\sum_k w_k(\epsilon) < +\infty$ (d'après le second résultat de la question précédente, avec $x = y = -(1/p) + \epsilon$), le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions assure que

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi_k(x,y))^p$$

admet une dérivée par rapport à x dans $]-(1/p)+\epsilon, +\infty[$, égale à

$$x \mapsto p \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, \log t \, dt \Big) \Big(\int_0^1 t^{x+k}(1-t)^y \, dt \Big)^{p-1} .$$

Comme ϵ est arbitraire, ceci est vrai sur $]-1/p, +\infty[$. D'autre part, pour tout $(t_1, ..., t_p) \in (]0,1[)^p$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{\Big(\prod\limits_{j=1}^{p} t_j \Big)^x \Big(\prod\limits_{j=1}^{p} (1-t_j) \Big)^y}{1 - \prod\limits_{j=1}^{p} t_j}$$

est de classe C^1 sur $]-1/p,+\infty[$ et a pour dérivée

$$\log(t_1\cdots t_p)\times\frac{\Big(\prod_{j=1}^{p}t_j\Big)^x\Big(\prod_{j=1}^{p}(1-t_j)\Big)^y}{1-\prod_{j=1}^{p}t_j}.$$

Pour $x>-(1/p)+\epsilon$, cette expression est majorée en module pour tout $(t_1,...,t_p)\in(]0,1[)^p$ par

$$\Psi_\epsilon(t_1,...,t_p):=|\log(t_1\cdots t_p)|\times\frac{\Big(\prod_{j=1}^{p}t_j\Big)^{-(1/p)+\epsilon}\Big(\prod_{j=1}^{p}(1-t_j)\Big)^y}{1-\prod_{j=1}^{p}t_j}$$

Or, comme $|\log(t_1\cdots t_p)|\leq C_\epsilon(t_1\cdots t_p)^{-\epsilon/2}$ sur $]0,1[^p$, la fonction Ψ_ϵ est intégrable sur $]0,1[^p$ (voir la question **(1.1)**). On peut donc utiliser le théorème de dérivation des intégrales fonctions d'un paramètre qui assure que la fonction

$$x\longmapsto\int\cdots\int_{]0,1[^p}\frac{\Big(\prod_{j=1}^{p}t_j\Big)^x\Big(\prod_{j=1}^{p}(1-t_j)\Big)^y}{1-\prod_{j=1}^{p}t_j}\,dt_1\ldots dt_p$$

est dérivable sur $]-(1/p)+\epsilon,+\infty[$, de dérivée

$$\begin{aligned}x\quad&\longmapsto\quad\int\cdots\int_{]0,1[^p}\frac{(\log(t_1\cdots t_p))\times\Big(\prod_{j=1}^{p}t_j\Big)^x\Big(\prod_{j=1}^{p}(1-t_j)\Big)^y}{1-\prod_{j=1}^{p}t_j}\,dt_1\ldots dt_p\\&=\quad p\int\cdots\int_{]0,1[^p}\frac{(\log t_1)\times\Big(\prod_{j=1}^{p}t_j\Big)^x\Big(\prod_{j=1}^{p}(1-t_j)\Big)^y}{1-\prod_{j=1}^{p}t_j}\,dt_1\ldots dt_p\end{aligned}$$

puisque $\log(t_1\cdots t_p)=\sum_{j=1}^{p}\log t_j$ et que le reste de l'expression sous l'intégrale est une fonction symétrique de $t_1,...,t_p$. Comme ϵ est arbitraire, ceci reste vrai pour $x\in]-1/p,+\infty[$. La formule (†) implique donc, si l'on égale les dérivées des deux membres par rapport à x, l'identité demandée.

Remarque. On pouvait aussi prouver cette identité directement (sans la déduire de (†)) en raisonnant excatement comme à la question (**1.2**).

Partie II.

On suppose dans cette partie que $p = 2$ et l'on considère deux fonctions mesurables f de g de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant toutes les deux la condition $(*)$.

2.1. *Vérifier (en adaptant ce qui a été fait pour obtenir la formule (†) à la question* **(1.2)***) la formule*

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{f(t)g(s)}{1-ts}\, dtds = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} f(t)\, t^k\, dt\Big)\Big(\int_{]0,1[} g(t)\, t^k\, dt\Big).$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli (avec la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^2$ et la mesure de décompte), on a

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{|f(t)|\,|f(s)|}{1-ts}\, dtds = \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{]0,1[^2} |f(t)|\,|g(s)|\, t^k\, s^k\, dtds\,.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonnelli dans chaque terme de la somme de droite, il vient

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{|f(t)|\,|f(s)|}{1-ts}\, dtds = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt\Big)\Big(\int_{]0,1[} |g(t)|\, t^k\, dt\Big).$$

Comme les deux suites

$$\Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt\Big)_k \quad \text{et} \quad \Big(\int_{]0,1[} |g(t)|\, t^k\, dt\Big)_k$$

sont dans $l^2(\mathbb{R})$ du fait de la question (**1.2**) ($p = 2$ ici), on déduit de l'inégalité de Hölder (en fait ici Cauchy-Schwarz) que

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{|f(t)|\,|f(s)|}{1-ts}\, dtds = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\, t^k\, dt\Big)\Big(\int_{]0,1[} |g(t)|\, t^k\, dt\Big) < +\infty\,.$$

Ceci implique la validité de la clause d'application du théorème de Fubini et autorise donc à écrire les formules en retirant les valeurs absolues. On obtient ainsi la formule demandée.

2.2. *On note F et G les fonctions de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $F(u) = f(e^{-u})$ et $G(u) = g(e^{-u})$ pour $u \in]0,\infty[$. Montrer (en citant le théorème invoqué) que l'on a*

$$\int_{]0,1[} f(t)t^k\, dt = \int_{]0,\infty[} F(u)e^{-(k+1)u}\, du\,,\quad \int_{]0,1[} g(t)t^k\, dt = \int_{]0,\infty[} G(u)e^{-(k+1)u}\, du\,.$$

Il suffit d'appliquer dans les deux cas la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue en utilisant le changement de variables suivant : $u \in]0,\infty[\to t = e^{-u} \in]0,1[$ (qui est un C^1 difféomorphisme entre $]0,\infty[$ et $]0,1[$, dont le module du jacobien est $u \mapsto e^{-u}$).

2.3. *Vérifier que pour presque tout u dans $]0,\infty[$, la fonction*

$$v \mapsto \chi_{[0,u]}(v) F(v) G(u-v)$$

est intégrable sur $]0,\infty[$ et que la fonction H définie par

$$H(u) := \int_0^u F(v)G(u-v)\,dv\,,\ \ u \in]0,\infty[$$

vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{]0,\infty[} |H(u)| e^{-(k+1)u}\,du < +\infty$ et

$$\int_{]0,\infty[} H(u) e^{-(k+1)u}\,du = \Big(\int_{]0,\infty[} F(u) e^{-(k+1)u}\,du\Big)\Big(\int_{]0,\infty[} G(u) e^{-(k+1)u}\,du\Big)\,.$$

Il s'agit là de la reprise d'un exercice en ligne sur l'un des guides d'activité sous Ulysse. En utilisant le théorème de Fubini-Tonnelli, l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et le fait que l'exponentielle réalise un isomorphisme entre $(\mathbb{R},+)$ et $(]0,\infty[,\times)$, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \int_{]0,\infty[} \Big[\int_{]0,\infty[} \chi_{[0,u]}(v) |F(v)|\,|G(u-v)|\,dv\Big] e^{-(k+1)u}\,du \\
= & \int_{]0,\infty[} \Big[\int_{]0,\infty[} \chi_{[0,u]}(v)\,|G(u-v)|\,e^{-(k+1)u}\,du\Big]\,|F(v)|\,dv \\
= & \int_{]0,\infty[} \Big[\int_{]v,\infty[} |G(u-v)|\,e^{-(k+1)u}\,du\Big]\,|F(v)|\,dv \\
= & \int_{]0,\infty[} \Big[\int_{]v,\infty[} |G(u-v)|\,e^{-(k+1)(u-v)}\,du\Big]\,e^{-(k+1)v}|F(v)|\,dv \\
= & \int_{]0,\infty[} \Big[\int_{]0,\infty[} |G(u)|\,e^{-(k+1)u}\,du\Big]\,e^{-(k+1)v}|F(v)|\,dv \\
= & \Big(\int_{]0,\infty[} |G(u)|\,e^{-(k+1)u}\,du\Big) \times \Big(\int_{]0,\infty[} |F(v)|\,e^{-(k+1)v}\,du\Big) \\
= & \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\,t^k\,dt\Big) \times \Big(\int_{]0,1[} |g(t)|\,t^k\,dt\Big) < +\infty\,.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction

$$u \in]0,\infty[\mapsto \Big[\int_{]0,\infty[} \chi_{[0,u]}(v) |F(v)|\,|G(u-v)|\,dv\Big] e^{-(k+1)u}$$

est finie pour presque tout $u \in]0,\infty[$ (d'après par exemple l'inégalité de Markov), donc que c'est aussi le cas pour la fonction

$$u \in]0,\infty[\mapsto \int_{]0,\infty[} \chi_{[0,u]}(v)|F(v)|\,|G(u-v)|\,dv\,.$$

Cela prouve la première assertion. La seconde s'obtient en retirant les valeurs absolues encadrant F et G dans les identités ci-dessus, ce qui est licite car la clause d'application du théorème de Fubini a été vérifiée remplie.

2.4. *On pose, pour $t \in]0,1[$, $h(t) = H(-\log t)$; vérifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{]0,1[} h(t)t^k\,dt = \Big(\int_{]0,1[} f(t)\,t^k\,dt\Big)\Big(\int_{]0,1[} g(t)\,t^k\,dt\Big)$$

(on montrera tout d'abord que l'intégrale de gauche et convergente).

La convergence de l'intégrale de gauche résulte de la formule de changement de variables dans les intégrales (toujours le changement de variables $t = e^{-u}$, $i.e\ u = -\log t$), qui permet d'écrire

$$\int_{]0,1[} |h(t)|\,t^k\,dt = \int_{]0,\infty[} |H(u)|\,e^{-(k+1)u}\,du < \infty\,.$$

La formule demandée dans cette question résulte ensuite immédiatement de celle établie à la question précédente, combinée avec les formules prouvées à la question **(2.2)**.

2.5. *Déduire de la question* **(2.1)** *la formule*

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{f(t)g(s)}{1-ts}\,dtds = \int_{]0,1[} \frac{h(t)}{1-t}\,dt\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

Montrer

$$h(t) = \int_t^1 f(\tau)g(t/\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} \quad \forall\, t \in]0,1[$$

et retrouver directement la formule $(\dagger\dagger)$ en utilisant la formule de changement de variables.

Le membre de droite de cette formule est égal, puisque la suite

$$\Big(\int_{]0,1[} |h(t)|\,t^k\,dt\Big)_k$$

est dans $l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque

$$\int_{]0,1[} |h(t)|\,t^k\,dt \leq \Big(\int_{]0,1[} |f(t)|\,t^k\,dt\Big) \times \Big(\int_{]0,1[} |g(t)|\,t^k\,dt\Big)$$

d'après ce qui a été vu à la question **(2.3)**, à

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{]0,1[} h(t)\, t^k\, dt\,.$$

Cela résulte du théorème de Fubini appliqué avec la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$ et la mesure de décompte, vu que $1/(1-t) = \sum_k t^k$ sur $[0,1[$. Il suffit ensuite juste de combiner les résultats obtenus aux questions **(2.1)** et **(2.4)** pour obtenir la formule (††).

Si dans l'intégrale double (convergente au sens de Lebesgue) figurant au membre de gauche de (††), on effectue le changement de variables $(t,s) \leftrightarrow (t,ts) = (t,u)$, le domaine $]0,1[^2$ devient $V := \{(t,u) \in]0,1[^2\,;\, u \leq t\}$ et la formule de changement de variables donne

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{f(t)g(s)}{1-ts}\, dtds = \iint_V \frac{f(t)g(u/t)}{1-u}\, \frac{dtdu}{t}\,.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on trouve

$$\iint_V \frac{f(t)g(u/t)}{1-u}\, \frac{dtdu}{t} = \int_{]0,1[} \Big[\int_u^1 f(t)g(u/t)\frac{dt}{t}\Big]\, \frac{du}{1-u}\,.$$

Si l'on pose

$$h(t) = \int_t^1 f(\tau)g(t/\tau)\, \frac{d\tau}{\tau}$$

(en changeant juste les dénominations des variables muettes (t en place de u, τ en place de t), on retrouve la formule (††).