ANNÉE : 2004/2005 SESSION DE MAI 2005
ÉTAPE : Pin401EX **UE : PIN401EX** Math. pour Phys.
Date : Samedi 21 Mai De 08h30 à 11h30
Documents non autorisés.
Épreuve de Monsieur LeRoux Durée conseillée : deux heures

On veut analyser un mélange de trois produits dont les concentrations respectives sont notées $x,\ y$ et z. On aura donc

$$x + y + z = 1 .$$

On sait que le premier produit est légèrement plus lourd que les deux autres qui sont eux mêmes de même densité ρ_0. La densité du premier produit est notée $b\rho_0$ avec $b > 1$. Le volume total du mélange est noté V_0, et on pèse le mélange pour obtenir son poids

$$P_0 = (bx + y + z)\,\rho_0 V_0 \quad .$$

On procède enfin à une analyse optique, sachant que les deux premiers produits sont de même transparence (indice k_0) et le dernier produit est légèrement moins opaque (indice ak_0, avec $a < 1$). Un rayon d'intensité initiale I_0 se retrouve d'intensité μI_0 ($\mu < 1$, mesuré) après avoir traversé le mélange. La distance parcourue dans le mélange étant notée L, on a effectivement

$$I_0\ e^{-k_0(x+y+az)L} = \mu I_0 \ .$$

Question 1 : En déduire une troisième équation linéaire entre $x,\ y$ *et* z.

On a ainsi obtenu un système de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z. On pose dans la suite

$$q_0 = \frac{P_0}{\rho_0 V_0} \quad , \quad \beta = -\frac{ln(\mu)}{k_0 L} \quad .$$

Question 2 : Expliciter la matrice de ce système (on la notera A) et calculer son déterminant.

Question 3 : Calculer $x,\ y$ et z en fonction des différents paramètres donnés ou mesurés, q_0 et β.

Une expérience similaire effectuée avec les mêmes produits, en concentrations respectives $x_0,\ y_0$ et z_0 telles que

$$x_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad q_0 = 3y_0 \quad , \quad \beta = 3z_0 \ ,$$

c'est-à-dire qu'on a obtenu les mesures suivantes :

$$P_0 = 3\ y_0\ \rho_0\ V_0 \quad , \quad \mu = e^{-3z_0k_0L} \ .$$

Question 4 : en déduire que $\lambda = 3$ est une valeur propre de A.

Question 5 : En déduire une relation entre a et b de la forme $b = f(a)$ ou $a = f(b)$ (il s'agit de la même fonction f).

Question 6 : Une estimation donne $a = \frac{4}{5}$; donner les autres valeurs propres de A.

Question 7 : La matrice A est elle diagonalisable ? (la recherche de la base associée à sa forme diagonale n'est pas demandée)

-2-

Soit K et b deux fonctions réelles, continues par morceaux, bornées, définies sur $\mathbb{R}$. On introduit l'espace

$$V_0 = \{\phi \in C^0([0,1]),\ \phi(0) = 0,\ \phi(1) = 0\ \}\ .$$

Question 1 : montrer que V_0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On se propose d'approcher la solution u du problème suivant :
Chercher $u \in V_0$ vérifiant, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 K(x-t)\ u(t)\ dt \ = \ b(x)\ .$$

D'un point de vue physique, on peut considérer $b(x)$ comme un signal d'entrée dans un certain système représenté par K, et u comme la réponse de ce système à ce signal d'entrée.

On commence par construire un sous espace de dimension finie de V_0. Soit N un entier, réputé grand ; on pose

$$h \ = \ \frac{1}{N+1} \quad , \quad et \quad x_j \ = \ jh \quad pour\ j = 0,1,..,N+1\ \ .$$

Notons que $x_0 = 0,\ x_{N+1} = 1$. On définit ensuite, sur $[0,1]$, les fonctions ϕ_j, pour $j = 1,2,...,N$, par

$$\phi_j(x) \ = \ Max\left(0, 1 - \left|\frac{x-x_j}{h}\right|\right)\ .$$

Question 2 : Montrer que pour tout $j = 1,2,..,N$, $\phi_j \in V_0$.

Question 3 : Montrer que $\phi_j(x_k) \ = \ 0$ si $j \neq k$, $k = 0,1,..,N+1$, et $\phi_j(x_j) = 1,\ j = 1,..,N$.

Question 4 : On note V_h le sous espace vectoriel de V_0 engendré par les ϕ_j. Quelle est la dimension de V_h ?

Question 5 : Soit $f \in V_0$, on définit une fonction f_h sur $[0,1]$ par

$$f_h(x) \ = \ \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\ \phi_j(x)\ .$$

Montrer que f_h interpole f aux points $x_j,\ j = 0,1,..,N+1$ (c'est à dire $f_h(x_j) = f(x_j)$).

On s'intéresse maintenant au problème de dimension finie

Chercher $u_h \in V_h$ vérifiant pour tout $k = 1, 2, .., N$

$$\int_0^1 K(x_k - t) u_h(t) dt \;=\; b(x_k) \;.$$

On pose ensuite

$$A_{kj} \;=\; \int_0^1 \; K(x_k - t)\phi_j(t)dt \;,\; b_k \;=\; b(x_k) \quad , \quad u_h \;= \sum_{j=1}^{N} \; u_j \; \phi_j \;.$$

Question 6 : Montrer que u_h peut être obtenu en résolvant un système linéaire dont la matrice est $A \;=\; ((A_{kj}))$ et le second membre le vecteur de composantes $b_k,\;\; k = 1, .., N$.

Nous allons évaluer les coefficients de la matrice A par intégration numérique.

Question 7 : Soit $v \in V_0$. Montrer que la méthode des trapèzes induit l'évaluation

$$\int_0^1 v(t) \; dt \;\simeq\; h \; \sum_{i=1}^{N} v(x_i) \quad .$$

Question 8 : Montrer que la formule des trapèzes donne la valeur exacte de l'intégrale lorsque $v \;\in\; V_h$.

Question 9 : Evaluer les coefficients A_{kj} lorsque K est continue (par la méthode des trapèzes), et en déduire que, si K est paire, alors la matrice A est symétrique.

Question 10 : On suppose dans cette question, que

$$K(0) \;>\; 0 \quad , \quad K(x) \;=\; 0 \;\; si \; x < 0 \;.$$

Montrer que dans ce cas, la matrice A est triangulaire inférieure, et calculer son déterminant.

Question 11 : On revient au cas général où K est défini sur tout $\mathbb{R}$, et on prend maintenant

$$K(x) \;=\; e^{-x^2} \;,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice A et décrire la méthode de Gauss Seidel permettant de résoudre le système.