Licence 3, 2007-2008: MHT512 "Intégration"

Devoir maison N ° 3 **N.Nikolski**

A rendre la semaine 48

1. Soient $I = [0,1]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$, $f(u,v) = \frac{1}{1+u^2v^2}$ et $g(x,y,t) = f(x,t)f(y,t)$ où $(x,y,t) \in J =: I \times I \times \mathbb{R}_+$.
(a) Montrer que g est intégrable sur J (muni de la mesure de Lebesgue) et, en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli à $J = \mathbb{R}_+ \times I^2$, que $A =: \int_J g dt dx dy = \int_{\mathbb{R}_+} (\frac{\arctan t}{t})^2 dt$.
(b) En décomposant $\frac{1}{1+as} \cdot \frac{1}{1+bs}$ en éléments simples et en appliquant Fubini-Tonnelli à $J = I^2 \times \mathbb{R}_+$ montrer que $A = \frac{\pi}{2} \int_{I^2} \frac{dxdy}{x+y}$.
(c) En appliquant à nouveau Fubini-Tonnelli à cette dernière intégrale, justifier que $A = \pi \ln 2$

2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et $g_{a,b}(x,y) = f(x+y)x^a y^b$ où $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 =: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ et $a > -1$, $b > -1$.

(a) En supposant que f est continue, montrer que $g_{a,b}$ est intégrable sur tout ensemble de forme $\{(x,y) : 0 < x < c, 0 < y < c\}$, $c > 0$.
(b) Montrer que l'application $(u,t) \longrightarrow (tu, (1-t)u)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+ \ [0,1]$ sur $\mathbb{R}_+^2$ et calculer son Jacobien.
(c) En effectuant le changement de variables indiqué en (b) et en appliquant le théorème Fubini-Tonnelli, montrer que $\int_{\mathbb{R}_+^2} g_{a,b} dxdy = I(a,b)F(a+b+2)$ où $I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b dt$, $F(c) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)u^{c-1}du$, $c > 0$.

3. Soit $1 < p < \infty$ et $L^p = L^p(0,\infty) = \{f : f \text{ } mesurable \text{ } et \int_0^\infty |f(t)|^p dt < \infty\}$ l'espace de Lebesgue sur $(0,\infty)$ muni de la norme $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f|^p dt)^{1/p}$. Pour $f \in L^p$ et $x > 0$ on pose $F(x) = Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
(a) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{p'}$ où p' l'exposant conjugué, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. En écrivant $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)t^\alpha t^{-\alpha} dt$ montrer que

$$|F(x)|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt.$$

(b) En déduire $\int_0^\infty |F(x)|^p dx \leq \frac{1}{\alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^\infty |f(t)|^p dt$ (on pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonnelli).
(c) En étudiant la fonction $\alpha \longrightarrow \alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}$ montrer que $\|T\| \leq p'$ où $\|T\| = sup\{\|Tf\|_p : f \in L^p, \|f\|_p \leq 1\}$, la norme de T.