Corrigé du devoir maison N 3

1. *Soient* $I = [O,1]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$, $f(u,v) = \frac{1}{1+u^2v^2}$ *et* $g(x,y,t) = f(x,t)f(y,t)$ *où* $(x,y,t) \in J =: I \times I \times \mathbb{R}_+$.
(a) *Montrer que g est intégrable sur J (muni de mesure de Lebesgue) et, en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli à $J = \mathbb{R}_+ \times I^2$, que $A =: \int_J gdtdxdy = \int_{\mathbb{R}_+} (\frac{arctan(t)}{t})^2 dt$.*
Solution: g est continue sur $\mathbb{R}^3$, donc mesurable. Par Fubini-Tonnelli, l'intégrabilité, ainsi que l'égalité demandée, découle du fait que $\int_{\mathbb{R}_+}(\int_I f(x,t)(\int_I f(y,t)dy)dx)dt = \int_{\mathbb{R}_+}(\frac{arctan(t)}{t})^2 dt < \infty$ (la dérnière intégrale converge parce que $0 < arctan(t) < \pi/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $arctan(t) \sim t$ lorsque $x \longrightarrow 0$). ■

(b) *En décomposant $\frac{1}{1+as} \cdot \frac{1}{1+bs}$ en éléments simples et en appliquant Fubini-Tonnelli à $J = I^2 \times \mathbb{R}_+$ montrer que $A = \frac{\pi}{2} \int_{I \times I} \frac{dxdy}{x+y}$.*
Solution: On a $g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \cdot \frac{1}{1+y^2t^2} = \frac{1}{x^2-y^2)}\{\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\}$, et donc, d'après Fubini, $A = \int_J gdxdydt = \int_{I \times I} \frac{1}{x^2-y^2} \int_0^\infty \{\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\}dt = \int_{I \times I} \frac{1}{x^2-y^2} \int_0^\infty \{\frac{x}{1+s^2} - \frac{y}{1+s^2}\}ds = \frac{\pi}{2} \int_{I \times I} \frac{dxdy}{x+y}$. ■

(c) *En appliquant à nouveau le théorème de Fubini-Tonnelli à cette dernière intégrale, montrer que $A = \pi ln2$.*
Solution: D'après (b), $A = \frac{\pi}{2} \int_{I \times I} \frac{dxdy}{x+y} = \frac{\pi}{2} \int_I \int_I \frac{dy}{x+y} dx = \frac{\pi}{2} \int_I (ln(x+1) - ln(x))dx = \frac{\pi}{2}[(x+1)ln(x+1) - xln(x)]_{x=0}^{x=1} = \pi ln2$. ■

2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ = [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et $g_{a,b}(x,y) = f(x+y)x^a y^b$ où $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $a > -1$, $b > -1$.*
(a) *En supposant que f est continue, montrer que $g_{a,b}$ est intégrable sur tout carré $]0,c[\times]0,c[$, $c > 0$.*
Solution: f est continue sur $C = [0,c] \times [0,c]$, donc mesurable et bornée, et donc $\int_C g_{a,b} dxdy \leq (sup_C f) \int_0^c x^a dx \int_0^c y^b dy < \infty$. ■

(b) *Montrer que l'application $\varphi : (u,t) \longmapsto (tu, (1-t)u)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ sur $\mathbb{R}_+^2$ et calculer son Jacobien.*
Solution: Clair que $\varphi(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \subset \mathbb{R}_+^2$. D'autre part, φ est inversible: $\varphi(u,t) = (x,y)$ si et seulement si $u = x+y$, $t = \frac{x}{x+y}$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ on a $(u,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. Puisque φ est continûment dérivable (c'est une application polynomiale), elle est un difféomorphisme et on a $J = |det(\varphi')| = |-tu - u(1-t)| = u$. ■

(c) *En effectuant un changement de variables indiqué en (b) et en appliquant Fubini-Tonnelli, montrer que $\int_{\mathbb{R}_+^2} g_{a,b} dxdy = I(a,b)F(a+b+2)$ où $I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b dt$, $F(c) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)u^{c-1}du$, $c > 0$.*
Solution: $\int_{\mathbb{R}_+^2} g_{a,b} dxdy = \int_0^\infty \int_0^1 f(u)(tu)^a((1-t)u)^b udtdu = I(a,b)F(a+b+2)$. ■

3. *Soit $1 < p < \infty$ et $L^p = L^p(\mathbb{R}_+) = \{f : \int_0^\infty |f(t)|^p dt < \infty\}$ l'espace de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ muni de la norme $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(t)|^p dt)^{1/p}$. Pour $f \in L^p$ et $x > 0$ on pose*

(a) *Soit* $0 < \alpha < \frac{1}{p'}$ *où* p' *est l'exposant conjugué,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *En écrivant* $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)t^{\alpha}t^{-\alpha}dt$ *montrer que*

$$\Big|F(x)\Big|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt.$$

Solution: Car $0 < \alpha p' < 1$, la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha p'}$est intégrable sur tout intervalle fini. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\Big|F(x)\Big| \leq \frac{1}{x}(\int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt)^{1/p}(\int_0^x t^{-\alpha p'}dt)^{1/p'} =$$
$$= \frac{1}{x}(\int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt)^{1/p}(\frac{x^{-1-\alpha p'}}{1-\alpha p'})^{1/p'},$$

d'où le résultat. ■

(b) *En déduire que* $\displaystyle\int_0^\infty \Big|F(x)\Big|^p dx \leq \frac{1}{\alpha p'(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^\infty |f(t)|^p dt.$

Solution: D'après (a),

$$I^p =: \int_0^\infty \Big|F(x)\Big|^p dx \leq \int_0^\infty \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} dt dx =$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^\infty \chi(x,t)|f(t)|^p t^{\alpha p} dt dx,$$

où $\chi(x,t) = \chi_{(-\infty,x)}(t)$. D'après Tonnelli-Fubini, on a

$$I^p = \int_0^\infty |f(t)|^p t^{\alpha p} \int_0^\infty \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}}\chi(x,t)dxdt =$$
$$= \int_0^\infty |f(t)|^p t^{\alpha p} \int_t^\infty \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha p')^{p/p'}}dxdt =$$
$$= \frac{1}{\alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}} \int_0^\infty |f(t)|^p dt. \blacksquare$$

(c) *Montrer que* T *est un opérateur linéaire continu de* $L^p(\mathbb{R}_+)$ *dans lui même. En étudiant la fonction* $\alpha \longmapsto \alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}$ *montrer que* $\|T\| \leq p'$ *où* $\|T\| = sup\{\|Tf\|_p : \|f\|_p \leq 1\}$, *la norme de* T.

Solution: T est linéaire comme l'intégrale de fonctions intégrables. D'après (b), $\|Tf\|_p \leq C(\alpha,p)\|f\|_p$ pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ où $C(\alpha,p) = \Big(\dfrac{1}{\alpha p(1-\alpha p')^{p/p'}}\Big)^{1/p}$. Donc, d'après la définition de la norme $\|T\|$, on a $\|T\| \leq inf_\alpha C(\alpha,p)$.

On a $S =: sup_{0<\alpha p'<1}\alpha p(1-\alpha p')^{p/p'} = \frac{p}{p'}sup_{0<t<1}t(1-t)^{p/p'}$. La dérivée de la fonction $t \longmapsto t(1-t)^{p/p'}$ est positive pour $t < 1/p$ et négative pour $t > 1/p$, donc $S = \frac{p}{p'}\cdot\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^{p/p'} = (\frac{1}{p'})^{1+p/p'}$. Finalement, $\|T\| \leq \frac{1}{S^{1/p}} = p'$. ■