Traitement du signal et ondelettes

UE MAA 738

20 Janvier 2005, 8.00-12.00

Les notes de cours disponibles sur le site

`http://www.math.u-bordeaux.fr/~yger/notes_de_cours.html/masterIG.pdf.gz`

sont autorisées. Le temps imparti pour cette épreuve est de 4 *heures. Il sera fait référence dans tout le problème aux routines* MaTLaB *du répertoire*

`matlab.zip`

rapatriées depuis le site web

`http://www.math.u-bordeaux.fr/~yger/pluri.html`

Opération préliminaire. *Rapatrier depuis la page web*

`http://www.math.u-bordeaux.fr/~yger/notes_de_cours.html`

le fichier

`sign_ond_0405`

Ce fichier contient les trois fichiers de données

```
question1
question2
question3
```

et la routine MaTLaB

`polar.m`

à utiliser dans la dernière partie.

Partie I. Cette partie est centrée autour de l'analyse du signal

`s=question1;`

fourni comme premier fichier de données. Il s'agit d'un signal digital de 1024 points correspondant à la mesure d'un signal analogique réel $t \longmapsto s(t)$ enregistré sur l'intervalle temporel $[0, 10.23 \text{ secondes}]$ avec un pas τ d'un centième de seconde.

I.a. En appliquant la transformation de Fourier discrète au signal s, préciser ce que vous pouvez dans un premier temps dire du contenu fréquentiel du signal. Y-a-t-il des pics de fréquences évidents et à quelles valeurs numériques de fréquence ω correspondent-ils ? L'examen du module de la transformée de Fourier discrète de s

permet-il de conclure à une analyse détaillée du contenu spectral de s ? Préciser les difficultés auxquelles vous vous heurtez.

I.b. Enoncer le principe d'incertitude de Heisenberg et expliquer pourquoi ce principe est un frein à l'analyse des signaux déterministes non stationnaires *via* l'examen de leur spectre global.

I.c. Expliquer le principe de l'analyse de Fourier à fenêtre, puis effectuer une telle analyse grâce à la routine

```
>>U=wfft(h,s);
```

utilisée en prenant pour h une fenêtre de Hamming de taille $64, 128, 256$. Que gagne t-on (et que perd-t-on) à prendre une fenêtre de petite (*resp.* de grande) taille ? Quelles conclusions pouvez vous tirer relativement au contenu fréquentiel du signal à partir de ces diverses analyses de Fourier fenêtrées ? Vous préciserez soigneusement la liste (si possible exhaustive) des divers "composants" du signal et les zones de temps et de fréquences auxquels ils correspondent. Quel est l'intérêt de choisir une fenêtre de Hamming plutôt qu'une fenêtre rectangulaire ?

I.d. À quelle classe de signaux la transformation de Wigner-Ville est-t'elle particulièrement adaptée ? Quel défaut majeur cette transformation présente-t-elle ? En utilisant la routine **wiglis1h** (appliquées aux signal $s1$ et $s2$ comme ci-dessous) correspondant à la transformation de Wigner-Ville filtrée

```
>>s1=s(1:512);
>>s2=s(513:1024);
>>h2d=hamming(5)*hamming(5)';
>>W1=wiglis1h(h2d,s1);
>>W2=wiglis1h(h2d,s2);
```

retrouve-t'on bien de manière plus précise l'analyse temps-fréquences du signal obtenue à la question **I.c** ? Pourquoi le rendu est-il plus précis ? Qu'est-ce qui malgré tout perturbe l'image ?

Partie II. Cette partie est centrée autour de l'analyse du signal

```
S=question2;
```

fourni comme second fichier de données. Il s'agit encore d'un signal digital de 1024 points correspondant à la mesure d'un signal analogique réel $t \longmapsto s(t)$ enregistré sur l'intervalle temporel $[0, 10.23 \text{ secondes}]$ avec un pas τ d'un centième de seconde.

II.a. Le signal S est essentiellement un signal sinusoïdal bruité ; que vaut la fréquence fondamentale ω de ce signal ?

II.b. L'analyse temps-échelles continue et l'analyse temps-fréquences correspondent-t'elles à la même démarche ? En ce qui concerne le signal s de la partie I, quelle est de ces deux analyses la mieux adaptée ? On comparera les résultats obtenus au **I.c** et l'image de la transformée en ondelettes continues obtenue *via* les routines

```
>> W=cwt(s,20,'Morlet');
>> imagecwt(W,'globale')
```

Sur quel type de signaux l'analyse temps-échelles continue se justifie-t'elle ? Sur quel type de signaux c'est plutôt l'analyse temps-fréquences qui est à privilégier ?

II.c. En utilisant l'analyse temps-échelles continues avec des dérivées successives de la gaussienne suivant les routines

```
>>[A1,A2,A3]=gaussq(S,10,q);
>>imagecwt(A3,'globale')
```

pour des valeurs croissantes de q ($q = 2$, $q = 5$, $q = 8$,...), que voit-t-on apparaître dans la gamme des petites échelles ? En fait, le signal S est obtenu en superposant à un signal sinusoïdal un certain nombre d'"accidents" très localisés et un bruit blanc. Combien y-a-t-il de tels accidents, où sont-ils localisés, et pourquoi l'analyse temps-échelles continue avec des dérivées d'ordre de plus en plus grand de la gaussienne les confirme-t'elle ? Que se passe t-il si l'on utilise l'ondelette de Gabor ? Expliquer pourquoi le résultat est encore plus évident dans ce cas.

II.d. Quelle différence y-a-t-il entre l'image temps-fréquences d'un bruit blanc et son image temps-échelles ? On génèrera un bruit blanc de longueur 1024 avec la commande

```
>>b=2*rand(1,1024)-1;
```

et on comparera les images fournies par l'analyse de Fourier à fenêtre (comme dans **I.c**) et l'analyse temps-échelles continue (avec par exemple l'ondelette de Morlet ou les dérivées successives d'une gaussienne).

II.d. Traiter le signal S en utilisant les routines

```
>> daub4(S)
>> figure
>> daub8(S)
```

Quelle relation y-a-t-il entre les résultats ainsi obtenus et les images temps-échelles obtenues *via* la transformée en ondelettes continue ? Les conclusions de la question **II.c** concernant la présence d'accidents localisés dans le signal S se trouvent-t-elles confirmées ? L'orthogonalité est-t'elle toujours un atout par rapport à la redondance dans la décomposition d'une information ? Quels avantages, quels inconvénients peut-elle présenter ?

Partie III. Cette partie est centrée autour de l'étude en parallèle de trois signaux correspondant aux enregistrements d'une même secousse sismique par un sismographe orienté Est-Ouest, puis Nord-Sud, enfin haut-bas, de manière à analyser (et à confronter) la propagation de l'onde dans ces trois directions azimutales et à distinguer les ondes se propageant longitudinalement le long de la croûte terrestre et celles se propageant verticalement (perpendiculairement à la surface du globe). L'objectif est d'analyser la polarisation de l'onde sismique. Les trois signaux enregistrés sont les trois lignes de la matrice

```
>> V=question3;
```

III.a. Comment est définie l'entropie de Shannon d'un signal v exprimé dans une certaine base orthonormée ? Quel est l'inérêt pratique de chercher à décomposer v dans une base orthonormée de manière à ce que son entropie de Shannon relativement à sa décomposition dans cette base soit minimale ?

III.b. Expliquer brièvement le principe de l'algorithme de sélection de la meilleure base dans la décomposition d'un signal digital en paquets d'ondelettes. On fera tourner cet algorithme (en 4 étapes) avec l'analyse multi-résolution Daubechies4 sur les trois lignes de la matrive V (prises séparément) suivant les routines :

```
>> [U1,etiq1] =wpack4 (V(1,:),4);
>> [U2,etiq2] =wpack4 (V(2,:),4);
>> [U3,etiq3] =wpack4 (V(3,:),4);
```

Pour chacun de ces trois signaux, les bases pour lesquelles l'entropie est minimale (après quatre étapes de l'algorithme) sont-elles les mêmes ?

III.c. Quelle est l'interprétation en termes de fréquences de l'"étiquette" d'une composante de la décomposition ? Pour chacun des signaux $V(1,:)$, $V(2,:)$ et $V(3,:)$ traités au **III.b**, on dressera la liste des composants les plus significatifs (on négligera ceux dont l'amplitude reste inférieure ou égale au seuil de 50) avec leurs étiquettes (on rappelle que la routine **viewpack** permet de visualiser les composants de la décomposition et leurs étiquettes).

III.d. Rappeler ce que l'on entend par corrélation de deux suites de nombres réels de même longueur. Étant donnés trois composantes $v1, v2, v3$ extraites des décompositions respectives de $V(1,:), V(2,:), V(3,:)$ (et conservées au **III.c**) et de même étiquette, on calcule avec la routine

```
C=polar (v1,v2,v3,128,10,.1);
```

la matrice de Gram d'inter-corrélation des trois informations v_1, v_2, v_3 prises à travers une fenêtre glissante de 128 points (la matrice d'intercorrélation de trois suites digitales réelles e_1, e_2, e_3 de même longueur étant la matrice symétrique rélle 3×3 dont le terme général est la corrélation entre e_i et e_j, $1 \leq i, j \leq 3$), puis l'écart

$$j \longmapsto C(j) := 1 - \frac{\lambda_2(j)}{\lambda_1(j)}$$

(indexé par la position j de la fenêtre), $\lambda_1(j) \geq \lambda_2(j)$ représentant les deux plus grandes valeurs propres de cette matrice de corrélation lorsque la fenêtre est positionnée en j. Pourquoi les pics de cet écart rendent-t'ils compte d'une bonne polarisation de l'onde ?

III.e. Calculer les diverses fonctions C correspondant à tous les triplets (v_1, v_2, v_3) correspondant à des éléments des décompositions respectives de

$$V(1,:), V(2,:), V(3,:)$$

de même étiquette, puis leur produit (si ces composants ont une amplitude supérieure au seuil de 50 fixé au **III.c**) ; précisez (en examinant le graphe de ce produit) les instants d'arrivée des ondes à propagation longitudinale.