Semestre 4, Année 2006-2007 SESSION 2

UE : MAT401

Date : 28 Juin 2007, 14h-17h Durée : 3h

Documents non autorisés

Barème : le barème est donné sur un total de 250 points, la note finale étant considérée (et reportée) comme une note sur 200.

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice I (séries de fonctions, intégrales impropres) - 130 pts

I.1 (20 pts) *Vérifier, pour tout $x > 1$, la convergence de l'intégrale impropre*

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt$$

(on étudiera soigneusement le problème aux deux bornes de l'intégrale).

Il s'agit d'une intégrale impropre de fonction positive ; un problème se pose aux deux bornes de l'intervalle et l'on peut sérier ces deux problèmes distincts.

- Au voisinage de $t = 0$, on a

  $$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \sim t^{x-2}$$

  et l'intégrale sur $]0, 1]$ est convergente en vertu du critère de Riemann ($x - 2 > -1$, exemple 2.1 du cours) et de la règle des équivalents (troisième volet du critère de comparaison énoncé page 38 du cours).

- Au voisinage de $t = +\infty$, on a

  $$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \sim t^{x-1}e^{-t},$$

  donc

  $$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \sim t^{x-1}e^{-t} \leq C_x e^{-t/2} \qquad \forall\, t \in [1, +\infty[$$

  pour une certaine constante $C_x > 0$, et l'intégrale sur $[1, +\infty[$ est convergente comme celle de $t \longmapsto e^{-t/2}$ en vertu du premier volet du critère de comparaison énoncé page 38 du cours.

I.2 (20 pts) *Déduire de* **I.1** *la convergence de l'intégrale impropre*

$$I := \int_1^\infty \frac{(\log u)^2}{u(u-1)}\, du$$

($\log$ *désigne ici la fonction logarithme népérien). Vérifier que*

$$I = \int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt\,.$$

Si l'un effectue dans l'intégrale impropre convergente

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}\, dt$$

(intégrale du type étudié en **I.1** avec $x = 3$) le changement de variable $t = \log u$ bijectif échangeant $]0, +\infty[$ et $]1, +\infty[$ de manière strictement croissante ($u = e^t$), on trouve en utilisant la proposition 2.3 du cours que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{(\log u)^2}{u-1}\, d[\log u] = \int_1^\infty \frac{(\log u)^2}{u(u-1)}\, du$$

est convergente et vaut

$$\int_1^\infty \frac{(\log u)^2}{u(u-1)}\, du = \int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}\, dt\,.$$

I.3 (10 pts) *Vérifier la convergence de l'intégrale impropre*

$$J := \int_0^1 \frac{(\log v)^2}{1-v}\, dv$$

et l'égalité $I = J$.

Si l'on effectue dans l'intégrale convergente

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}\, dt$$

le changement de variable $v = e^{-t}$ bijectif échangeant $]0, +\infty[$ et $[0, 1[$ de manière strictement décroissante ($t = -\log v$), on trouve en utilisant la proposition 2.3 du cours que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(\log v)^2}{1/v - 1} \frac{dv}{v} = \int_0^1 \frac{(\log v)^2}{1-v}\, dv$$

est convergente et égale à l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt\,,$$

donc à I.

I.4 (10 pts) *Vérifier que la suite de fonctions*

$$f_n \ : t \in]0, +\infty[\longmapsto \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)t}$$

converge simplement sur $]0, +\infty[$ *vers la fonction*

$$f \ : t \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{e^t - 1}\,.$$

Si $t > 0$, $e^{-t} \in]0, 1[$ et la série géométrique $[e^{-kt}]_{k \geq 0}$ est convergente, de somme

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-t})^k = \frac{1}{1 - e^{-t}}\,.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge donc simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} = f(t)\,.$$

I.5 (20 pts) *Montrer que, pour tout* $t > 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ [1],

$$f(t) - f_n(t) = e^{-(n+1)t} \times f(t)\,,$$

puis que la convergence de f_n *vers* f *est uniforme sur tout segment* $[\eta, A]$, *avec* $0 < \eta < A < +\infty$. *Est-elle uniforme sur* $]0, +\infty[$ *?*

On a, pour $t > 0$,

$$f_n(t) = e^{-t} \times \sum_{k=0}^{n} (e^{-t})^k = e^{-t} \times \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}\,.$$

On a donc, toujours pour $t > 0$,

$$f(t) - f_n(t) = e^{-t} \times \frac{e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = e^{-(n+1)t} \times f(t)\,.$$

[1] Il y avait une erreur dans l'énoncé concernant cette inégalité : il faut bien lire, comme écrit ici, $e^{-(n+1)t}$ et non $e^{-(n+2)t}$; il n'en a pas été tenu compte dans la correction, d'autant plus que ceci est sans effet sur la suite du problème.

Sur le segment $[\eta, A]$, la fonction f est bornée par une constante $C(\eta, A)$. Sur cet intervalle, on a donc

$$|f_n(t) - f(t)| \leq e^{-(n+1)\eta} C(\eta, A) \,;$$

l'expression majorante étant indépendante de $t \in [\eta, A]$ et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, la convergence de f_n vers f est bien uniforme sur $[\eta, A]$. Comme

$$\sup_{]0,+\infty[} |f(t) - f_n(t)| = +\infty$$

car

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-(n+1)t}}{e^t - 1} = +\infty \,,$$

la convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

I.6 (10 pts) *Soient η et A deux nombres strictement positifs tels que $0 < \eta < A < +\infty$. Énoncer le théorème du cours qui permet d'affirmer que*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\eta^A t^2 f_n(t)\, dt = \int_\eta^A t^2 f(t)\, dt \,.$$

Il s'agit ici du théorème 2.7 du cours : si une suite de fonctions continues $(F_n)_{n \geq 0}$ sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ converge uniformément sur ce segment vers une fonction continue F, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b F_n(t)\, dt = \int_a^b F(t)\, dt \,.$$

On prend ici $[a, b] = [\eta, A]$ et $F_n(t) = t^2 f_n(t)$; la convergence est uniforme sur $[\eta, A]$ car

$$|t^2 f_n(t) - t^2 f(t)| \leq A^2 |f_n(t) - f(t)|$$

sur $[\eta, A]$ et que la convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f est uniforme sur $[\eta, A]$ d'après **I.5**.

I.7 (10 pts) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer que si $\eta > 0$ est un nombre réel suffisamment petit et A un nombre réel suffisamment grand, on a*

$$\int_0^\eta t^2 f(t)\, dt + \int_A^\infty t^2\, f(t)\, dt \leq \epsilon \,.$$

Comme l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty t^2 f(t)\, dt$$

est convergente, il existe, d'après le critère de Cauchy pour les intégrales impropres convergentes (proposition 2.2 du cours), pour tout $\epsilon > 0$, un seuil $\eta_\epsilon > 0$ et un seuil $A_\epsilon > \eta_\epsilon$ tels que, si $\eta < \eta_\epsilon$ et $A > A_\epsilon$, on ait

$$\int_0^\eta t^2 f(t)\, dt < \epsilon/2$$

et

$$\int_A^{+\infty} t^2 f(t) dt < \epsilon/2\,.$$

On obtient le résultat voulu en ajoutant ces deux inégalités.

I.8 (10 pts) *Déduire des questions* **I.5**, **I.6**, **I.7** *que l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty t^2 f_n(t)\, dt = \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt\,.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2 f_n(t)\, dt - \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt \quad &= \quad \int_0^\eta t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \\ &\quad + \int_\eta^A t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \\ &\quad + \int_A^{+\infty} t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt\,.\end{aligned}$$

On remarque que

$$\Big| \int_0^\eta t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \Big| \leq \int_0^\eta t^2 f(t) e^{-(n+1)t}\, dt \leq \int_0^\eta t^2 f(t)\, dt$$

et que

$$\Big| \int_A^{+\infty} t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \Big| \leq \int_A^{+\infty} t^2 f(t) e^{-(n+1)t}\, dt \leq \int_A^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$$

d'après l'inégalité établie à la question **I.5**. Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $\eta = \eta(\epsilon)$ et $A = A(\epsilon)$ comme à la question **I.7** pour que

$$\int_0^{\eta(\epsilon)} t^2 f(t)\, dt + \int_{A(\epsilon)}^\infty t^2\, f(t)\, dt \leq \epsilon\,.$$

Ce choix étant fait, il existe un cran $N(\epsilon)$ tel que, si $n \geq N(\epsilon)$,

$$\Big| \int_{\eta(\epsilon)}^{A(\epsilon)} t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \Big| \leq \epsilon$$

(cela résulte du résultat établi à la question **I.6**). En conclusion, il suit de l'inégalité triangulaire que pour $n \geq N(\epsilon)$,

$$\Big| \int_0^{+\infty} t^2 (f_n(t) - f(t))\, dt \Big| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,.$$

Le résultat est donc établi.

I.9 (10 pts) *Vérifier*

$$\int_0^\infty t^2 f_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^n \int_0^\infty t^2 e^{-(k+1)t}\, dt = \Big(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^3} \Big) \times \int_0^\infty u^2 e^{-u}\, du\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 f_n(t)\, dt &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \Big(\sum_{k=0}^n e^{-kt} \Big)\, dt \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^\infty t^2 e^{-(k+1)t}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^\infty \frac{u^2}{(n+1)^2}\, e^{-u}\, \frac{du}{n+1} \\
&= \Big(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^3} \Big) \times \int_0^\infty u^2 e^{-u}\, du
\end{aligned}$$

si l'on utilise, pour passer de la ligne 2 à la ligne 3 , le changement de variables $t = (k+1)u$ dans la k-ème intégrale figurant dans la somme.

I.10 (10 pts) *Déduire des questions* **I.3**, **I.5** *et* **I.9** *la formule*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\log v)^2}{1-v}\, dv\,.$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité établie en **I.9**. D'après le résultat établi en **I.7**, le membre de gauche de la formule tend vers

$$\int_0^\infty t^2\, f(t)\, dt\,,$$

intégrale convergente égale à

$$\int_0^1 \frac{(\log v)^2}{1-v}\, dv$$

(voir **I.3**). Comme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^2 e^{-u}\,du &= [-u^2e^{-u}]_0^\infty + 2\int_0^\infty ue^{-u}\,du \\ &= 2\Big([-ue^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\Big) = 2\,,\end{aligned}$$

la formule demandée est prouvée.

Exercice II (séries de Fourier)- 60 pts

II.1 (20 pts) *Soit x un nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$. Calculer (en fonction de x), les coefficients de Fourier complexes $c_n(f_x)$, $n \in \mathbb{Z}$, de la fonction 2π-périodique f_x définie sur $[-\pi,\pi[$ par*

$$f_x(t) := \sin(xt)\,,\ t \in [-\pi,\pi[\,.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}c_k(f_x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(xt)\,e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ixt}-e^{-ixt}}{2i}\,e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{4i\pi}\Big[\frac{e^{i(x-k)t}}{i(x-k)} + \frac{e^{-i(x+k)}}{i(x+k)}\Big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\frac{(-1)^k\sin(x\pi)}{x-k} - \frac{(-1)^k\sin(x\pi)}{x+k}\Big) \\ &= \frac{(-1)^k k\sin(x\pi)}{i\pi(x^2-k^2)}\,.\end{aligned}$$

II.2 (20 pts) *Montrer que la suite de fonctions $(S_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$S_{x,n}(t) := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f_x)e^{ikt}$$

converge simplement vers une fonction 2π-périodique S_x coïncidant avec f_x sur $\mathbb{R}$ privé des multiples impairs de π. Que vaut S_x aux multiples impairs de π ? La convergence de la suite de fonctions $(S_{x,n})_{n\geq 0}$ vers S_x est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

La fonction $S_{x,n}$ représente la n-ème somme partielle de Fourier de f_x. Or la fonction f_x est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, privé des points $\pm\pi, \pm 3\pi, ...,$

c'est-à-dire des multiples impairs de π. D'après le théorème de Dirichlet (théorème 4.8 des notes de cours), la suite $(S_{x,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ converge simplement vers la fonction f_x sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des multiples impairs de π. En un point de la forme $(2k_0+1)\pi$ avec $k_0 \in \mathbb{Z}$, la fonction f_x admet une limite à gauche et une limite à droite (valant respectivement $\sin(\pi x)$ et $\sin(-\pi x) = -\sin(\pi x)$) ; de plus, le graphe de la fonction présente des démi-tangentes à gauche et à droite au point $(2k_0+1)\pi$ et le théorème de Dirichlet s'applique encore en ce point, mais avec cette fois comme résultat :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_{x,n}((2k_0+1)\pi) &= \frac{1}{2}\Big(f_x([(2k_0+1)\pi]^+) + f_x([(2k_0+1)\pi]^-)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\pi x) - \sin(\pi x)) = 0 = S_x((2k_0+1)\pi)\,.\end{aligned}$$

La convergence de $(S_{x,n})_{n\geq 0}$ vers S_x n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $S_{x,n}$ sont toutes continues tandis que S_x est discontinue aux multiples impairs de π.

II.3 (20 pts) *En utilisant un résultat du cours que l'on précisera, montrer que la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f_x)|^2$$

existe dans $\mathbb{R}$ *et calculer en fonction de* x *cette limite.*

Le théorème de Plancherel (théorème 4.10) nous assure que la limite en question existe et vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_x^2(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(xt)\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2xt))\,dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{\sin(2tx)}{2x}\Big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}\Big)\,.\end{aligned}$$

Exercice III (intégrales curvilignes) - 60 pts

On suppose que $F = (f,g)$ *est une application de classe* C^2 *au voisinage du disque unité fermé* $\overline{D}$ *de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, et telle que*

$$\forall (x,y) \in \overline{D}\,,\ f^2(x,y) + g^2(x,y) = 1\,. \qquad (*)$$

III.1 (20 pts) *Vérifier, en différentiant* $(*)$ *par rapport à* x *et* y *que*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \overline{D}\,.$$

En différentiant (*) par rapport à x et y, on trouve que pour tout (x,y) dans le disque ouvert D (de centre l'origine et de rayon 1), on a

$$\begin{aligned} f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + g(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + g(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Le couple $(X,Y) = (f(x,y), g(x,y))$ est donc solution du système linéaire de deux équations à deux inconnues (et sans second membre)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,X + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,Y &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,X + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,Y &= 0\,. \end{aligned}$$

Comme $(X,Y) \neq (0,0)$ car $X^2 + Y^2 = 1$, le déterminant de ce système linéaire doit être nul, ce qui signifie donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in D\,.$$

Par continuité, le résultat reste vrai pour tout $(x,y) \in \overline{D}$.

III.2 (20 pts) *On note*

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \\ dg &= \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green-Riemann (que l'on rappelera), montrer que, si γ *est le chemin paramétré*

$$t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos t, \sin t)\,,$$

on a

$$\int_\gamma f dg = 0\,.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dg &= \int_\gamma f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy \\ &= \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.\end{aligned}$$

Or on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix} + f(x,y)\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\Big) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

en utilisant pour établir la dernière égalité le lemme de Schwarz sur l'égalité des dérivées partielles secondes $\partial^2_{x,y} g$ et $\partial^2_{y,x} g$. Si l'on utilise le résultat établi à la question **III.1** et la formule de Green-Riemann (théorème 2.1 des notes de cours) appliqué à l'ouvert borné $V = D$ et à la 1-forme différentielle $f\,dg$, on conclut que

$$\int_\gamma f\,dg = 0\,.$$

III.3 (20 pts) *On suppose de plus que $F(x,y) = (x,y)$ si $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que $\int_\gamma f dg = \pi$ et en conclure que l'existence de F est impossible.*

Un calcul immédiat montre que

$$\int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t))\, dt = \pi\,.$$

Comme on a vu à la question **III.2** que

$$\int_\gamma x dy = \int_\gamma f dg = 0\,,$$

l'existence de $F = (f,g)$ de classe C^2 au voisinage de $\overline{D}$, vérifiant à la fois $f^2 + g^2 \equiv 1$ dans $\overline{D}$ et $F(x,y) = (x,y)$ si $x^2 + y^2 = 1$, est impossible (car conduisant à une contradiction entre $\int_\gamma f\,dg = 0$ et $\int_\gamma f\,dg = \pi \neq 0$).