ANNÉE 2003-2004 SESSION DE JUIN 2004

**GU** : SM411 **UE** : SM411

Date : 18 Mai 2004 Durée : 3 h.

Documents non autorisés

Indication de barème : le problème sur 10 points, l'exercice 1 est sur 4 points, l'exercice 2 sur 5 points, l'exercice 3 sur 3 points.

## Problème.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé ($P$ désignant la probabilité) et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = p_k$ et $P(Y = k) = q_k$.

**1.** Calculer, si $n$ désigne un entier positif ou nul, la probabilité $P(X+Y = n)$ en fonction des nombres $p_k$ et $q_l$, $k, l \in \mathbb{N}$.

**2.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi_X(t)$ la fonction caractéristique de $X$, définie comme l'espérance de la variable aléatoire $e^{itX}$. Exprimer $\varphi_X(t)$ sous forme de la somme d'une série.

**3.** Rappeler ce que signifie le fait que $X$ suive une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que dans ce cas, la fonction caractéristique de $X$ est

$$\varphi_X(t) = \exp(-\lambda(1 - \cos t - i \sin t)) .$$

**4.** Rappeler ce que signifie le fait que $Y$ prenne ses valeurs dans $\{0, ..., N\}$ et suive une loi binomiale de paramètre $1/2$. Donner un exemple concret d'épreuve faisant apparaître une telle variable aléatoire. Montrer que, pour une telle variable aléatoire $Y$, la fonction caractéristique de $Y$ est

$$\varphi_Y(t) = \left(\frac{1 + e^{it}}{2}\right)^N .$$

**5.** Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes, $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ à valeurs dans $\{0, ..., N\}$ suivant une loi binomiale de paramètre $1/2$, alors, la fonction caractéristique de $X + Y$ est

$$\varphi_{X+Y}(t) = \left(\frac{1 + e^{it}}{2}\right)^N \times \exp(-\lambda(1 - \cos t - i \sin t)) .$$

**6.** On suppose dans cette dernière question que $X$ et $Y$ sont deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, toutes les deux suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, telles que $X + Y$ suive une loi de Poisson de paramètre $3\lambda/2$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Montrer que si $r_{l,k}$ désigne, pour

$k, l \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $r_{l,k} := P(X = l \mid Y = k)$, alors on a $P(Y = k \mid X = l) = r_{l,k}\lambda^{k-l}\frac{l!}{k!}$ et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$e^{-\lambda/2}(3/2)^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} r_{n-k,k} \,.$$

**Exercice 1.**

**a.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de moyenne $m$ et d'écart-type $\sigma$. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $X$.

**b.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité de probabilité

$$f_X(t) = \begin{cases} 10\, e^{-10t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases} .$$

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette variable aléatoire. Calculer, en fonction de $\alpha > 0$, $P(|X - m| < \alpha)$. Comparer la valeur trouvée avec l'estimation donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $X$.

**Exercice 2.**

Soit $F \; : (x, y) \to (P(x, y), Q(x, y))$ une application de classe $C^2$ dans un voisinage du disque fermé $D$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, telle que

$$\forall (x, y) \in D\,,\ P^2(x, y) + Q^2(x, y) = 1$$

et que $(P(x, y), Q(x, y)) = (x, y)$ si $x^2 + y^2 = 1$.

**a.** Calculer l'intégrale curviligne de la forme $xdy$ sur le chemin paramétré $\gamma \; : t \in [0, 1] \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

**b.** Montrer que le Jacobien $\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}$ de $F$ est identiquement nul dans $D$.

**c.** En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que

$$\int_\gamma P(x, y)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) = 0\,.$$

**d.** Une telle application $F$ peut-elle exister ?

**Exercice 3**

Soit $I := \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx$ ; calculer en fonction de $I$ la longueur de l'arc géométrique plan paramétré par

$$t \in [0, \pi/2] \to \left(\frac{\cos^2 t}{2}, \sin t\right).$$

Donner ensuite la valeur numérique de $I$.