UE MHT613

Devoir Surveillé, Mardi 19 Mars 2008

Durée : 3 heures, *Documents non autorisés*

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Problème I

Soit H un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, le produit scalaire étant noté $\langle\,,\,\rangle$ et la norme $\|\ \|$. On dit qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire continue T de H dans lui-même est positive si et seulement si

$$\forall\, x \in H\,,\ \langle T(x)\,,\, x\rangle \geq 0\,.$$

I.1. *Rappeler comment est défini l'opérateur de projection orthogonale Proj_F sur un $\mathbb{C}$-sous-espace fermé F de H. Montrer que Proj_F est une application linéaire continue de H dans lui-même, vérifiant $\|\mathrm{Proj}_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$. Quelle est son image ? Quel est son noyau ?*

Si $h \in H$, $\mathrm{Proj}_F(h)$ est défini comme l'unique élément de F tel que

$$\forall\, x \in F\,, \langle x\,,\, h - \mathrm{Proj}_F(h)\rangle = 0\,.$$

Si h_1 et h_2 sont deux éléments de H, λ un nombre complexe, on a donc

$$\forall\, x \in F\,,\ \langle x\,,\, h_1 - \mathrm{Proj}_F(h_1)\rangle + \overline{\lambda}\,\langle x\,,\, h_2 - \mathrm{Proj}_F(h_2)\rangle = 0\,,$$

soit

$$\forall\, x \in F\,, \langle x\,,\, h_1 + \lambda\, h_2 - (\mathrm{Proj}_F(h_1) + \lambda\,\mathrm{Proj}_F(h_2))\rangle = 0\,,$$

d'où, de par la propriété caractéristique de la projection orthogonale,

$$\mathrm{Proj}_F(h_1 + \lambda h_2) = \mathrm{Proj}_F(h_1) + \lambda \mathrm{Proj}_F(h_2)\,.$$

La projection orthogonale sur F est donc bien une opération linéaire. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|h\|^2 = \|h - \mathrm{Proj}_F(h)\|^2 + \|\mathrm{Proj}_F(h)\|^2\,,$$

d'où l'inégalité

$$\|\mathrm{Proj}_F(h)\| \leq \|h\| \quad \forall\, h \in H\,,$$

qui assure la continuité de Proj_F en $h = 0$, donc la continuité partout puisque Proj_F est linéaire. On a donc affaire à un opérateur linéaire continu de norme au plus égale à 1 (de fait égale à 1 lorsque $F \neq \{0\}$ puisque $\mathrm{Proj}_F(x) = x$

pour tout $x \in F$). L'image de cet opérateur est le sous-espace F, le noyau en est le sous-espace $F^\perp$.

I.2. *Montrer que si F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel fermé de H, l'opérateur* Proj_F *est bien une application $\mathbb{C}$-linéaire continue positive de H dans lui-même.*

Comme $x - \mathrm{Proj}_F(x)$ est orthogonal à $\mathrm{Proj}_F(x)$, on a

$$\langle \mathrm{Proj}_F(x)\,,\, x\rangle = \|\mathrm{Proj}_F(x)\|^2 \geq 0$$

pour tout $x \in H$, d'où la positivité de Proj_H.

I.3. *Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dites dans quel cas cette inégalité n'est plus stricte. On suppose que T est une application linéaire continue positive de H dans lui-même telle que*

$$\forall\, x, y \in H\,,\ \langle T(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, T(y)\rangle\,. \tag{†}$$

Vérifier que, pour tout x dans H, pour tout $y \in H$, on a

$$|\langle T(x)\,,\, y\rangle| \leq \sqrt{\langle T(x)\,,\, x\rangle} \times \sqrt{\langle T(y)\,,\, y\rangle} \tag{$*$}$$

(on exploitera le fait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle \geq 0$). Si l'on suppose de plus que

$$\langle T(x)\,,\, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,,$$

montrer qu'il ne peut y avoir égalité dans (*) que si x et y sont colinéaires.

Si x et y sont deux éléments de H, l'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que

$$|\langle x\,,\, y\rangle|^2 \leq \|x\| \times \|y\|\,.$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires dans H.

Si T est positif, on a, pour tout $x, y \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle T(x+\lambda y)\,,\, x+\lambda y\rangle \geq 0\,.$$

En développant et en utilisant la relation (†), donc la relation

$$\langle T(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, T(y)\rangle = \overline{\langle T(y)\,,\, x)\rangle}$$

il vient

$$|\lambda|^2 \langle T(y)\,,\, y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,[\overline{\lambda}\,\langle T(x)\,,\, y\rangle] + \langle T(x)\,,\, x\rangle \geq 0\,.$$

Si l'on prend
$$\lambda = t\exp(i\arg(\langle T(x)\,,\,y\rangle))\,,\quad t\in\mathbb{R}\,,$$
on en déduit
$$\forall\, t\in\mathbb{R}\,,\ t^2\langle T(y)\,,\,y\rangle + 2t|\langle T(x)\,,\,y\rangle| + \langle T(x)\,,\,x\rangle \geq 0\,,$$
et, par conséquent, compte-tenu du fait que cette fonction trinôme garde un signe constant,
$$\Delta' = |\langle T(x)\,,\,y\rangle|^2 - \langle T(x)\,,\,x\rangle\,\langle T(y)\,,\,y\rangle \leq 0\,,$$
ce qui fournit l'inégalité (*) demandée ici.
La clause additionnelle
$$\langle T(x)\,,\,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$
nous assure que
$$(x,y)\longmapsto \langle T(x)\,,\,y\rangle$$
est de fait un nouveau produit scalaire sur H. L'inégalité (*) que l'on vient d'écrire n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce nouveau produit scalaire ; il ne saurait donc y avoir dans ce cas égalité dans l'inégalité (*) que si x et y sont colinéaires (en vertu du résultat concernant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz écrite pour un certain produit scalaire et rappelée en exergue de cette question).

I.4. *On suppose maintenant simplement que T est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue positive de H dans lui-même. Vérifier que (†) est vérifiée, autrement dit que T est autoadjointe (on montrera $\langle T(x)\,,\,y\rangle - \langle T(y)\,,\,x\rangle \in i\mathbb{R}$ avec l'indication donnée à la question* **I.3** *et $\lambda = i$, puis $\langle T(x)\,,\,y\rangle + \langle T(y)\,,\,x\rangle \in \mathbb{R}$ avec la même indication et cette fois $\lambda = 1$, enfin on concluera).*

Si l'on écrit la positivité de $\langle T(x+i\,y)\,,\,x+i\,y\rangle$, il vient
$$\langle T(x)\,,\,x\rangle + \langle T(y)\,,\,y\rangle + i\,(\langle T(y)\,,\,x\rangle - \langle T(x)\,,\,y\rangle) \in [0,\infty[\,.$$
Il en résulte immédiatement
$$\langle T(y)\,,\,x\rangle - \langle T(x)\,,\,y\rangle \in i\mathbb{R}\,.$$
En écrivant maintenant que l'on a aussi
$$\begin{aligned}\langle T(x+y)\,,\,x+y\rangle &= \langle T(x)\,,\,x\rangle + \langle T(y)\,,\,y\rangle \\ &\quad + \Big(\langle T(y)\,,\,x\rangle + \langle T(x)\,,\,y\rangle\Big) \geq 0\,,\end{aligned}$$

on trouve
$$\langle T(y)\,,\,x\rangle+\langle T(x)\,,\,y\rangle\in\mathbb{R}\,.$$
Les deux nombres $\alpha:=\langle T(x)\,,\,y\rangle$ et $\beta:=\langle T(x)\,,\,y\rangle$ sont tels que $\alpha-\beta\in i\mathbb{R}$ et $\alpha+\beta\in\mathbb{R}$; ils sont donc conjugués et l'on a
$$\langle T(x)\,,\,y\rangle=\overline{\langle T(y)\,,\,x\rangle}=\langle x\,,\,T(y)\rangle\,,$$
ce qui prouve bien que T est autoadjoint.

I.5. *On considère une suite $(T_k)_{k\geq 0}$ d'applications $\mathbb{C}$-linéaires continues positives de H dans H telles que*
$$\forall\,x\in H\,,\ \forall k\geq l\geq 0\,,\ 0\leq\langle T_l(x)\,,\,x\rangle\leq\langle T_k(x)\,,\,x\rangle\leq\|x\|^2\,.\qquad(**)$$
Vérifier $\|T_k(x)\|\leq\|x\|$ pour tout x dans H et pour tout $k\in\mathbb{N}$, et que, pour tout $x\in H$, la suite $(\langle T_k(x),x\rangle)_{k\geq 0}$ est convergente. En utilisant l'inégalité (*) pour T_k-T_l lorsque $k\geq l\geq 0$, en déduire que, pour tout $x\in H$, la suite $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H. En déduire qu'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire continue positive T_∞ telle que, pour tout $x\in H$,
$$\lim_{k\to+\infty}T_k(x)=T_\infty(x)\,.$$

D'après la question **I.4**, T_k (qui est continue positive) vérifie (†), donc aussi (*) (d'après la question **I.3**). On a donc en particulier
$$\langle T_k(x)\,,\,T_k(x)\rangle\leq\sqrt{\langle T_k(x)\,,\,x\rangle}\times\sqrt{\langle T_k(T_k(x))\,,\,T_k(x)\rangle}\,,$$
donc aussi
$$\langle T_k(x)\,,\,T_k(x)\rangle\leq\|x\|\times\|T_k(x)\|$$
d'après la clause (**) (appliquée avec x, puis en remplacant x par $T_k(x)$). On en conclut bien $\|T_k(x)\|\leq\|x\|$ pour tout $x\in H$, c'est-à-dire que T_k est de norme inférieure ou égale à 1.

Pour x fixé dans H, la suite
$$(\langle T_k(x)\,,\,x\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$$
est une suite croissante majorée (par $\|x\|^2$), donc convergente dans $[0,\infty[$, donc de Cauchy. Si $0\leq l\leq k$, l'opérateur T_k-T_l est un opérateur linéaire continu positif et l'on a, en utilisant (*) avec les deux vecteurs que sont x et

$(T_k - T_l)(x)$, ainsi que (pour commencer) le fait que $T_{k,l} := T_k - T_l$ est aussi autoadjoint d'après le résultat établi à la question **I.4**,

$$\begin{aligned}
\|(T_{k,l})(x)\|^2 &= \langle (T_{k,l})(x)\,,\,(T_{k,l})(x)\rangle \\
&\leq \sqrt{\langle (T_{k,l})(x)\,,\,x\rangle} \times \sqrt{\langle (T_{k,l}\circ T_{k,l})(x)\,,\,T_{k,l}(x)\rangle} \\
&\leq \sqrt{\langle (T_{k,l})(x)\,,\,x\rangle} \times \sqrt{\|T_{k,l}(x)\| \times \|T_{k,l}(T_{k,l}(x))\|} \\
&\leq \sqrt{\langle (T_{k,l})(x)\,,\,x\rangle} \times \sqrt{8\|x\|^2} \\
&\leq 2\sqrt{2}\,\|x\| \times \sqrt{\langle (T_{k,l})(x)\,,\,x\rangle} \qquad (1)
\end{aligned}$$

puisque

$$\|T_{k,l}(h)\| \leq \|T_k(h)\| + \|T_l(h)\| \leq 2\|h\|$$

pour tout $h \in H$ en vertu de l'inégalité établie au début de cette question ($\|T_k(h)\| \leq \|h\|$ pour tout h dans H et tout k dans $\mathbb{N}$) [1]. Il résulte de (**??**) et du fait que la suite

$$(\langle T_k(x)\,,\,x\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$$

est de Cauchy que la suite $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H, donc converge vers un élément $T_\infty(x)$ dans H puisque H est complet. La linéarité des T_k se propage en passant à la limite à T_∞, qui est donc aussi une application $\mathbb{C}$-linéaire de H dans lui-même. En passant à la limite (lorsque x est fixé et k tend vers $+\infty$) dans

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \|T_k(x)\| \leq \|x\|\,,$$

il vient $\|T_\infty(x)\| \leq \|x\|$ (par continuité de la norme), ce qui prouve que T_∞ est continu (de norme telle que $\|T_\infty\| \leq 1$ comme les T_k). D'ailleurs T_∞ est aussi en fait positif pour les mêmes raisons (comme le sont les T_k) ; cela se voit en faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité

$$\langle T_k(x)\,,\,x\rangle \geq 0$$

à x fixé dans H et en utilisant la continuité du produit scalaire.

I.6. *On suppose que $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$-sous-espaces fermés de H tels que $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que la clause (**) est remplie si l'on prend $T_k = \mathrm{Proj}_{F_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.. Quelle est l'application $\mathbb{C}$-linéaire T_∞ dans ce cas ?*

1. En fait, en étant juste un petit peu plus soigneux, on vérifierait aisément que $\|T_{k,l}\| \leq 1$ puisque $T_{k,l} = T_k - T_l$ et que l'on a les conditions (**), mais ce raffinement n'étant pas nécessaire ici, on l'omettra en le laissant en exercice.

Comme $F_k \subset F_{k+1}$, on peut considérer l'orthogonal G_k de F_k dans F_{k+1} et tout élément h de H se décompose en

$$h = x + y + z \in F_k \overset{\perp}{\oplus} G_k \overset{\perp}{\oplus} F_{k+1}^{\perp}\,.$$

On a $\mathrm{Proj}_{F_k}(h) = x$ et $\mathrm{Proj}_{F_{k+1}}(h) = x + y$ et donc

$$\langle \mathrm{Proj}_{F_{k+1}}(h) - \mathrm{Proj}_{F_k}(h)\,,\, h\rangle = \langle y\,,\, h\rangle = \|y\|^2 \geq 0\,.$$

La clause (**) est donc remplie pour la suite d'applications $\mathbb{C}$-linéaires continues positives $(\mathrm{Proj}_{F_k})_{k\in\mathbb{N}}$ puisque l'on sait aussi que

$$\langle \mathrm{Proj}_{F_k}(h)\,,\, h\rangle \leq \|h\|^2$$

pour tout $h \in H$ (voir la question **I.1**). D'après la proposition 1.7 (second volet) du cours, on sait que, pour tout $h \in H$, la suite

$$\Big(\mathrm{Proj}_{F_k}(h)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers la projection orthogonale de h sur le $\mathbb{C}$-sous espace fermé obtenu comme l'adhérence de l'union des sous-espaces F_k. L'application T_∞ est par conséquent dans ce cas égale à cette prise de projection orthogonale.

Problème II.

On considère le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $H := L^2_{\mathbb{C}}([0,\infty[, e^{-t}\,dt)$, équipé du produit scalaire

$$\langle \dot{f}\,,\, \dot{g}\rangle := \int_{[0,\infty[} f(t)\overline{g(t)}\, e^{-t}\, dt\,.$$

II.1. *Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la classe de la fonction $t \in [0,\infty[\longmapsto t^k$ appartient à H.*

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_{[0,\infty[} t^{2k}\, e^{-t}\, dt$$

est convergente d'après le critère de comparaison des intégrales impropres puisque

$$t^k = O(e^{t/2})$$

lorsque t tend vers $+\infty$ et que la fonction $t \longmapsto e^{t/2}\times e^{-t} = e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. La classe de la fonction $t \in [0,\infty[\longmapsto t^k$ appartient donc bien à H.

II.2. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, vérifier (par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$) que la fonction*

$$H_{j,k} \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{d^k}{dt^k}[t^j e^{-t}] \times e^t$$

est une fonction polynômiale en t, de degré j, de coefficient du terme de plus haut degré $(-1)^k$. En déduire qu'il existe, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une unique fonction polynômiale e_k de degré exactement k (on en donnera la valeur du coefficient du terme de plus haut degré) telle que

$$\forall\, t \in]0, \infty[\,, \ \frac{d^k}{dt^k}[t^k e^{-t}] = k! \times e_k(t)\, e^{-t}$$

et que la famille $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constitue un système orthonormé de H (pour ce dernier point on montrera au préalable que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dot{e}_k$ est orthogonal à tous les $\dot{e}_l$ pour $0 \leq l < k$, ce en utilisant de judicieuses intégrations par parties).

Pour $k = 0$, le résultat demandé concernant la fonction $H_{j,k}$ est vrai car $H_{j,0}(t) = t^j$. Supposons le résultat acquis jusqu'au cran k (toujours à j fixé). Alors

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}[t^j e^{-t}] = \frac{d}{dt}[H_{j,k}(t)e^{-t}] = [-H_{j,k}(t) + H'_{j,k}(t)] \times e^{-t}$$

et l'on constate que $-H_{j,k} + H'_{j,k}$ est bien encore une fonction polynômiale de degré exactement j et de coefficient du terme de plus haut degré $(-1) \times (-1)^k = (-1)^{k+1}$. Le résultat que l'on demandait de prouver par récurrence à j fixé dans $\mathbb{N}$ est bien prouvé.

En prenant $j = k$, on constate que $H_{k,k}$ est une fonction polynômiale de degré exactement k et de coefficient du terme de plus haut degré $(-1)^k$; comme $e_k = H_{k,k}/k!$ par définition, on en déduit donc que la fonction e_k (définie évidemment de manière unique par la formule mentionnée) est une fonction polynômiale de degré exactement k, de coefficient du terme de plus haut degré égal à $(-1)^k/k!$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq l < k$, on a, en utilisant k intégrations par parties

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e_k(t) t^l e^{-t}\, dt &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty D^k[t^k e^{-t}]\, t^l\, dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-t} D^k[t^l]\, dt = 0 \end{aligned}$$

(à chaque intégration par parties, la partie toute intégrée $\Big[\quad \Big]_0^\infty$ est nulle du fait de la présence du facteur e^{-t} dans l'intégrant pour ce qui est de la valeur en l'infini et de la présence d'une puissance de t avec un exposant strictement positif pour ce qui est de la valeur en 0). Comme e_l est une fonction polynômiale de degré exactement l, on déduit du résultat ci-dessus que $\dot{e}_k$ est orthogonal à tous les $\dot{e}_l$ pour $0 \leq l < k$. Les classes $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont donc bien orthogonales deux à deux. On remarque aussi (suivant le même principe) que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{e}_k \, , \, \dot{e}_k \rangle &= \frac{(-1)^k}{k!} \langle \dot{e}_k \, , \, \dot{t^k} \rangle \\
&= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \frac{D^k[t^k e^{-t}]}{k!} \, t^k \, dt \\
&= (-1)^k \times \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \int_0^\infty t^k e^{-t} D^k[t^k] \, dt \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-t} \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \, dt = 1
\end{aligned}$$

(toujours après k intégrations par parties, les parties toutes intégrées étant nulles à chaque étape). Le système $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthonormé.

II.3. *Soit $\lambda > 0$ et $\dot{f}_\lambda$ la classe de la fonction*

$$t \in [0, \infty[\longmapsto e^{-\lambda t} \, .$$

Pourquoi cette fonction définit-elle bien un élément de H ? Vérifiez que, pour $k \in \mathbb{N}$, le produit scalaire $\langle \dot{f}_\lambda \, , \, \dot{e}_k \rangle$ vaut

$$\langle \dot{f}_\lambda \, , \, \dot{e}_k \rangle = \frac{1}{\lambda + 1} \times \Big(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \Big)^k$$

(penser encore aux intégrations par parties). Si V désigne le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel fermé de H engendré par les $\dot{e}_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\|\mathrm{Proj}_V(\dot{f}_\lambda)\|^2$.

Pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_{[0,\infty[} |f_\lambda(t)|^2 \, e^{-t} \, dt = \int_0^\infty e^{-(2\lambda+1)t} \, dt = \frac{1}{2\lambda + 1} \, ,$$

ce qui montre que $\dot{f}_\lambda$ définit bien un élément de H. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a encore (en utilisant k intégrations par parties, les parties toutes intégrées étant nulles à chaque étape)

$$\langle \dot{f}_\lambda \, , \, \dot{e}_k \rangle = \frac{1}{k!} \int_0^\infty D^k[t^k e^{-t}] \, e^{-\lambda t} \, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^k}{k!}\int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+1)t}\,dt \\
&= \frac{\lambda^k}{k!\,(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^\infty u^k e^{-u}\,du \\
&= \frac{\lambda^k}{k!\,(\lambda+1)^{k+1}} \times \Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \times \Big(\frac{\lambda}{\lambda+1}\Big)^k .
\end{aligned}
$$

Si l'on utilise la proposition 1.8 du cours, il vient, puisque le système $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormé,

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{Proj}_V(\dot{f}_\lambda)\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \dot{f}_\lambda \,,\, \dot{e}_k\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+1}\Big)^{2k} \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^2} \times \frac{1}{1-\Big(\frac{\lambda}{\lambda+1}\Big)^2} \\
&= \frac{1}{2\lambda+1} = \|\dot{f}_\lambda\|^2 .
\end{aligned}
$$

II.4. *Soit $\dot{h} \in H$. Écrire pour $\dot{h}$, étant donné le système orthonormé $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de H, l'inégalité de Bessel ; que déduit-on concernant $\dot{h}$ si l'inégalité de Bessel s'avère être une égalité ? Déduire des calculs conduits à la question* **II.3** *que pour tout $\lambda > 0$, on a $\dot{f}_\lambda \in V$.*

L'inégalité de Bessel (proposition 1.8 du cours, volet 1) s'écrit

$$
\sum_{k=0}^{\infty} |\langle \dot{h} \,,\, \dot{e}_k\rangle|^2 \leq \|h\|^2 . \tag{2}
$$

Si cette égalité est une égalité, on a

$$
\|\dot{h} - \mathrm{Proj}_V(\dot{h})\|^2 = 0
$$

d'après le théorème de Pythagore, donc $\dot{h} = \mathrm{Proj}_V(\dot{h}) \in V$. L'égalité dans l'inégalité (**??**) se produit donc si et seulement si $\dot{h} \in V$. Ici, c'est précisément le cas pour $\dot{h} = \dot{f}_\lambda$ (voir la question **II.3**) lorsque $\lambda > 0$. On a donc, pour un tel λ,

$$
\dot{f}_\lambda = \mathrm{Proj}_V(\dot{f}_\lambda) \in V .
$$

II.5. *On admet que les classes des fonctions $t \in [0, \infty[\longmapsto t^k$ engendrent un $\mathbb{C}$-sous-espace dense dans H. Montrer que $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.*

Comme e_k est une fonction polynômiale de degré exactement k (question **II.2**), le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par les $\dot{e}_k$ coïncide avec le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par les classes des fonctions $t \longmapsto t^k$. L'adhérence V de ce sous-espace est donc égale à H d'après le résultat admis. Les $\dot{e}_k$ forment un système orthonormé et engendrent un $\mathbb{C}$-sous-espace dense, ils constituent donc bien une base hilbertienne de H.

II.6. *Prouver :*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2} = \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(k^2+(p-k)^2+1)^2}\Big) < +\infty$$

(on pourra éventuellement admettre ce résultat pour poursuivre le problème). Montrer ensuite, en utilisant le théorème de Fubini-Tonnelli et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que si $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_k|\,|\lambda_l|}{1+k^2+l^2} \leq \|\lambda\|_2^2 \times \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2}}$$

On remarque d'après le théorème de Fubini-Tonnelli que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2} = \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{p} \frac{1}{(1+l^2+(p-l)^2)^2}\Big).$$

Or, pour $l = 0, ..., p$,

$$l^2 + (p-l)^2 \geq p^2/2\,.$$

On a donc

$$\sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{p} \frac{1}{(1+l^2+(p-l)^2)^2}\Big) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+1}{(1+p^2/2)^2} < +\infty$$

d'après le critère de Riemann et le principe de comparaison (la série de terme général p^{-3}, $p \geq 1$, étant convergente).

On a, si $\lambda \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, en utilisant Fubini-Tonnelli (dans le cadre ici discret de la mesure de décompte sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (deux fois de suite),

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_k|\,|\lambda_l|}{1+k^2+l^2} \quad\leq\quad \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\Big(\sum_{l=0}^{\infty}|\lambda_l| \times \frac{1}{1+k^2+l^2}\Big)$$

$$\leq \ \|\lambda\|_2 \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2+l^2)^2}} \Big)$$

$$\leq \ \|\lambda\|_2^2 \times \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+k^2+l^2)^2}} \, .$$

II.7. Calculez $\langle \dot{f}_{k^2}, \dot{f}_{l^2} \rangle$ pour $k, l \in \mathbb{N}$. On considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire T définie sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{vec}(\dot{e}_k \,;\, k \in \mathbb{N})$ et à valeurs dans H par :

$$T(\dot{e}_k) = \dot{f}_{k^2} \, , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

(T étant ensuite prolongée par linéarité au sous-espace $\mathrm{vec}(\dot{e}_k \,;\, k \in \mathbb{N})$ tout entier). Montrez que, pour tout $\dot{h}$ dans $\mathrm{Vec}(\dot{e}_k \,;\, k \in \mathbb{N})$, on a

$$\|T(\dot{h})\| \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2} \Big)^{1/4} \times \|\dot{h}\| \, .$$

En déduire que T admet un unique prolongement en un opérateur linéaire continu $\widetilde{T} \ : H \longrightarrow H$ avec encore

$$\forall \, \dot{h} \in H \, , \quad \|\widetilde{T}(\dot{h})\| \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2} \Big)^{1/4} \times \|\dot{h}\| \, .$$

On a immédiatement

$$\langle \dot{f}_{k^2} \, , \, \dot{f}_{l^2} \rangle := \int_0^\infty e^{-(1+k^2+l^2)t} \, dt = \frac{1}{1+k^2+l^2} \, .$$

Pour tout élément

$$\dot{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, \dot{e}_k$$

appartenant au sous-espace (algébrique) $\mathrm{vec}(\dot{e}_k \,;\, k \in \mathbb{N})$ engendré par les $\dot{e}_k$ (on suppose ici les λ_k tous nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux), on a

$$\|T(\dot{h})\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \overline{\lambda_l} \, \langle T(\dot{e}_k) \, , \, T(\dot{e}_l) \rangle \, ,$$

donc

$$\|T(\dot{h})\|^2 \ \leq \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| \, |\lambda_l| \, |\langle T(\dot{e}_k) \, , \, T(\dot{e}_l) \rangle|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_k|\,|\lambda_l|}{1+k^2+l^2} \\
&\leq \|\lambda\|_2^2 \times \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2}} \\
&\leq C^2\|\dot{h}\|^2
\end{aligned}
$$

avec

$$
C := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+l^2+1)^2}\Big)^{1/4}
$$

(on a en effet $\|\lambda\|_2^2 = \|\dot{h}\|^2$ par Pythagore), d'où, pour un tel $\dot{h}$,

$$
\|T(\dot{h})\| \leq C\|\dot{h}\|\,. \tag{3}
$$

Mais le $\mathbb{C}$-sous-espace algébrique engendré par les $\dot{e}_k$ étant dense dans H, tout élément $\dot{h}$ de H est limite d'une suite $(\dot{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ce sous-espace. La suite $(\dot{h}_n)_n$ est de Cauchy, comme l'est la suite $(T(\dot{h}_n))_n$ à cause de l'inégalité (**??**). Cette suite $(T(\dot{h}_n))_n$ converge donc (puisque H est complet) vers un élément noté $\widetilde{T}(\dot{h})$ (d'ailleurs évidemment indépendant de la suite approximante $(\dot{h}_n)_n$. On peut ainsi prolonger T à H tout entier, le prolongement étant linéaire continu puisque l'inégalité (**??**) persiste. Qu'un tel prolongement soit unique résulte de la densité du sous-espace engendré par les $\dot{e}_k$ dans H.