UE MAT401

Devoir Surveillé 2, Mercredi 20 Avril 2005

Durée: 1 heure 20 mn

Texte et Corrigé

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$ty''(t) + 3y'(t) - 4t^3 y(t) = 0\,. \qquad (*)$$

a. *Montrer que si* $[a_n t^n]_{n\geq 0}$ *est une série entière de rayon de convergence* R *strictement positif dont la somme* S *est solution de l'équation différentielle (*), on a*

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ 2p(2p+1)a_{4p} = a_{4(p-1)} \\ &\forall p \in \mathbb{N}\,,\quad a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0\,. \end{aligned}$$

Sur $]-R, R[$, on a, puisque la dérivée de la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ s'exprime dans $]-R, R[$ comme la somme de la série dérivée :

$$\begin{aligned} 3S'(t) &= 3\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k \\ tS''(t) &= t\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}t^k = \sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)a_{k+1}t^k\,. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$-4t^3 S(t) = -4\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k+3} = -4\sum_{k=3}^{\infty}a_{k-3}t^k\,.$$

En reportant dans (*), on trouve que si S est solution de l'équation différentielle dans $]-R, R[$,

$$\begin{aligned} tS''(t) + 3S'(t) - 4t^3 S(t) &= \sum_{k=3}^{\infty}\Big(k(k+1)a_{k+1} + 3(k+1)a_{k+1} - 4a_{k-3}\Big)\big)t^k \\ &\qquad +3a_1 + (2a_2 + 6a_2)t + (6a_3 + 9a_3)t^2 \\ &= \sum_{k=3}^{\infty}\Big((k+1)(k+3)a_{k+1} - 4a_{k-3}\Big)t^k \\ &\qquad +3a_1 + 8a_2 t + 15a_3 t^2 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

ce qui implique $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et, pour tout $k \geq 3$,

$$(k+1)(k+3)a_{k+1} = 4a_{k-3}\,. \qquad (**)$$

En particulier, on a , pour tout $p \geq 1$, en prenant respectivement $k = 4p-1$, $k = 4p$, $k = 4p+1$, $k = 4p+2$ dans (**),

$$\begin{aligned}
4p(4p+2)a_{4p} &= 4a_{4p-1-3} = 4a_{4(p-1)} && (1)\\
(4p+1)(4p+3)a_{4p+1} &= 4a_{4p-3} = 4a_{4(p-1)+1} && (2)\\
(4p+2)(4p+4)a_{4p+2} &= 4a_{4p+1-3} = 4a_{4(p-1)+2} && (3)\\
(4p+3)(4p+5)a_{4p+3} &= 4a_{4p+2-3} = 4a_{4(p-1)+3}\,. && (4)
\end{aligned}$$

On obtient la première formule voulue en divisant par 4 les deux membres de (1). On obtient le fait que $a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$ par induction en utilisant au cran initial ($p = 0$) les relations $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, puis, pour passer du cran $p-1$ au cran p dans l'induction, respectivement les relations (2) (pour montrer que $a_{4p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$), (3) (pour montrer que $a_{4p+2} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et (4) (pour montrer que $a_{4p+3} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$).

b. *Montrer qu'il existe une unique série entière $[a_n t^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence $R = +\infty$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle (*) sur $\mathbb{R}$ et satisfait de plus à la condition $S(0) = 1$ (on calculera explicitement les coefficients a_n, $n \in \mathbb{N}$).*

Règlons tout d'abord la question de l'unicité : si la série $[a_n t^n]_{n\geq 0}$ existe, alors on sait d'après (a) que si $a_0 = 1$, on a

$$a_{4p} = \frac{a_{4(p-1)}}{2p(2p+1)} = \frac{a_{4(p-2)}}{(2p+1)\times 2p \times (2p-1)\times 2(p-1)} = \cdots = \frac{a_0}{(2p+1)!}$$

(de proche en proche). On a donc, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!}$$

et

$$a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$$

pour tout entier $p \geq 0$, ce qui détermine les a_n de manière unique. La série entière ainsi construite est la série

$$\Big[\frac{t^{4n}}{(2n+1)!}\Big]_{n\geq 0}\,.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0\,,$$

le rayon de convergence de la série entière

$$\Big[\frac{t^{4n}}{(2n+1)!}\Big]_{n\geq 0}\,,$$

vaut, comme celui de la série entière

$$\Big[\frac{t^{n}}{(2n+1)!}\Big]_{n\geq 0}\,,$$

$R = 1/0 = +\infty$.

c. *Exprimer la fonction S trouvée à la question* **b)** *en termes de la fonction* sinh *("sinus hyperbolique") dont on rappellera le développement en série entière au voisinage de l'origine.*

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

On voit donc que

$$S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{4p}}{(2p+1)!} = \frac{\sinh(t^2)}{t^2}\,.$$

Exercice 2.

a. *Soit ζ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par*

$$\zeta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^t}\,.$$

En utilisant un théorème du cours que l'on citera avec soin, montrer que la fonction ζ est une fonction C^1 sur $]1,+\infty[$ et que la dérivée de ζ sur $]1,+\infty[$ est la fonction :

$$\zeta' \ : t \in]1,+\infty[\longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^t}\,,$$

où log *désigne la fonction logarithme néperien.*

Soit ϵ un nombre strictement positif. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \in]1+\epsilon, +\infty[\longmapsto \frac{1}{k^t} = e^{-t\log k}$$

est de classe C^1 sur $]1+\epsilon, +\infty[$, de dérivée

$$t \in]1+\epsilon, +\infty[\longmapsto (-\log k) e^{-t\log k} = -\frac{\log k}{k^t}\,.$$

D'autre part,

$$\forall k \geq 1\,,\ \forall t \in]1+\epsilon, +\infty[\,,\ \Big| -\frac{\log k}{k^t}\Big| \leq \frac{\log k}{k^{1+\epsilon}} \leq C_\epsilon \frac{1}{k^{1+\epsilon/2}}$$

puisque la suite de terme général $\log k/k^{\epsilon/2}$ est une suite bornée par une constante C_ϵ (elle converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini). La série de fonctions

$$\Big[-\frac{\log k}{k^t}\Big]_{k\geq 1}$$

converge normalement sur $]1+\epsilon, +\infty[$ puisque la série majorante de terme général $Ck^{-1-\epsilon/2}$ est convergente (série de Riemann). D'autre part, la série de fonctions $[1/k^t]_{k\geq 1}$ converge en tout point de $]1, 1+\epsilon[$. C'est le théorème 3.5 du cours qui permet d'affirmer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1+\epsilon, +\infty[$ et que sa dérivée sur cet intervalle est la fonction

$$t \in]1+\epsilon, +\infty[\longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^t}$$

(la dérivée de la somme est la somme des dérivées dès que la série converge en un point, qu'il s'agit d'une série de fonctions de classe C^1, et qu'en plus la série des dérivées converge normalement). Comme ϵ est arbitraire et que le fait d'être C^1 est une propriété locale, la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, de dérivée la fonction

$$t \in]1, +\infty[\longmapsto \zeta'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^t}\,.$$

b. *Soit x un nombre réel strictement positif et $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions sur $[0, +\infty[$ définie par*

$$f_n(t) := t^x e^{-nt}\,.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0, +\infty[$ (on cherchera dans un premier temps où la fonction f_n atteint son maximum sur $[0, +\infty[$).

Etudions le sens de variation de f_n ur $[0,+\infty[$. On a

$$f_n(t) = \exp(nt - x\log t)$$

et donc

$$f_n'(t) = (n - x/t)\exp(nt - x\log t)\,.$$

Cette dérivée s'annule en $t = x/n$, est positive avant, négative après ; le maximum de f_n est donc atteint en $t = x/n$ et vaut

$$f_n(x/n) = (x/n)^x e^{-x} = \frac{x^x e^{-x}}{n^x}\,.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,+\infty[} |f_n(t)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^x e^{-x}}{n^x} = 0\,,$$

ce qui prouve que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0,+\infty[$.

c. *Vérifier pour tout $t > 0$ l'identité :*

$$\frac{1}{e^t - 1} - \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} = \frac{e^{-nt}}{e^t - 1}\,.$$

On utilise l'identité remarquable

$$X^n - Y^n = (X - Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \cdots + Y^{n-2}X + Y^{n-1})\,,$$

ce qui donne ici en particulier

$$1 - e^{-nt} = (1 - e^{-t})(1 + e^{-t} + \cdots + e^{-(n-1)t}) = (e^t - 1)\sum_{k=1}^{n} e^{-kt}\,,$$

d'où la formule voulue en divisant par $e^t - 1$.

d. *Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,dt$$

est convergente. Déduire de **b)** *que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \times t^x e^{-nt}\,dt \right) = 0\,.$$

La fonction
$$t \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{t^x}{e^t-1}$$
étant une fonction positive, on peut raisonner en utilisant des équivalents pour prouver la convergence de l'intégrale. Les problèmes de convergence se posent aux deux extrémités de l'intervalle, soit en $t=0$ et $t=+\infty$. Au voisinage de $t=0$, on a
$$\frac{t^x}{e^t-1} \sim t^{x-1} \ ;$$
cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ car $x-1>-1$. Au voisinage de $t=+\infty$, on a
$$\frac{t^x}{e^t-1} \sim t^x e^{-t} \leq C(x) e^{t/2} e^{-t} = C(x) e^{-t/2}$$
où $C(x)$ désigne le maximum sur $[0,+\infty[$ de la fonction bornée $t \longmapsto t^x e^{-t}$ (cette fonction est bornée car continue et tendant vers 0 en $+\infty$). Comme la fonction $t \longmapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de la fonction
$$t \longmapsto \frac{t^x}{e^t-1} \, .$$
Cette fonction est donc bien intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$, on a (par monotonie de la prise d'intégrale)
$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \frac{t^x}{e^t-1} \times t^x e^{-nt}\, dt &= \int_a^b \frac{t^x}{e^t-1} \times t^x e^{-nt}\, dt \\
&\leq \sup_{[0,+\infty[} (t^x e^{-nt}) \int_{[a,b]} \frac{t^x}{e^t-1}\, dt \\
&\leq \sup_{[0,+\infty[} (t^x e^{-nt}) \times \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\, dt \, .
\end{aligned}$$
En prenant le sup sur tous les segments $[a,b]$ et en utilisant la définition de l'intégrale impropre, il vient
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1} \times t^x e^{-nt}\, dt \leq \sup_{[0,+\infty[} (t^x e^{-nt}) \times \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\, dt \, .$$
Le membre de droite de cete inégalité tend vers 0 du fait du résultat établi au (b). On en déduit le résultat demandé.

e. *Déduire de* **c**) *et de* **d**) *la formule suivante :*

$$\forall x > 0\,, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{2x}\,dt}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{2x} e^{-kt}\,dt = \zeta(2x+1) \times \int_0^{\infty} u^{2x} e^{-u}\,du$$

(on pensera à utiliser un changement de variable dans les intégrales impropres pour passer de la première ligne à la deuxième).

On utilise la formule établie au (c) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2x}\,dt}{e^t - 1} = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} e^{-kt}\Big) t^{2x}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \times t^x e^{-nt}\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} t^{2x} e^{-nt}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} \times t^x e^{-nt}\,dt\,.$$

En utilisant la conclusion de (d), on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2x}\,dt}{e^t - 1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} t^{2x} e^{-nt}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{2x} e^{-kt}\,dt\,. \qquad (\dagger)$$

Le changement de variable $t \longmapsto kt$, pour $k \geq 1$, permet d'écrire pour un tel k

$$\int_0^{+\infty} t^{2x} e^{-kt}\,dt = \frac{1}{k^{2x+1}} \int_0^{+\infty} u^{2x} e^{-u}\,du\,.$$

On trouve donc bien ainsi, en reportant dans (†),

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2x}\,dt}{e^t - 1} = \int_0^{+\infty} u^{2x} e^{-u}\,du \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2x+1}} = \zeta(2x+1) \times \Gamma(2x+1)\,,$$

où

$$\Gamma(X) := \int_0^{+\infty} t^{X-1}\, e^{-t}\,dt$$

est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ interpolant la prise de factorielle aux entiers.