UE MAT401

Devoir Surveillé 2, Mercredi 20 Avril 2005

Durée: 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$ty''(t) + 3y'(t) - 4t^3 y(t) = 0\,. \qquad (*)$$

a. Montrer que si $[a_n t^n]_{n\geq 0}$ est une série entière de rayon de convergence R strictement positif dont la somme S est solution de l'équation différentielle (*), on a

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ 2p(2p+1)a_{4p} = a_{4(p-1)} \\ &\forall p \in \mathbb{N}\,,\quad a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0\,. \end{aligned}$$

b. Montrer qu'il existe une unique série entière $[a_n t^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence $R = +\infty$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle (*) sur $\mathbb{R}$ et satisfait de plus à la condition $S(0) = 1$ (on calculera explicitement les coefficients a_n, $n \in \mathbb{N}$).

c. Exprimer la fonction S trouvée à la question **b)** en termes de la fonction sinh ("sinus hyperbolique") dont on rappellera le développement en série entière au voisinage de l'origine.

Exercice 2.

a. Soit ζ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^t}\,.$$

En utilisant un théorème du cours que l'on citera avec soin, montrer que la fonction ζ est une fonction C^1 sur $]1, +\infty[$ et que la dérivée de ζ sur $]1, +\infty[$ est la fonction :

$$\zeta' \ : t \in]1, +\infty[\longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^t}\,,$$

où log désigne la fonction logarithme néperien.

b. Soit x un nombre réel strictement positif et $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions sur $[0, +\infty[$ définie par

$$f_n(t) := t^x e^{-nt}\,.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0,+\infty[$ (*on cherchera dans un premier temps où la fonction f_n atteint son maximum sur* $[0,+\infty[$).

c. Vérifier pour tout $t>0$ l'identité :

$$\frac{1}{e^t-1} - \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} = \frac{e^{-nt}}{e^t-1}\,.$$

d. Montrer que pour tout $x>0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\,dt$$

est convergente. Déduire de **b)** que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1} \times t^x e^{-nt}\,dt\right) = 0\,.$$

e. Déduire de **c**) et de **d**) la formule suivante :

$$\begin{aligned}\forall x>0\,,\quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{2x}\,dt}{e^t-1} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} t^{2x}e^{-kt}\,dt \\ &= \zeta(2x+1)\times\int_0^{\infty} u^{2x}e^{-u}\,du\end{aligned}$$

(*on pensera à utiliser un changement de variable dans les intégrales impropres pour passer de la première ligne à la deuxième).*