Année : 2006/2007	DS de Octobre 2006
Étape : MAP5	**UE : MAP502**
Date : Lundi 30 Octobre	De 9h à 12h
Documents non autorisés.	
Épreuve de Monsieur E. Amar	

Question de cours.

Donner l'énoncé du lemme de Fatou.

Problème 1.

Soit $(X,\ \mathcal{T},\ \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ (espace de probabilités).
Soit $f \in L^1(X,\ \mathcal{T},\ \mu),\ f \geq 0$.

1- Montrer que $\ln f$ est mesurable.

On supposera désormais que $\ln f \in L^1(\mu)$.

2- Montrer que $\int_X \ln f\, d\mu \leq \ln \int_X f\, d\mu$. (On pourra remarquer que $\forall t > 0,\ \ln t \leq t-1$ et commencer par supposer que $\|f\|_1 = 1$.)

3- Montrer qu'il y a égalité dans **2-** si et seulement si $f = Cste > 0$.

4- Montrer que $\frac{e^{pa} - 1}{p} \longrightarrow a$ quand $p \longrightarrow 0$.

5- Soit $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs tels que $p_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que $\frac{f^{p_n} - 1}{p_n} \longrightarrow \ln f$ en décroissant quand $n \longrightarrow \infty$.

6- Montrer que $\forall p < 1,\ f^p \leq 1 + f$. En déduire que si $p_n \longrightarrow 0,\ \int_X f^{p_n}\, d\mu \longrightarrow 1$.

7- Déduire de **5-** que $\left| \ln \int_X f^{p_n}\, d\mu - \int_X (f^{p_n} - 1)\, d\mu \right| \longrightarrow 0$ si $p_n \longrightarrow 0$. (On pourra poser $a_n := \int_X f^{p_n}\, d\mu$).

8- Déduire de **4-** et de **5-** que $\lim_{p \longrightarrow 0} \left(\int_X f^p\, d\mu \right)^{1/p} = \exp \int_X \ln f\, d\mu$.

Problème 2.

Soient $(X,\ \mathcal{T},\ \mu)$ un espace mesuré, f une fonction mesurable à valeurs positives. On pose, pour $\lambda > 0$, $F(\lambda) := \mu(f > \lambda) = \mu(\{x \in X\ t.q.\ f(x) > \lambda\})$.

1- Montrer que F est une fonction décroissante et continue à droite.

2- Montrer que si $f \in L^1(\mu)$ il existe une constante $A > 0$ telle que $F(\lambda) \leq \frac{A}{\lambda}$.

3- Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, tendant vers f quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que, si $F_n(\lambda) := \mu(f_n > \lambda)$, alors F_n converge en croissant vers F.

4- Calculer F lorsque f est une fonction caractéristique, puis lorsque f est une fonction simple que l'on prendra sous la forme $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et les A_j disjoints.

Montrer que dans ce cas $F = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \mathbb{1}_{[0,\ \alpha_j[}$.

5- Soit Φ une fonction positive définie sur $[0,\ +\infty[$, dérivable et à dérivée positive, telle que $\Phi(0) = 0$. On se propose de montrer que, quelle que soit la fonction mesurable f à valeurs positives,

$$\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\, d\lambda,$$

où Φ' est la dérivée de Φ et $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et les A_j disjoints alors on a bien $\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\, d\lambda$.

b) Montrer que $\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^{\infty} F(\lambda)\Phi'(\lambda)\, d\lambda$ pour toute fonction f en utilisant la question **3-**.