Chapitre 8 : fonctions de deux ou trois variables, une initiation

Plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, plan affine $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y)\,;\, x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}\}$

$$\Big((x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2)\Big) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(\lambda, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)\,.$$

Si $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$, avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Travailler avec le point de vue consistant à considérer les couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ comme des vecteurs consiste à faire de la *géométrie vectorielle* dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, travailler avec le point de vue consistant à les considérer comme des points consiste à faire de la *géométrie affine* dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\Big\langle (x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2) \Big\rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2 \,.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\Big\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,,\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Big\rangle} := \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|\,,$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3)$:

$$\begin{aligned} d^2(M_1, M_3) &= d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3) \\ &\quad + 2\Big\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,,\,(x_3 - x_2, y_3 - y_2) \Big\rangle \\ &= d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3) + 2\Big\langle \overrightarrow{M_1 M_2}\,,\,\overrightarrow{M_2 M_3} \Big\rangle \end{aligned}$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\langle (x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2)\rangle}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\\ \sin\theta &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\,.\end{aligned}$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

$$r := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

$$M = O + r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})\,,$$

Espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, espace affine $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x,y,z)\,;\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\, z \in \mathbb{R}\}$

$$\Big((x_1,y_1,z_1)\,,\,(x_2,y_2,z_2)\Big) \longmapsto (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$(\lambda,(x,y,z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \lambda \cdot (x,y,z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\,.$$

Si $M_1 = (x_1,y_1,z_1)$ et $M_2 = (x_2,y_2,z_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1M_2}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$, avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1M_2}$.

Travailler avec le point de vue consistant à considérer les couples (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ comme des vecteurs consiste à faire de la *géométrie vectorielle* dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, travailler avec le point de vue consistant à les considérer comme des points consiste à faire de la *géométrie affine* dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Repérage sphérique des points de $\mathbb{R}^3$

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Longitude :

$$\theta \in [0, 2\pi[\,, \quad \cos\theta := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Co-latitude :

$$\varphi := \mathrm{Arcos}\, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \in [0, \pi]$$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = r\sin\varphi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + r\cos\varphi\,\vec{k}\,.$$

$$x = r\sin\varphi\,\cos\theta \quad y = r\sin\varphi\,\sin\theta \quad z = r\cos\varphi\,.$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\Big\langle (x_1, y_1, z_1)\,,\,(x_2, y_2, z_2)\Big\rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\sqrt{\Big\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,,\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\Big\rangle}$$
$$:= \quad \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|\,,$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{aligned} d^2(M_1, M_3) &= d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3) \\ &\quad + 2\Big\langle \overrightarrow{M_1M_2}\,,\,\overrightarrow{M_2M_3}\Big\rangle \end{aligned}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\vec{k}\,.$$

Nota : *la quantité* $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ *mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$

... et de deux vecteurs de l'espace :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k} \end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\vec{k}$$

Nota : *la quantité* $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|$ *mesure toujours l'aire du parallélogramme construit à partir de* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *dans le plan défini par ces vecteurs*

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Soit $f\ : U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dire que f est *différentiable* en $M_0 = (x_0, y_0)$ signifie qu'il existe deux nombres réels a_{M_0} et b_{M_0} tels que

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(M_0) - a_{M_0}\,h - b_{M_0}\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

$$\begin{aligned} a_{M_0} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{h\to 0\\h\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ b_{M_0} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{k\to 0\\k\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x, \underline{\mathbf{y}})] &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{d}{dy}[f(\underline{\mathbf{x}}, y)] &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

... et d'une fonction de 3 variables en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\lim_{\substack{(h,k,l)\to O \\ (h,k,l)\neq O}} \frac{f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(M_0) - a_{M_0}h - b_{M_0}k - c_{M_0}l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = 0$$

$$a_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$b_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{k\to 0 \\ k\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0+k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

$$c_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{l\to 0 \\ l\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l}.$$

$$\frac{d}{dx}[f(x, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}})] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \qquad \frac{d}{dy}[f(\underline{\mathbf{x}}, y, \underline{\mathbf{z}})] = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$$

$$\frac{d}{dz}[f(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, z)] = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z),$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y})\right](x_0, y_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y)\right](x_0, y_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \mathbf{y})\right](x_0, y_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\right](x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Lemme d'Hermann Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de trois variables

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})\right](x_0, y_0, z_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y, \mathbf{z})\right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)\right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dy}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y, \mathbf{z})\right](x_0, y_0, z_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)\right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)\right](x_0, y_0, z_0)
\end{aligned}$$

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f\ : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, le gradient de f est le champ de vecteurs de U dans $\mathbb{R}^3$ (*idem pour* $f\ : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$$\overrightarrow{\nabla f}\ : (x,y,z) \in U \longmapsto \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Big) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f, se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Le gradient en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (si l'on voit le graphe comme une carte en relief).

Le laplacien de f est la fonction scalaire de U dans $\mathbb{R}$:

$$\Delta[f] := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si f est une image $(x, y) \longrightarrow I(x, y)$, $\Delta[f]$ met en évidence les lignes de rupture de cette image.

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla F}(x(t), y(t))\,,\, (x'(t), y'(t)) \right\rangle .\end{aligned}$$

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla F}(x(t), y(t), z(t))\,,\, (x'(t), y'(t), z'(t)) \right\rangle .\end{aligned}$$

Règle de Leibniz : exemple 3

$$(u,v) \in U \xrightarrow{F} (x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} G(x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [G \circ F]}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}(F)\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial [G \circ F]}{\partial v} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}(F)\frac{\partial y}{\partial v} \,.
\end{aligned}$$

Règle de Leibniz : exemple 4

$$(u,v,w) \in U \overset{F}{\longmapsto} (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in \mathbb{R}^3$$
$$\overset{G}{\longmapsto} G(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[G \circ F]}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}(F)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial z}(F)\frac{\partial z}{\partial u} \\
\frac{\partial[G \circ F]}{\partial v} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}(F)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial z}(F)\frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial[G \circ F]}{\partial w} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F)\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial y}(F)\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial z}(F)\frac{\partial z}{\partial w}\,.
\end{aligned}$$

Champs de vecteurs : le rotationnel d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} : \quad &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}\right) \wedge (P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}) \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Champs de vecteurs : la divergence d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$$

La divergence du champ $\vec{F}$ est la fonction scalaire :

$$(x, y, z) \in U \mapsto \mathrm{div}\,\vec{F}(x, y, z) := \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\,.$$

Quelques règles importantes

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,[\overrightarrow{\nabla F}] = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,[f\ \vec{F}] = \overrightarrow{\nabla f} \wedge \vec{F} + f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}$$

$$\mathrm{div}\,[\overrightarrow{\nabla f}] = \Delta f$$
$$\mathrm{div}\,[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{G}] = 0$$
$$\mathrm{div}\,[f\ \vec{F}] = \langle \overrightarrow{\nabla f}\ ,\ \vec{F} \rangle + f\,\mathrm{div}\,\vec{F}$$
$$\mathrm{div}\,[f_1\ \overrightarrow{\nabla f_2}] = \langle \overrightarrow{\nabla f_1}\ ,\ \overrightarrow{\nabla f_2} \rangle + f_1\ \Delta\ f_2$$
$$\mathrm{div}\,[\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2] = \langle \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F}_1\ ,\ \vec{F}_2 \rangle - \langle \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F}_2\ ,\ \vec{F}_1 \rangle$$

Deux calculs importants de laplacien

$$\Delta\left[\log\sqrt{x^2+y^2}\right]=0 \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$\Delta\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]=0 \quad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$$

Fin du chapitre 8