CHAPITRE 6

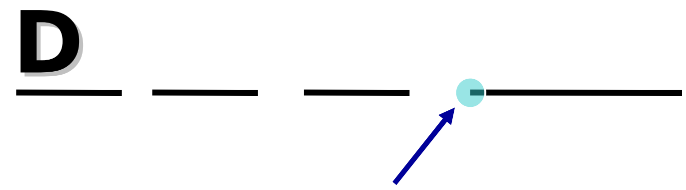
Fonctions numériques

Le plan du chapitre

- **Limite d'une fonction en un point de R ou de la droite réelle achevée, opérations et théorèmes sur les limites**
- **Continuité d'une fonction en un point et sur un ensemble**
- **Opérations sur les fonctions continues**
- **Fonctions strictement monotones sur un intervalle**
- **Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle**
- **Extréma (maxima ou minima) locaux**
- **Dérivées successives**

Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$ ou de la droite réelle achevée

Cas 1



$$D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$a \in \bar{D}$

f admet une limite <u>finie</u> $\ell \in \mathbb{R}$ au point

si et seulement si, pour <u>toute</u> suite $(x_n)_n$ de points de D :

$$\lim\,(x_n)_n = a \Longrightarrow \lim\,(f(x_n))_n = \ell$$

f admet une limite <u>finie</u> $\ell \in \mathbb{R}$

au point a

Pour tout ε >0,

il existe η >0 , tel que :

(x appartient à D et |x-a| < η)

$\Rightarrow$ **$|f(x) - \ell| < \varepsilon$**

Le cas particulier où le point a est un point de D

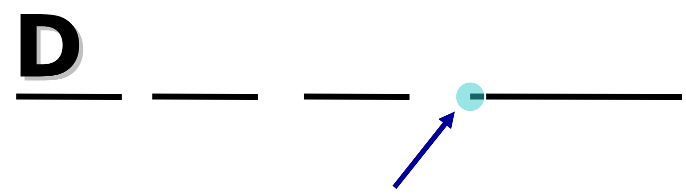
- $f : D \dashrightarrow \mathbb{R}$
- a point de D
- $\lim_a f$ existe dans $\mathbb{R}$ (et vaut nécessairement f(a))

$$\Leftrightarrow$$

f est continue en a

Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$ ou de la droite réelle achevée

Cas 2



$D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$a \in \overline{D} \setminus D$

<u>f tend vers +∞</u> au point a si et seulement si, pour <u>toute</u> suite $(x_n)_n$ de points de D :

$\lim (x_n)_n = a \Longrightarrow \lim (f(x_n))_n = +\infty$

f tend vers $+\infty$ au point a

Pour tout A >0,

il existe η >0 , tel que :

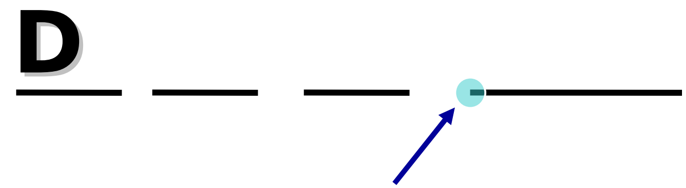
(x appartient à D et |x-a| < η)

⇒ f(x) > A

Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$ ou de la droite réelle achevée

Cas 3

$D \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$



$a \in \bar{D} \setminus D$

f tend vers $-\infty$ au point a si et seulement si, pour **toute** suite $(x_n)_n$ de points de D :

$\lim (x_n)_n = a \Longrightarrow \lim (f(x_n))_n = -\infty$

f tend vers -∞ au point a

Pour tout A >0,

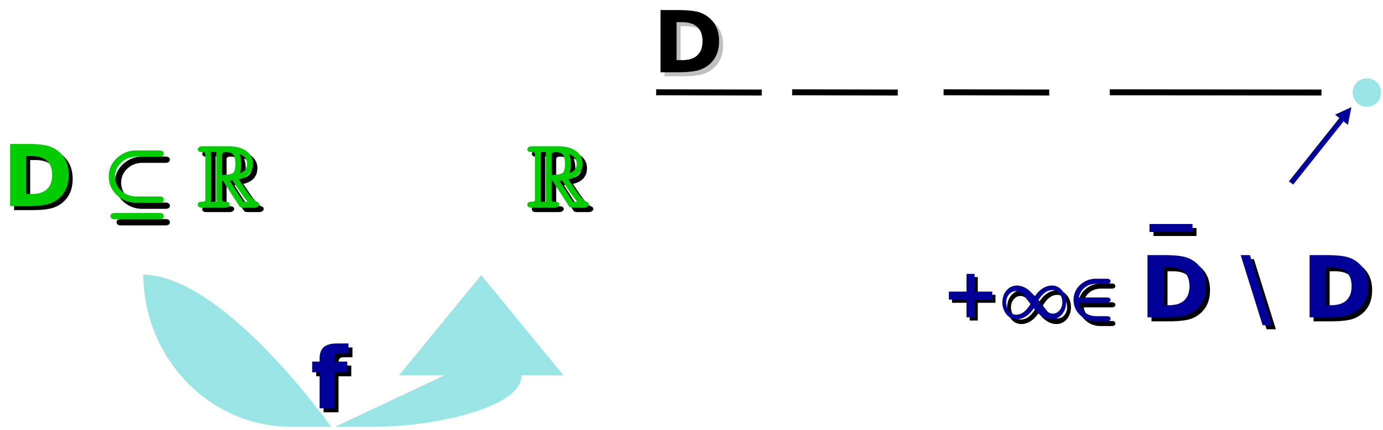
il existe η >0 , tel que :

(x appartient à D et |x-a| $<$ η)

$\Longrightarrow$ f(x) $<$ - A

Limite d'une fonction en un point de ℝ ou de la droite réelle achevée

Cas 4



<u>f tend vers ℓ</u> lorsque x tend vers plus l'infini si et seulement si, pour <u>toute</u> suite $(x_n)_n$ de points de D

$\lim (x_n)_n = +\infty$ ⇒ $\lim (f(x_n))_n = \ell$

f admet une limite <u>finie</u> $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$

Pour tout $\varepsilon > 0$,

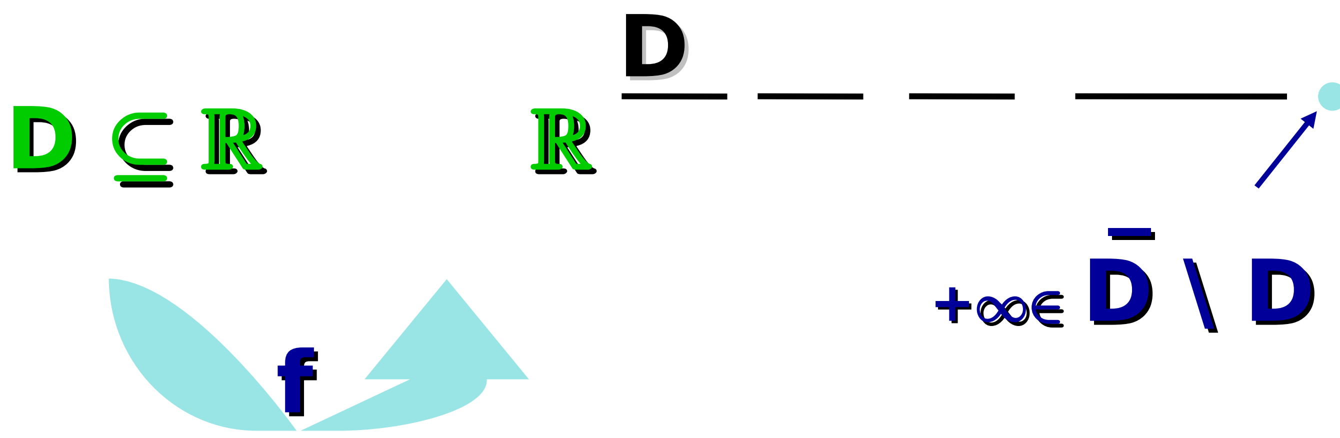
il existe B >0 , tel que :

(x appartient à D et x > B)

$\Longrightarrow$ **$|f(x) - \ell| < \varepsilon$**

Limite d’une fonction en un point de $\mathbb{R}$ ou de la droite réelle achevée

Cas 5



<u>f tend vers +∞</u> lorsque x tend vers +∞ si et seulement si, pour <u>toute</u> suite $(x_n)_n$ de points de D

$$\lim (x_n)_n = +\infty \Longrightarrow \lim (f(x_n))_n = +\infty$$

f tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞

Pour tout A >0,

il existe B >0 , tel que :

(x appartient à D et x > B)

⟹ f(x) > A

f tend vers -∞ lorsque x tend vers -∞

Pour tout A >0,

il existe B >0 , tel que :

(x appartient à D et x > B)

$\Longrightarrow$ f(x) < - A

Composition des limites (1)

$$\lim_a (g \circ f) = L$$

$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad$ $E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(D) \subseteq E$

$a \in \bar{D}$

$\lim_a f = \ell \in \bar{E}$ $\qquad$ $\lim_\ell g = L \in \bar{\mathbb{R}}$

Composition des limites (2)

$\lim_a (g \text{ o } f) = L$

$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad$ $E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(D) \subseteq E$

$a \in \overline{D}$

$\lim_a f = +\infty \in \overline{E}$ $\qquad$ $\lim_{+\infty} g = L \in \overline{R}$

Composition des limites (3)

$\lim_a (g \circ f) = L$

$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad$ $E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(D) \subseteq E$

$+\infty \in \bar{D} \setminus D$

$\lim_{+\infty} f = +\infty \in \bar{E}$

$\lim_{+\infty} g = L \in \bar{R}$

Attention aux formes indéterminées !

$x^2 - x$?

$(\log x)/x = (1/x) \times \log x$?

quand x tend vers + l'infini

$\text{Lim}\ (a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p) =$

$+\infty$ si $a_0 > 0$

$-\infty$ si $a_0 < 0$

Attention aux formes indéterminées !

$P(x)/Q(x)$?

$\boxed{(P(x))^{1/k}} - \boxed{Q(x)}$, k dans N*, en + ∞ ?

$$(a_0\, x^p + a_1\, x^{p-1} + \ldots + a_p)^{1/k} =$$

$$a_0^{1/k}\, x^{p/k}\ (1 + (a_1/a_0)\, x^{-1} + \ldots)^{1/k}$$

$$b_0\, x^q + b_1\, x^{q-1} + \ldots + b_q =$$

$$b_0\, x^q\, (1 + (b_1/b_0)x^{-1} + \ldots)$$

Rappel de règles concernant les limites de suites

$$(x_n \longrightarrow 0) \wedge (\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, a \leq y_n \leq b) \implies (x_n y_n \longrightarrow 0)$$

$$(x_n \longrightarrow +\infty) \implies (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_+)$$

$$(x_n \longrightarrow -\infty) \implies (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_-)$$

$$(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \geq a) \implies x_n + y_n \longrightarrow +\infty$$

$$(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \leq b) \implies x_n + y_n \longrightarrow -\infty$$

$$(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) \implies x_n y_n \longrightarrow +\infty$$

$$(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) \implies x_n y_n \longrightarrow -\infty$$

$$(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) \implies x_n y_n \longrightarrow -\infty$$

$$(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) \implies x_n y_n \longrightarrow +\infty$$

Limite à droite en un point a

- a est adhérent à

  $V_a^+ := \{x \text{ dans } D \, ; \, x > a\}$

- La restriction de f à V_a^+ admet pour limite ℓ au point a

Limite à gauche en un point a

- a est adhérent à
  $V_a^- := \{x \text{ dans } D \, ; \, x < a\}$
- La restriction de f à V_a^- admet pour limite ℓ au point a

« Une fonction monotone (c’est-à-dire croissante ou décroissante) sur un intervalle ouvert*]a,b[*(borné ou non) admet une limite à gauche et à droite en tout point   de*]a,b[*»

Fonction continue en un point (rappel)

- **$f : D \dashrightarrow \mathbb{R}$**
- **x_0 point de D**
- **$\lim_{x0} f$ existe dans $\mathbb{R}$ (et vaut nécessairement $f(x_0)$)**

Continuité <u>à droite</u> (si existence de la limite à droite, égale à $f(x_0)$)

Continuité <u>à gauche</u> (si existence de la limite à gauche, égale à $f(x_0)$)

Fonctions continues sur un segment [a,b]

I. Une fonction f <u>***continue sur un segment [a,b]***</u> ***(c'est-à-dire en tout point de ce segment) et à valeurs réelles est à la fois*** <u>***minorée***</u> ***et*** <u>***majorée***</u> ***sur*** **[a,b].**

II. Les deux bornes $\inf_{[a,b]} f$ ***et*** $\sup_{[a,b]} f$ ***sont atteintes par f en des points de*** **[a,b]**

Théorème des valeurs intermédiaires

Une fonction f <u>continue sur un segment [a,b]</u> (c'est-à-dire en tout point de ce segment) prend (sur ce segment) au moins une fois toute <u>valeur intermédiaire</u> y du segment $[\inf_{[a,b]} f \, , \, \sup_{[a,b]} f]$ ***.***

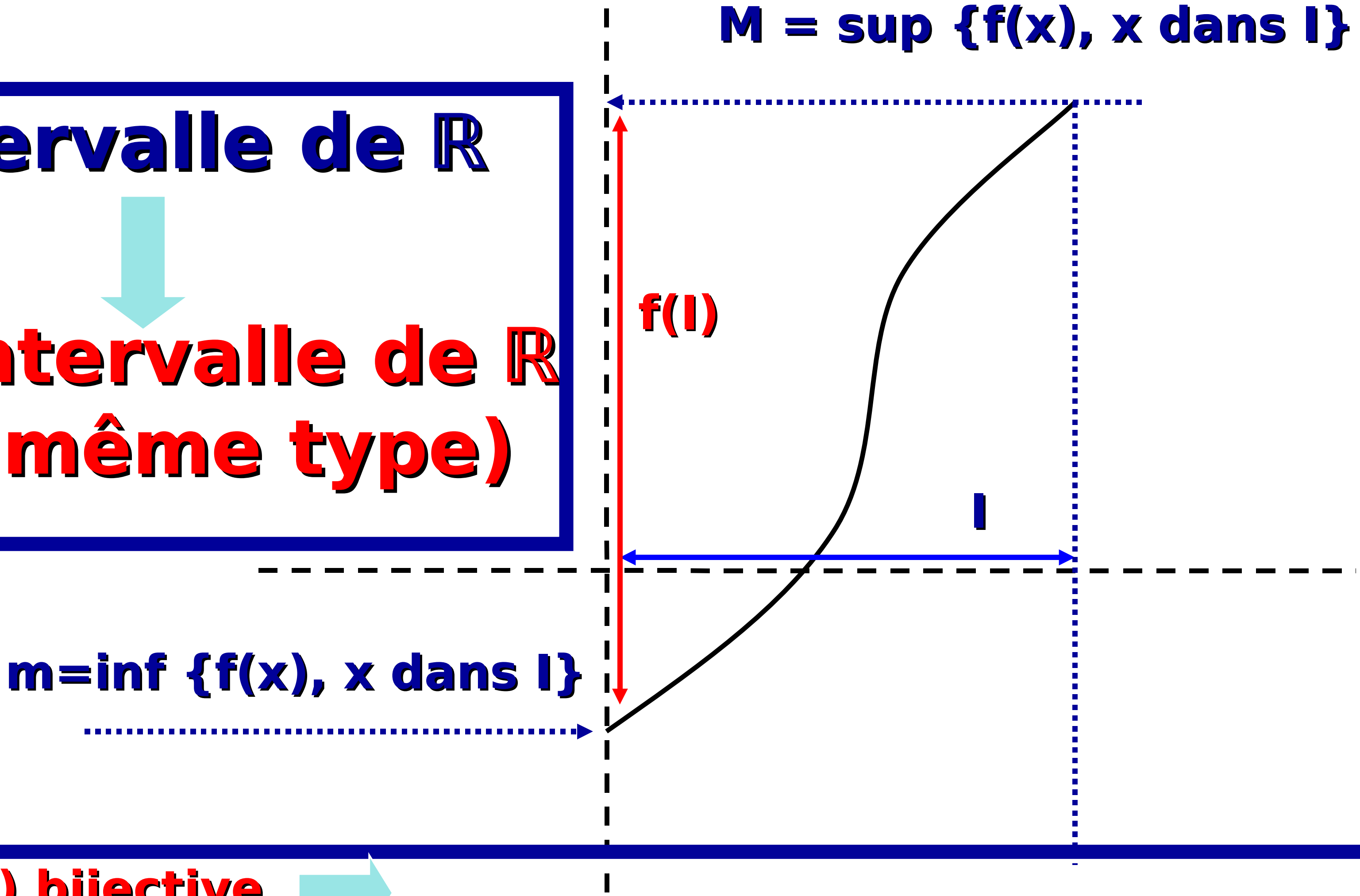
Preuve par l'absurde !

Fonctions strictement monotones et continues sur un intervalle (1)

I intervalle de ℝ

⇓

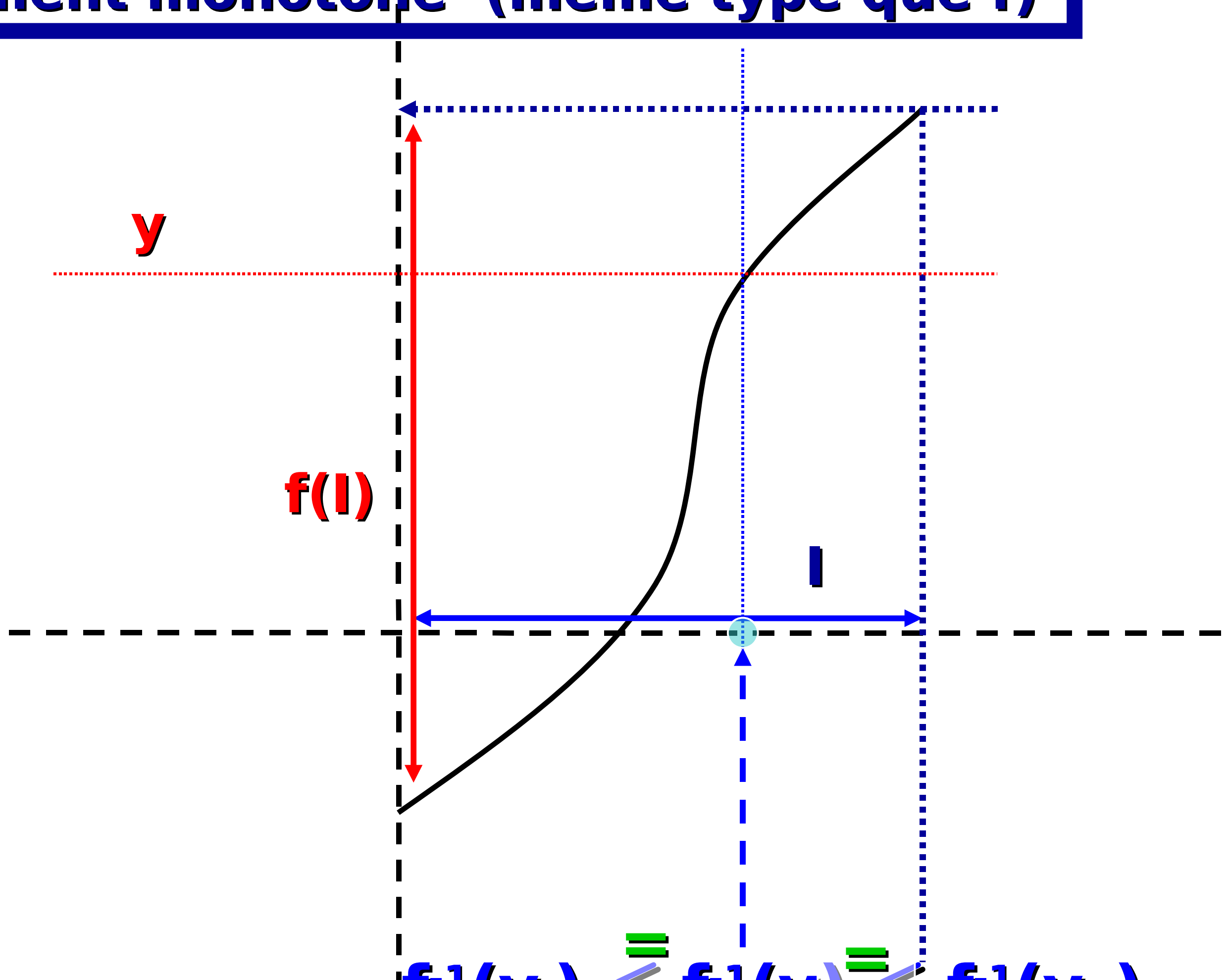
f(I) intervalle de ℝ
(du même type)



f : I → f(I) bijective ⇒
f admet une application inverse f^{-1} : f(I) → I

Fonctions strictement monotones sur un intervalle (2)

f^{-1} strictement monotone (même type que f)



$$f^{-1}(y_-) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_+)$$

f continue

$\Downarrow$

f^{-1} continue

Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

$$f : I \rightarrow J=f(I)$$

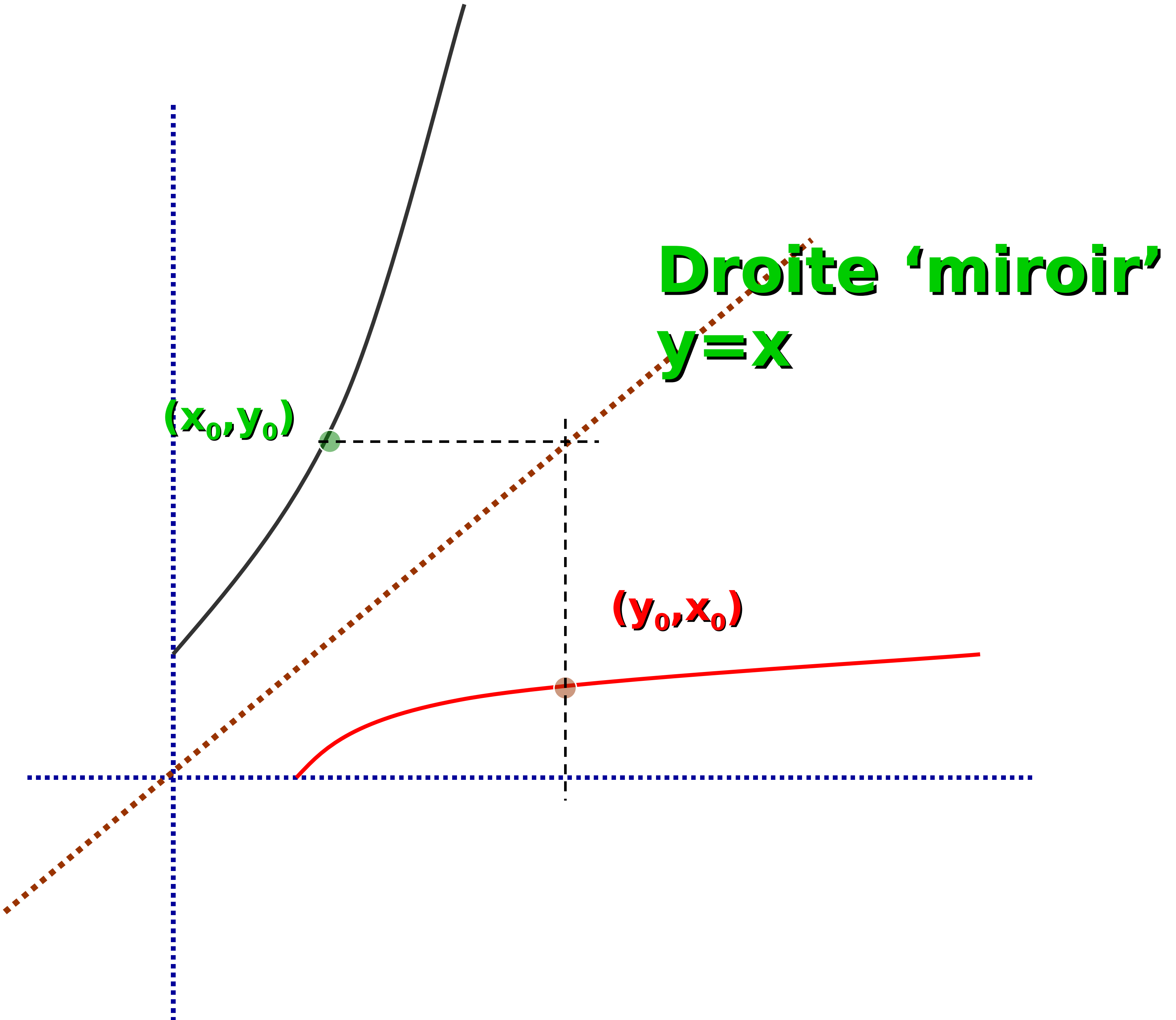
$$\left[(x \in I) \text{ et } (y=f(x))\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[(y \in J) \text{ et } (x=f^{-1}(y))\right]$$

$$\mathrm{Graphe}\,(f) = \left\{(x,y)\in I \times J \;;\; y=f(x)\right\}$$

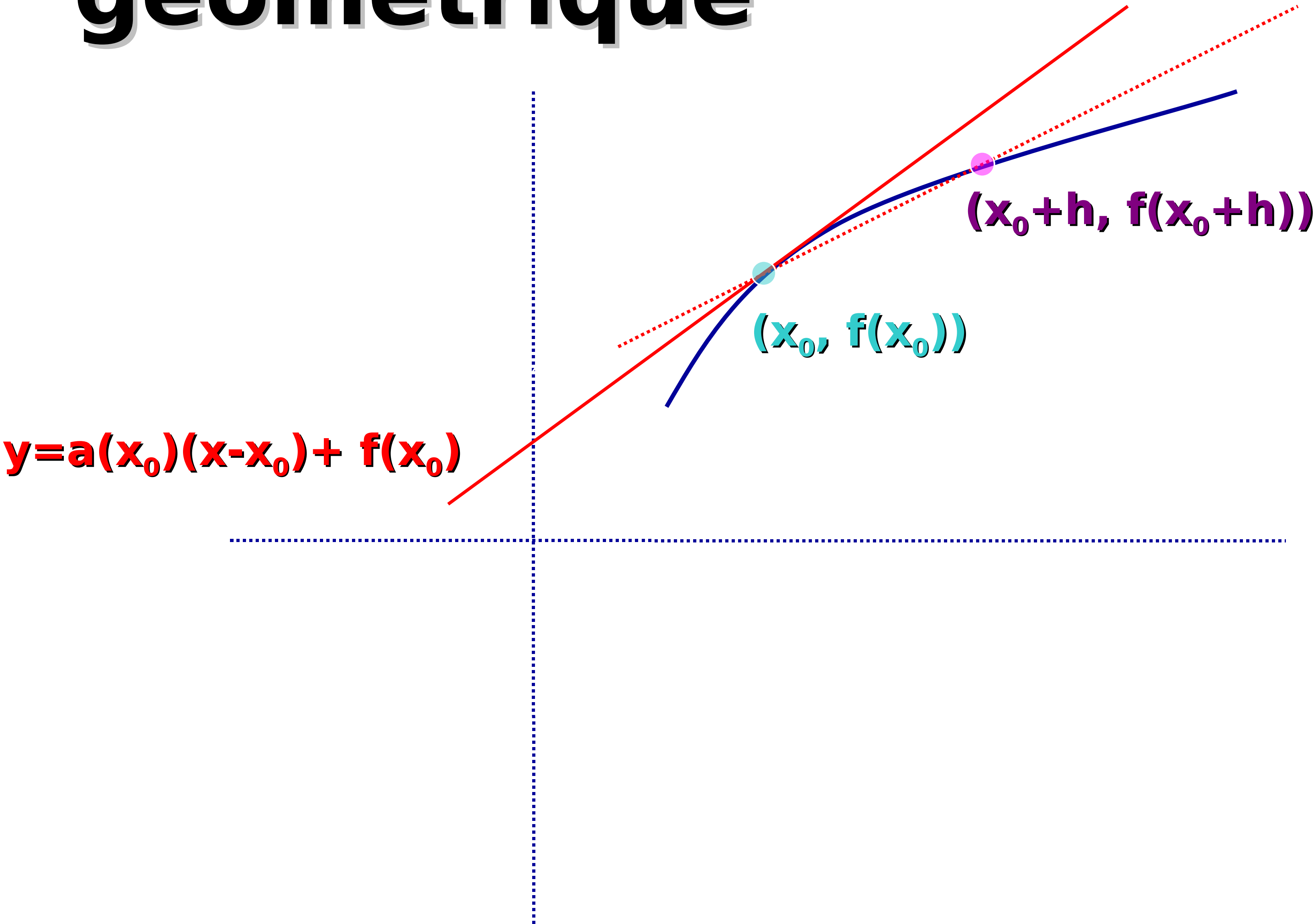
$$\mathrm{Graphe}\,(f^{-1}) = \left\{(y,x)\in J \times I \;;\; y=f(x)\right\}$$


Droite 'miroir'
y=x
(x_0,y_0)
(y_0,x_0)

Dérivabilité en un point et sur un intervalle

- **f définie dans un intervalle <u>ouvert</u> contenant un point donné x_0**
- $f(x_0+h) = \boxed{f(x_0) + a(x_0)\, h} + \boxed{h\, \varepsilon(h)}$ **pour tout h de valeur absolue assez petite**
- ε **défini sur un intervalle** $]-\eta,\eta[$ **(privé de 0) et** $\lim_0 \varepsilon = 0$

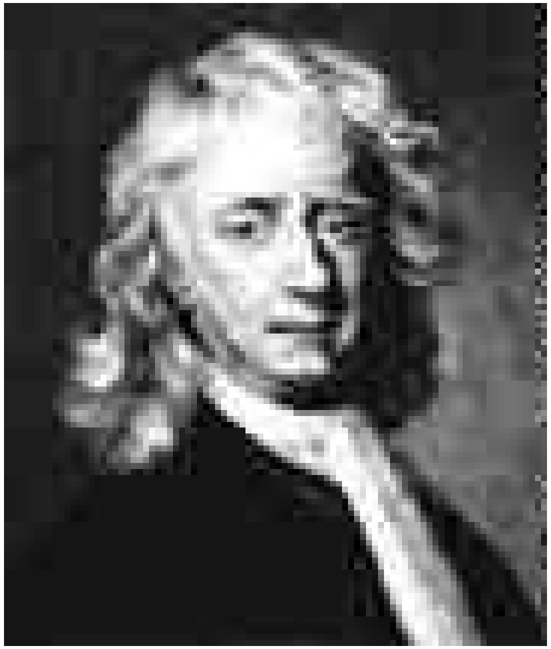
Interprétation géométrique



Dérivabilité en un point

$\Downarrow$

Continuité en ce point



I. Newton
(1643-1727)

Opérations sur les fonctions dérivables

f et g dérivables en x_0

$f+g$ dérivable en x_0 , $(f+g)'(x_0)= f'(x_0)+g'(x_0)$

fg dérivable en x_0 , $(fg)'(x_0)= f'(x_0)\, g(x_0)+g'(x_0)\, f(x_0)$

Dérivabilité de $x \rightarrow x^n$

$n > 0$

$$(x_0+h)^n = x_0^n + \boxed{n\, x_0^{n-1}}\, h + o(h)$$

$n > 0$ et x_0 non nul

$$(x_0+h)^{-n} = x_0^{-n} \boxed{-\, n\, x_0^{-n-1}}\, h + o(h)$$

Règle de Leibniz

G.W. von Leibniz
(1646-1716)

f définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0

g définie au voisinage de $f(x_0)$ et dérivable en $f(x_0)$

$g \circ f$ dérivable en x_0 car :

$(g \circ f)'(x_0)$

$$(g \circ f)\,(x_0+h) = g\,(f(x_0+h))$$

$$= g\,(f(x_0) + h\,f'(x_0) + o(h))$$

$$= g(f(x_0)) + h\,\boxed{g'(f(x_0)) \times f'(x_0)} + o(h)$$

Opérations sur les fonctions dérivables

f et g dérivables en x_0 et $g(x_0)$ non nul

f/g dérivable en x_0 et

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

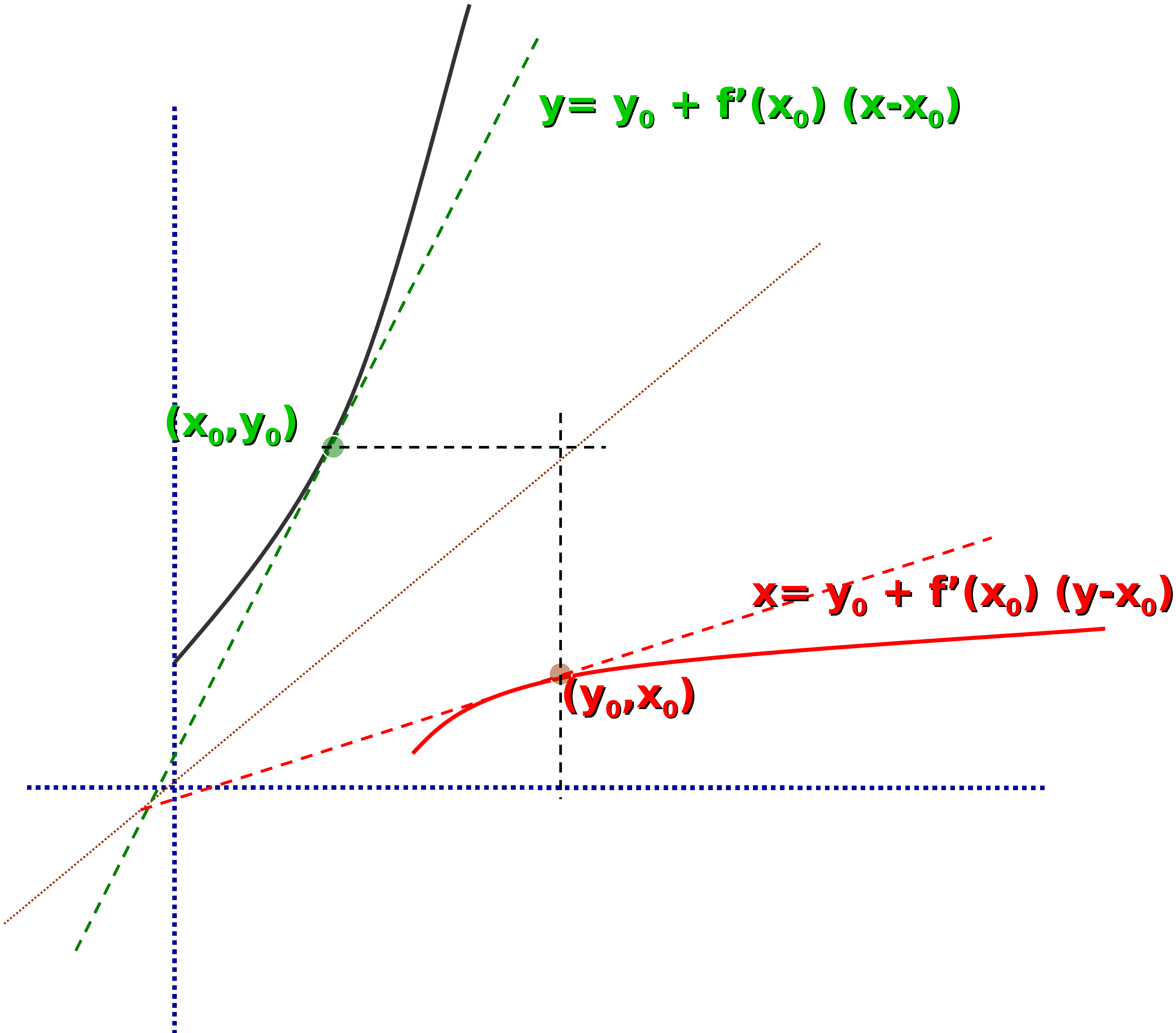
Dérivabilité de la fonction inverse

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle ouvert I de R, dérivable sur I

On suppose f’ non nulle sur I (f’>0 ou f’< 0)

$f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est dérivable sur f(I)

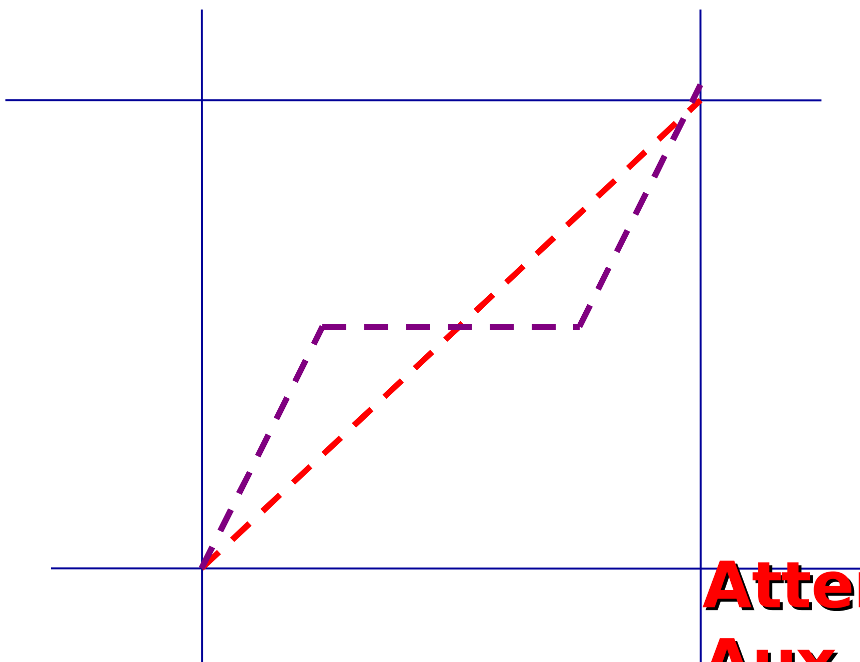
$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$



$y = y_0 + f'(x_0)\,(x - x_0)$
(x_0, y_0)
$x = y_0 + f'(x_0)\,(y - x_0)$
(y_0, x_0)

Remarque : un énoncé admis

Une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , de dérivée <u>identiquement nulle sur I</u> , est constante sur I.



Attention cependant
Aux escaliers du diable !

Maximum local en un point

Une fonction (à valeurs réelles) f définie dans un intervalle ouvert I contenant un point x_0 admet un maximum local en x_0

$$\Updownarrow$$

Il existe $\epsilon>0$ tel que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$ et que, pour tout x dans $[x_0 - \epsilon , x_0 + \epsilon]$,

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Minimum local en un point

Une fonction (à valeurs réelles) f définie dans un intervalle ouvert I contenant un point x_0 admet un minimum local en x_0

$$\Updownarrow$$

Il existe $\epsilon>0$ tel que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$ et que, pour tout x dans $[x_0 - \epsilon , x_0 + \epsilon]$,

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Extréma locaux et dérivabilité

Si une fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, admet un extrémum local (maximum ou minimum) en un point x_0 de I, alors :

$$f'(x_0) = 0$$

Mais la réciproque est fausse !!

Dérivées successives

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dérivable en tout point de I assez voisin d'un point x_0 de I donné

et que de plus f' est dérivable en x_0

On dit que f est deux fois dérivable en x_0 et on pose $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

Dérivées successives (suite)

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est $\boxed{\text{deux fois}}$ dérivable en tout point de I assez voisin d'un point x_0 de I donné

et que de plus f'' est dérivable en x_0

On dit que f est <u>trois</u> fois dérivable en x_0 et on pose $f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$

Dérivées successives (suite)

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est $\boxed{n}$ fois dérivable en tout point de I assez voisin d'un point x_0 de I donné

et que de plus la fonction dérivée n-ème $f^{(n)}$ est dérivable en x_0

On dit que f est <u>n+1</u> fois dérivable en x_0 et on pose $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$

Fonctions de classe C^{∞} sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

Une fonction admettant des dérivées à tout ordre en tout point d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite de classe C^{∞} sur I .

Fin du chapitre 6