CHAPITRE 5

Suites réelles

Qu’est ce qu’une suite de nombres réels ?

$(u_n)_n$

Application de N dans $\mathbb{R}$

$$n \longmapsto u_n$$

Ne pas confondre la suite $(u_n)_n$ avec l’ensemble $\{u_n\ ;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ des valeurs de la suite !

Suites de nombres réels et convergence

$u_n = u(n)$

$$u_n = m_n + 0,\ d_{n,1}\ d_{n,2}\ d_{n,3}\ d_{n,4} \ldots\ d_{n,p} \ldots$$

$$\ell = m + 0,\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4 \ldots\ d_p \ldots$$

La suite de nombres réels $(u_n)_n$ converge vers le nombre réel ℓ si et seulement si :

1. La suite d'entiers relatifs $(m_n)_n$ finit par «stationner» pour n assez grand à l'entier relatif m

2. Pour tout entier positif p, la suite de chiffres $(d_{n,p})_n$ finit par « stationner » pour n assez grand à l'entier d_p

Quantifier la notion de convergence :

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels converge vers un nombre réel ℓ si et seulement si :

Pour tout ε positif,

il existe $N(\varepsilon)$ dans N ,

tel que :

$$n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Propriétés des suites convergentes

- **Toute suite convergente est bornée (c'est-à-dire : l'ensemble des termes de la suite est minoré et majoré)**
- **Toute suite extraite d'une suite convergente est aussi convergente et a même limite que la suite initiale donnée**
- **Toute suite convergeant vers un nombre réel ℓ >0 est minorée au-delà d'un certain cran n_0 par $\ell/2$ >0.**

Une propriété essentielle des suites monotones de nombres réels

- **Toute suite $(u_n)_n$ de nombres réels croissante (au sens de l'ordre) et majorée est convergente (vers la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite)**
- **Toute suite $(v_n)_n$ de nombres réels décroissante (au sens de l'ordre) et minorée est convergente (vers la borne inférieure de l'ensemble des termes de la suite)**

Suites adjacentes et lemme « des gendarmes »

Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de nombres réels telles que :

1. Pour tout n dans N, les nombres $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$ sont rangés dans cet ordre (croissant)
2. La suite $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0

Les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites <u>adjacentes</u>

<u>Lemme des gendarmes :</u> *« deux suites de nombres réels adjacentes sont <u>toutes deux convergentes</u> vers un <u>même</u> nombre réel »*

Suites « pincées » et lemme « des gendarmes » bis

Soient trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ $(w_n)_n$ de nombres réels telles que :

1. Pour tout n dans N, les nombres $u_n \leq v_n \leq w_n$ sont rangés dans cet ordre (croissant)
4. Les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ

La suite « pincée » $(v_n)_n$ converge alors aussi vers ℓ

Limites et opérations

- $\lim (u_n) = \ell$ et $\lim (v_n) = \ell'$ ⇒ $\lim (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim (u_n) = \ell$ et $\lim (v_n) = \ell'$ ⇒ $\lim (u_n v_n) = \ell \ell'$
- $\lim (u_n) = \ell$ et $\ell \neq 0$ ⇒ $\lim (1/u_n) = 1/\ell$ *
- $\lim (u_n) = \ell$ ⇒ $\lim (|u_n|) = |\ell|$

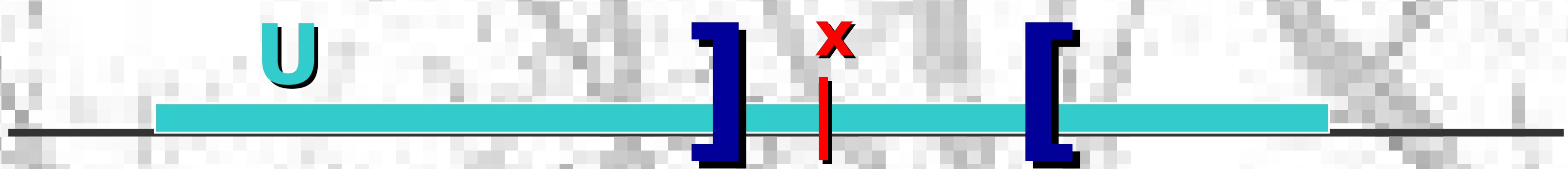
(*) u_n est forcément non nul pour n assez grand

Sous-ensembles **ouverts**

Un <u>ouvert</u> U de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble <u>voisinage de chacun de ses points</u>, ce qui signifie :

Pour tout x dans U,

il existe un intervalle ouvert borné I_x <u>contenant x et inclus dans U</u>



Sous-ensembles **fermés**

Un sous-ensemble F de ℝ est dit fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Intérieur, adhérence, frontière d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$

L'<u>intérieur</u> $\overset{\circ}{E}$ d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est <u>le plus grand</u> sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ <u>inclus</u> dans E

L'<u>adhérence</u> $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est <u>le plus petit</u> sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ <u>contenant</u> E

<u>Frontière</u> de **E : =** $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$

Caractérisation de l'adhérence

Un point x de ℝ est adhérent à un sous-ensemble E si et seulement si on peut l'atteindre comme limite d'une suite de points de E.

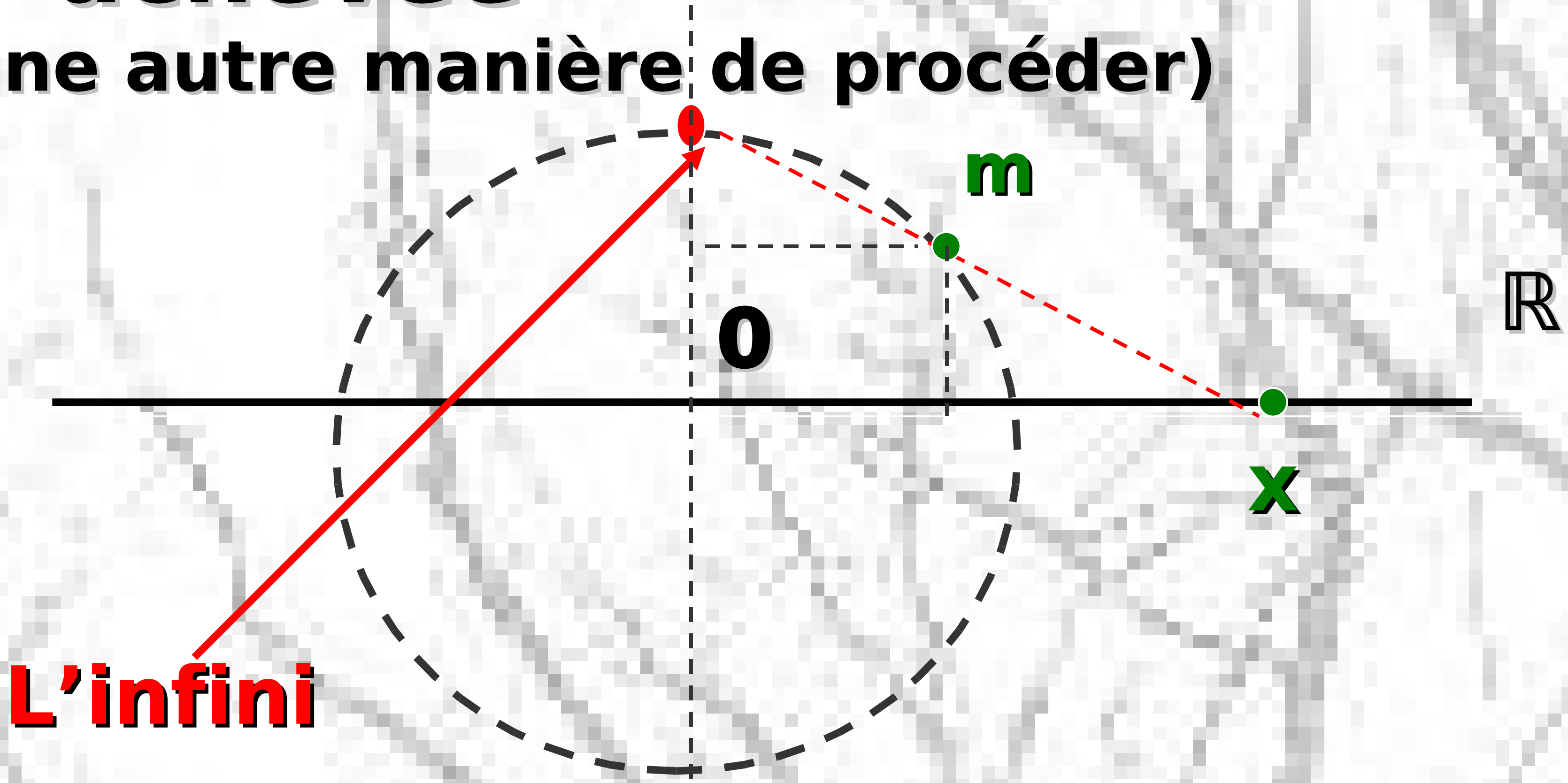
La droite numérique « achevée »

- l’infini (- ∞) **+ l’infini (+∞)**

Adjonction à ℝ de deux éléments

La droite numérique « achevée »

(une autre manière de procéder)



Adjonction à ℝ d'un élément

Retour au premier point de vue (deux points à l'infini)

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels <u>tend vers « +∞ »</u> si et seulement si :

Pour tout A > 0 ,

il existe un entier N=N(A) dans N tel que :

$$n \geq N(A) \Longrightarrow u_n \geq A$$

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels tend vers « - ∞ » si et seulement si :

Pour tout $A > 0$,

il existe un entier $N=N(A)$ dans N tel que :

$$n \geq N(A) \Longrightarrow u_n \leq -A$$

Attention aux formes indéterminées !

$n^2 - n$?

$(\log n)/n = (1/n) \times \log n$?

quand n tend vers + l'infini

$\mathrm{Lim}\ (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p) =$

$+\infty$ si $a_0 > 0$

$-\infty$ si $a_0 < 0$

$$
\begin{aligned}
(x_n \longrightarrow 0) \wedge (\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, a \leq y_n \leq b) \quad &\Longrightarrow \quad (x_n y_n \longrightarrow 0) \\
(x_n \longrightarrow +\infty) \quad &\Longrightarrow \quad (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_+) \\
(x_n \longrightarrow -\infty) \quad &\Longrightarrow \quad (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_-) \\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \geq a) \quad &\Longrightarrow \quad x_n + y_n \longrightarrow +\infty \\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \leq b) \quad &\Longrightarrow \quad x_n + y_n \longrightarrow -\infty \\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) \quad &\Longrightarrow \quad x_n y_n \longrightarrow +\infty \\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) \quad &\Longrightarrow \quad x_n y_n \longrightarrow -\infty \\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) \quad &\Longrightarrow \quad x_n y_n \longrightarrow -\infty \\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) \quad &\Longrightarrow \quad x_n y_n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}
$$

Fin du chapitre 5