CHAPITRE 3

Nombres réels et propriétés de $\mathbb{R}$

Fractions : développements décimaux

le point de vue « concret » (hérité de l'enseignement primaire)

Rationalité → développement décimal périodique

23456 0 | 33567

3315 8 0

0 , 6 9

L’un des 33567 restes possibles !

Développement décimal périodique $\Rightarrow$ rationalité

$x = 12,431\overline{572}$

$1000\,(1000\,x - 12431) = 572,\overline{572}$

$1000\,x - 12431 = 0,\overline{572}$

$1000\,(1000\,x - 12431) - 572 = 1000\,x - 12431$

$x = (999 \times 12431 + 572)/999000$

Fractions : écriture décimale et décimaux

$$x = m + 0,\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \quad d_p \ldots\ldots$$

Partie entière

décimales

$$m + 0,\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \quad d_N \quad \overline{0}$$

nombres décimaux

$$=$$

$$m + 0,\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \quad (d_N\text{-}1) \quad \overline{9}$$

Un « manque » à Q : un ensemble majoré n’a pas nécessairement de plus petit majorant dans Q !

<u>Exemple :</u> l’ensemble des nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur ou égal à 2 !

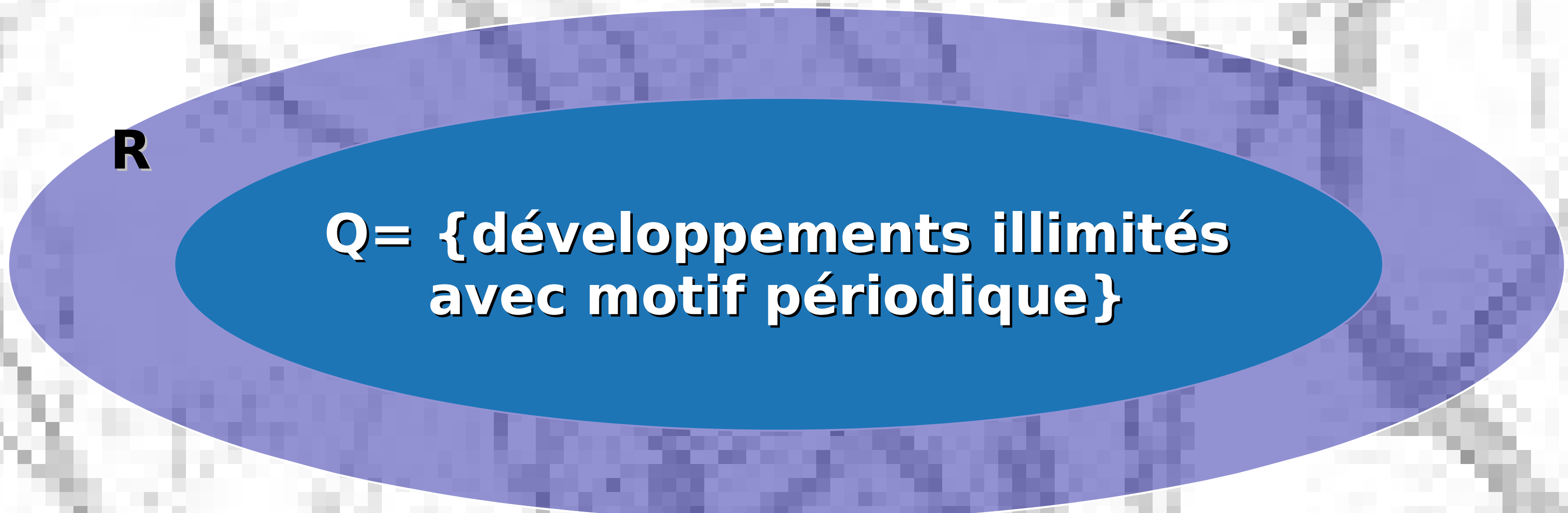
Il faut en connaître une (ou plusieurs) preuves !!

Une approche de l'ensemble des nombres réels : les développements décimaux « illimités »

$$x = m + 0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \quad d_p \ldots\ldots$$

Partie entière

décimales



Un order sur $\mathbb{R}$

$$x = m + 0,\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ \ldots\quad d_p\ \ldots..$$

$$x' = m' + 0,\ d_1'\ d_2'\ d_3'\ d_4'\ \ldots\quad d_p'\ \ldots..$$

x est « inférieur ou égal à x' » si et seulement si m est inférieur ou égal à m' et si la suite $(d_n)_n$ précède la suite $(d'_n)_n$ pour l'ordre lexicographique construit à partir des lettres {0,…,9}

Suites de nombres réels et convergence

$x_n = x(n)$

$$x_n = m_n + 0,\ d_{n,1}\ d_{n,2}\ d_{n,3}\ d_{n,4} \dots \quad d_{n,p} \dots$$

$$x = m + 0,\ d_1\ \ d_2\ \ d_3\ \ d_4 \dots \quad d_p \dots$$

La suite de nombres réels $(x_n)_n$ converge vers le nombre réel x si et seulement si :

1. La suite d'entiers relatifs $(m_n)_n$ finit par « stationner » pour n assez grand à l'entier relatif m
2. Pour tout entier positif p, la suite de chiffres $(d_{n,p})_n$ finit par « stationner » pour n assez grand à l'entier d_p

Une propriété essentielle des suites <u>monotones</u> de nombres réels

- Toute suite $(x_n)_n$ de nombres réels <u>croissante</u> (au sens de l’ordre) et <u>majorée</u> est **convergente**
- Toute suite $(y_n)_n$ de nombres réels <u>décroissante</u> (au sens de l’ordre) et <u>minorée</u> est **convergente**

Les opérations sur $\mathbb{R}$

$$x \quad + \quad y \quad = \quad \boxed{x+y}$$

$$x_n \quad + \quad y_n \quad = \quad z_n \qquad \text{(décimaux)}$$

$$x \quad \times \quad y \quad = \quad \boxed{xy}?$$

$$x \quad \times \quad y_p \quad = \quad \boxed{u_p}?$$

$$x_n \quad \times \quad y_p \quad = \quad u_{p,n} \qquad \text{(décimaux)}$$

Ordre et opérations

- **Compatibilité des deux opérations avec l’ordre**
- **$\mathbb{R}$ est archimédien : étant donnés deux nombres réels x et y avec x >0, il existe un entier N tel que N x > y**

($\mathbb{R}$,+) groupe abélien

+

Propriétés des opérations

- **Commutativité**
  x+y=y+x
- **Associativité**
  x+(y+z)= (x+y) +z
- **Elément neutre 0 :**
  x+0 = 0 + x = x
- **Tout élément x admet un « opposé » -x**
  x+ (-x) = (-x) + x = 0

($\mathbb{R}$,+, x) corps commutatif

x

- **Commutativité**
  x x y=y x x
- **Associativité**
  x x (y x z)= (x x y) x z
- **Elément unité 1:**
  x x 1 = 1 x x = x
- **Tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication :**
  x y = y x = 1

Distributivité mult/addition

x x (y+z) = (x x y) + (x x z)

Suites adjacentes et **lemme « des gendarmes »**

Soient deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de nombres réels telles que :

1. **Pour tout n dans N, les nombres $x_n, x_{n+1}, y_{n+1}, y_n$ sont rangés dans cet ordre (croissant)**
2. **La suite $(y_n-x_n)_n$ converge vers 0**

Les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont dites <u>adjacentes</u>

<u>Lemme des gendarmes :</u> ***« deux suites de nombres réels adjacentes sont <u>toutes deux convergentes</u> vers un <u>même</u> nombre réel »***

Un exemple d'application : à la recherche des décimales de π

- $u_n = 4\ (1 - 1/3 + 1/5 + \dots + 1/(4n-3) - 1/(4n-1))$
- $v_n = u_n + 4\ /(4n+1)$ [deux suites adjacentes !]

ou par la formule de John Machin (1680-1752)

$\mathbb{R}$ vérifie la « propriété de la borne supérieure »

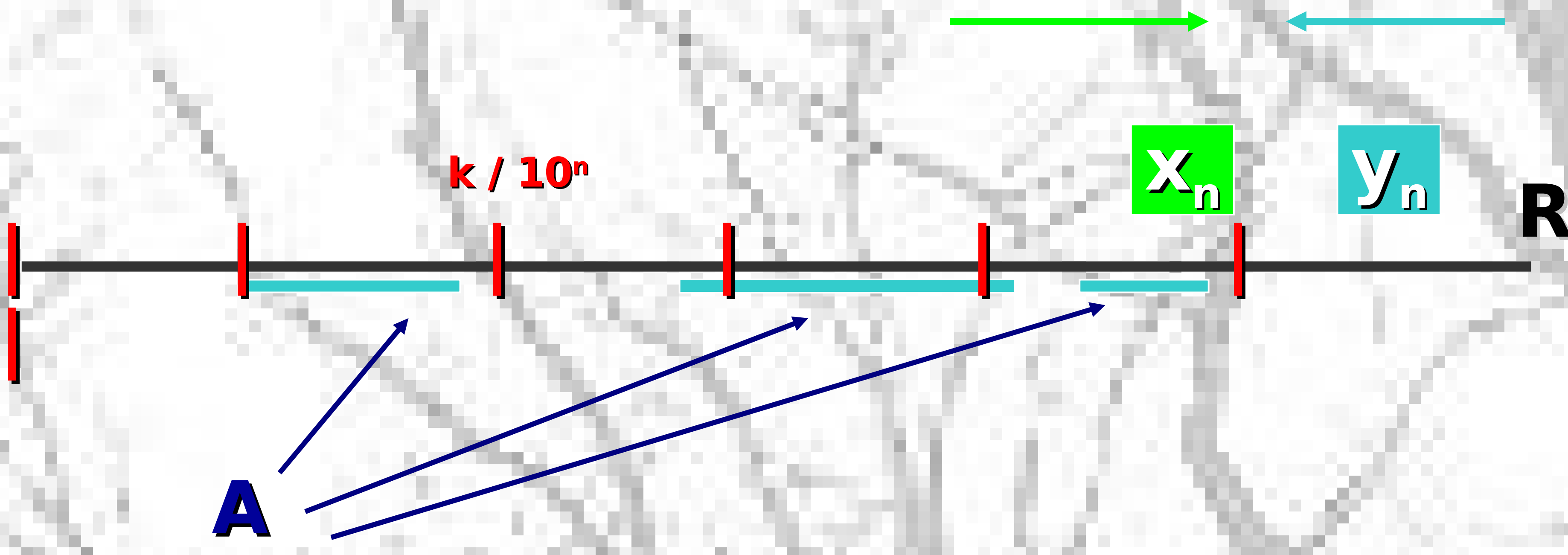
Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$; l'ensemble des majorants de A admet dans $\mathbb{R}$ un plus petit élément (noté sup(A)).
Cet élément est appelé <u>borne supérieure de l'ensemble A</u>

<u>Caractérisation de sup (A) (deux clauses)</u>

1. C'est un majorant de A

2. Si y< sup(A), il existe toujours au moins un point x de A avec y<x et x inférieur ou égal à sup (A)

Une esquisse de preuve *via* le « lemme des gendarmes »



$\sup(A) = \lim (x_n) = \lim (y_n)$

Idem en ce qui concerne la « propriété de la borne inférieure »

Soit A un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$; l'ensemble des minorants de A admet dans $\mathbb{R}$ un plus grand élément (noté inf(A)).

Cet élément est appelé borne inférieure de A

Caractérisation de inf (A) (deux clauses)

1. **C'est un minorant de A**
2. **Si y > inf (A), il existe toujours au moins un point x de A avec x<y et x supérieur ou égal à inf (A)**

La valeur absolue

$$|x| := \sup(\{ x , -x \})$$

- $|x\,y| = |x|\;|y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire, volet de droite)
- $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$ (inégalité triangulaire, volet de gauche)

Intervalles (bornés) de $\mathbb{R}$

- Intervalles **ouverts** :
  $]a,b[= \{x \; ; \; a<x<b\}$
- Intervalles **fermés** :
  $[a,b] = \{x \; ; \; a \leq x \leq b\}$
  (on dit aussi « **segments** »)
- Intervalles **semi-ouverts** (2 types) :
  $[a,b[= \{x \; ; \; a \leq x < b\}$
  $]a,b] = \{x \; ; \; a < x \leq b\}$

Intervalles (non bornés) de $\mathbb{R}$

- **Intervalles <u>ouverts</u> : 3 types**

  $\{x\ ;\ x < b\}$, $\{x\ ;\ x > a\}$, $\mathbb{R}$

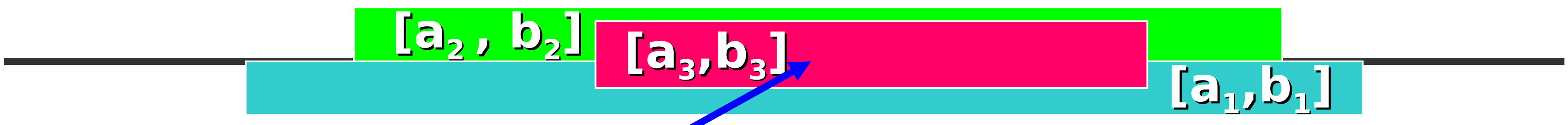
- **Intervalles <u>fermés</u> : 3 types**

  $\{x\ ;\ x \leq b\}$, $\{x\ ;\ x \geqq a\}$, $\mathbb{R}$

Intérieur, adhérence

- **intérieur (I) :**
  $I \setminus \{\text{bornes (sup et inf)}\} = \mathring{I}$
- **adhérence (I) :**
  $I \cup \{\text{bornes (sup et inf)}\} = \bar{I}$

ℝ vérifie le principe des « segments emboîtés »



x

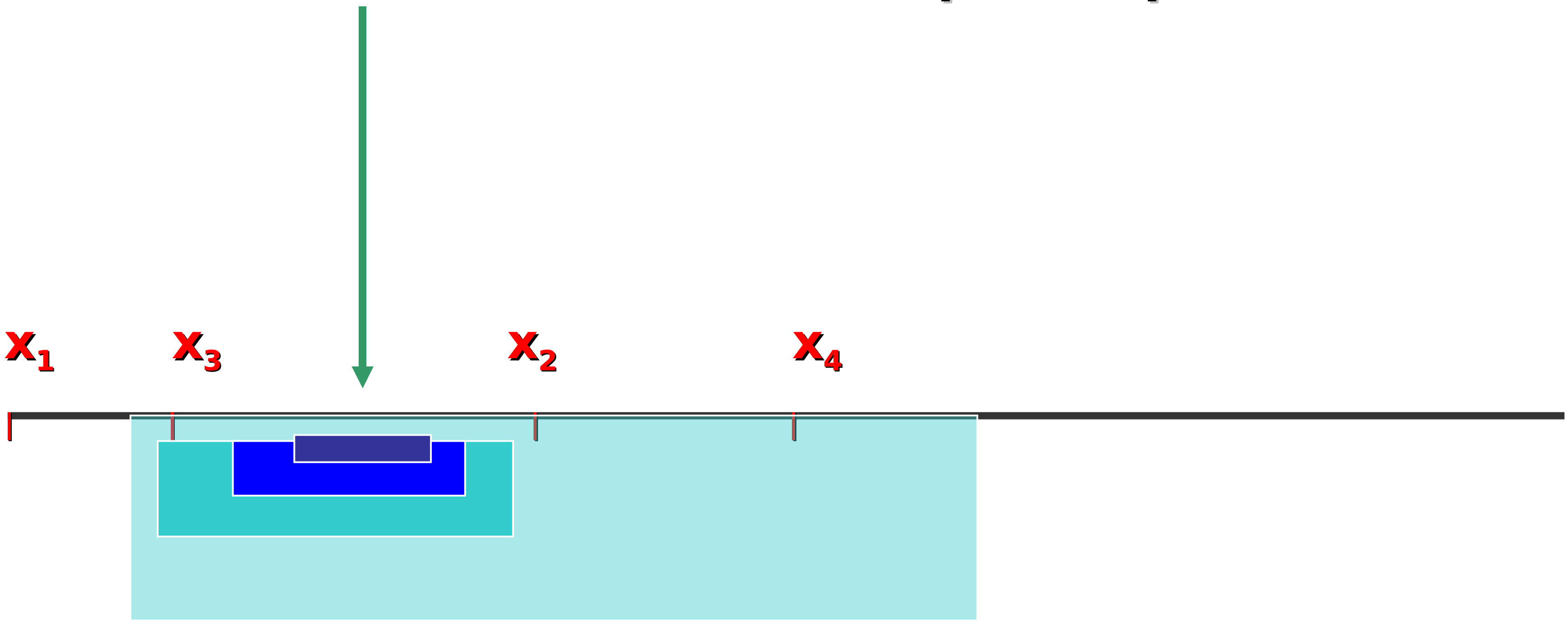
Si ($([a_n ,b_n])_n$ est une suite de segments <u>emboîtés</u> les uns dans les autres (au sens où $[a_{n+1} ,b_{n+1}]$ est inclus dans $[a_n ,b_n]$ pour tout n) , il existe nécessairement au moins un point dans <u>tous</u> les segments $[a_n ,b_n]$.

Une application du principe des segments emboîtés :

la **non-dénombrabilité** de R

$x \neq x_1, x_2, \ldots$

(preuve par l'absurde)

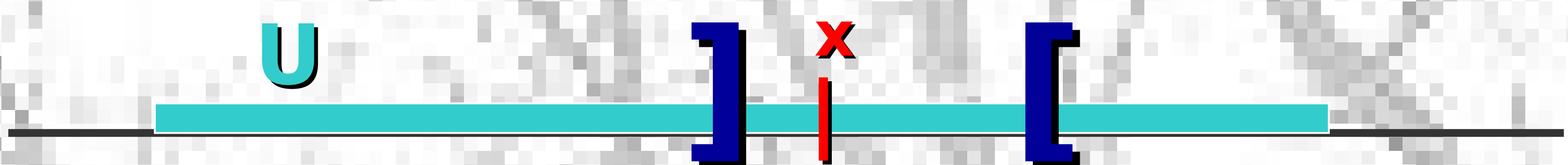


Sous-ensembles ouverts

Un <u>ouvert</u> U de R est un sous-ensemble
<u>voisinage de chacun de ses points,</u>
ce qui signifie :

Pour tout x dans U,

il existe un intervalle ouvert borné
I_x <u>contenant x et inclus dans U</u>



Sous-ensembles fermés

Un sous-ensemble F de R est dit fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Intérieur, adhérence, frontière d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$

L'<u>intérieur</u> $\overset{\circ}{E}$ d'un sous-ensemble E de R est <u>le plus grand</u> sous-ensemble ouvert de R <u>inclus</u> dans E

L'<u>adhérence</u> $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de R est <u>le plus petit</u> sous-ensemble fermé de R <u>contenant</u> E

***<u>Frontière</u> de* E : $= \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$**

Caractérisation de l'**adhérence**

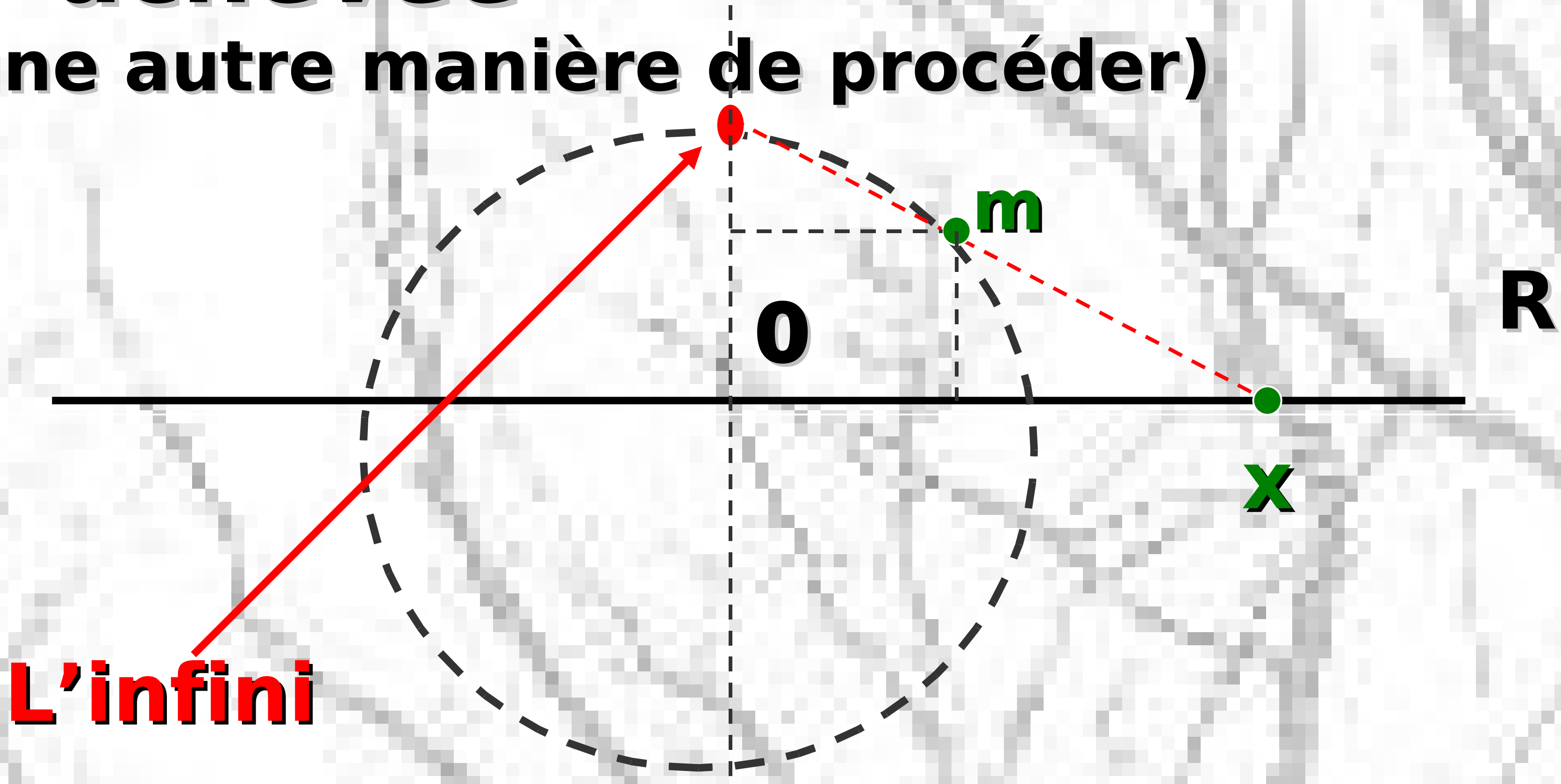
Un point x de R est adhérent à un sous-ensemble E si et seulement si on peut l'atteindre comme limite d'une suite de points de E.

La droite numérique
« achevée »

Adjonction à ℝ de deux éléments

La droite numérique « achevée »

(une autre manière de procéder)



Adjonction à ℝ d'un élément

Fin du chapitre 3