MATHEMATIQUES DE BASE

Cours MIS101

2007-2008

Semestre d’Automne

LES REFERENCES DU COURS

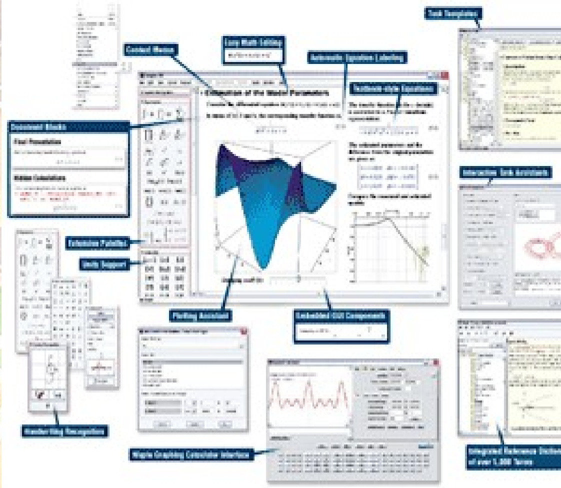
Notes de cours 2006-2007 sur le site :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf

Autres documents sur le site :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/notes_de_cours.html

Des annales 2004/2005 (DS – Textes d’examen + corrigés)
et 2005-2006, 2006-2007 (Textes d’examen + corrigés) sont aussi consultables en ligne sur le site ci-dessus



Et encore, pour ceux que passionne l'histoire des idées, des concepts et de leurs inventeurs ...

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history

On utilisera aussi pour l'illustration du cours des logiciels de calcul formel (MAPLE 10, Mathematica 5) ou de calcul scientifique (MATLAB 7 , scilab 3)

MAPLE 10 en libre service à l'espace alpha !

Quelques postes équipés du logiciel MATLAB !

MATLAB 7.1.lnk

Pourquoi les mathématiques ?

http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/smf-smai_explo-maths.pdf

Pour entrevoir quelques exemples illustrant le rôle essentiel des mathématiques là où on ne le soupçonne pas toujours !

LE PLAN DU COURS :
TROIS PARTIES, 10 chapitres

I. Bases de logique*, théorie des ensembles (chap 1)

II. Nombres entiers, rationnels, réels et complexes ; suites de réels (chap. 2-5)

III. Fonctions numériques et modélisation (intégration,équations différentielles,...) (chap 6-10)

(*) traitées et illustrées en méthodologie mais rappelées ici

DS 1   Samedi 20 Octobre (8h30-10h00)

DS 2   Samedi 24 Novembre (10h30-12h00)

+ trois DM

Distribués semaines 40 , 45 , 48

I. Bases de logique et théorie des ensembles (chapitre 1)

- Opérations logiques (fait aussi en méthodologie)
- Apprendre à raisonner : par contraposition
- Apprendre à raisonner : par l'absurde
- Compter, calculer, ordonner, raisonner par récurrence
- Ensembles et parties d'un ensemble ; quantificateurs
- Axiomatique de la théorie des ensembles
- Produit de deux ensembles
- Union et intersection de familles de parties
- Notion d'application
- Dénombrement, éléments de combinatoire

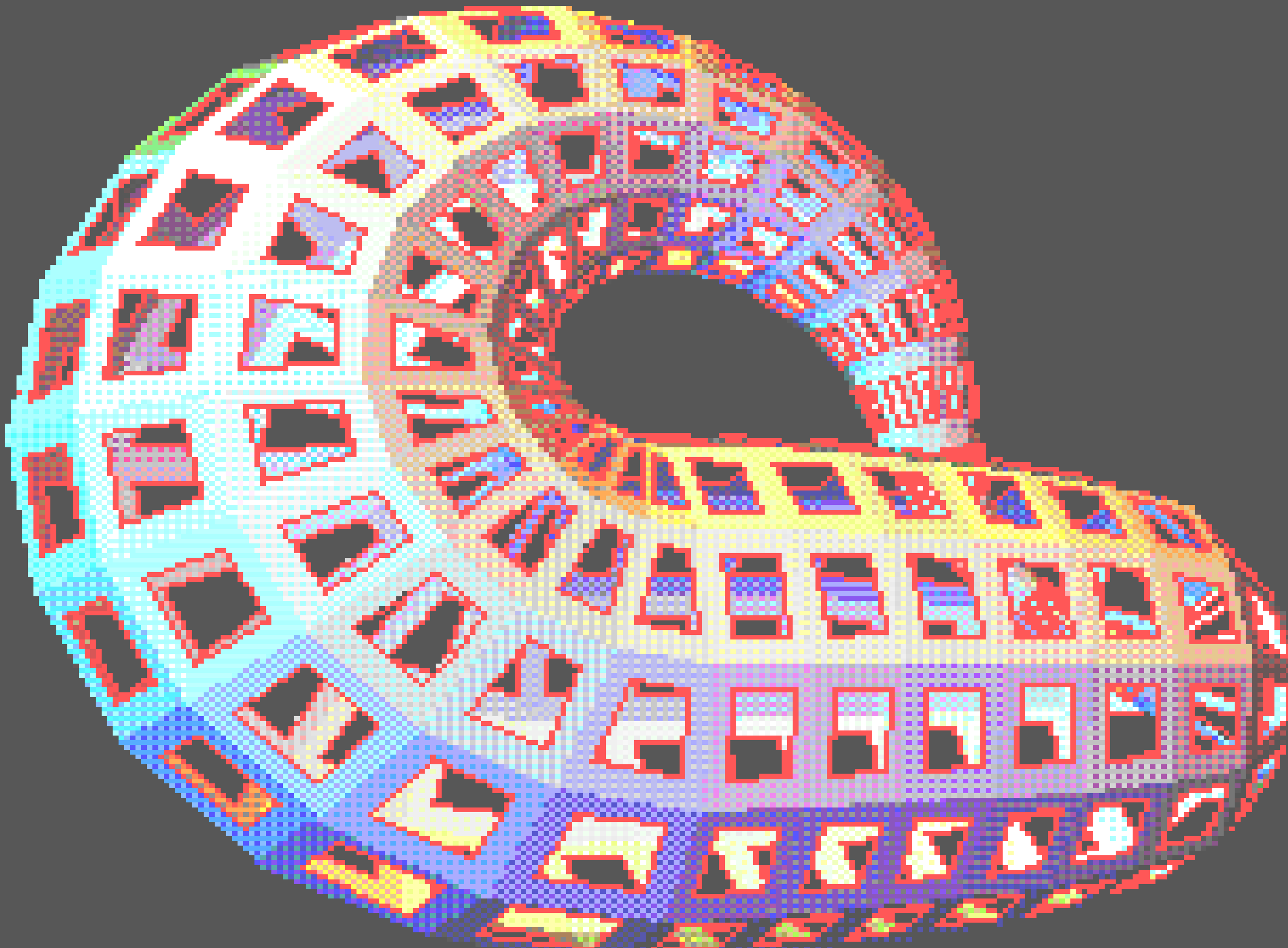
Opérations logiques

- Objets, assertions, relations
- Vrai et Faux
- Quelques opérations entre assertions
- Règles de logique

Objets , assertions, relations

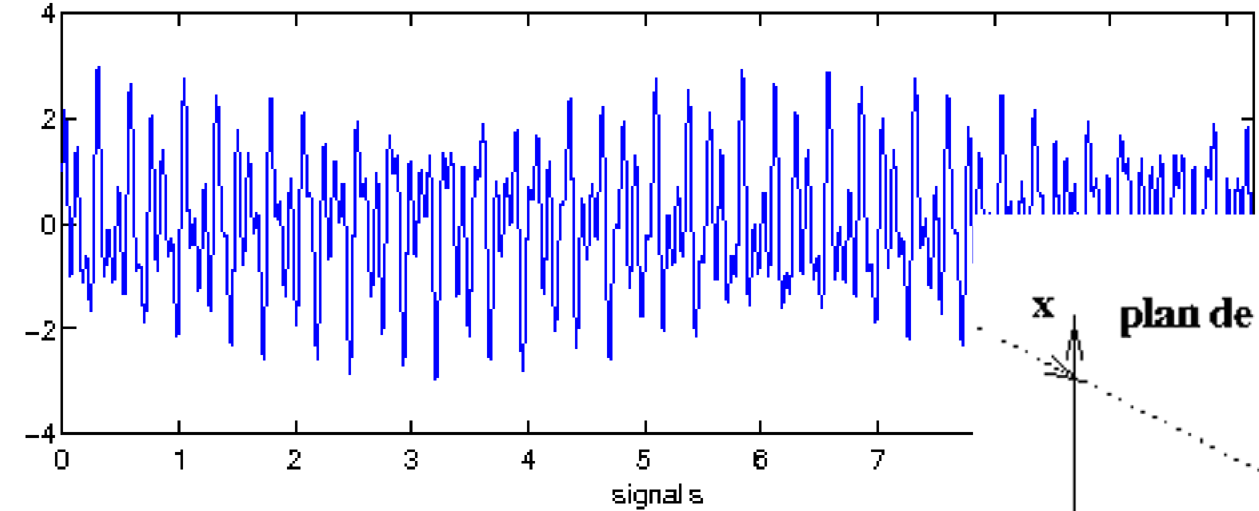
Les nombres (N , Z , Q , R , C , …)

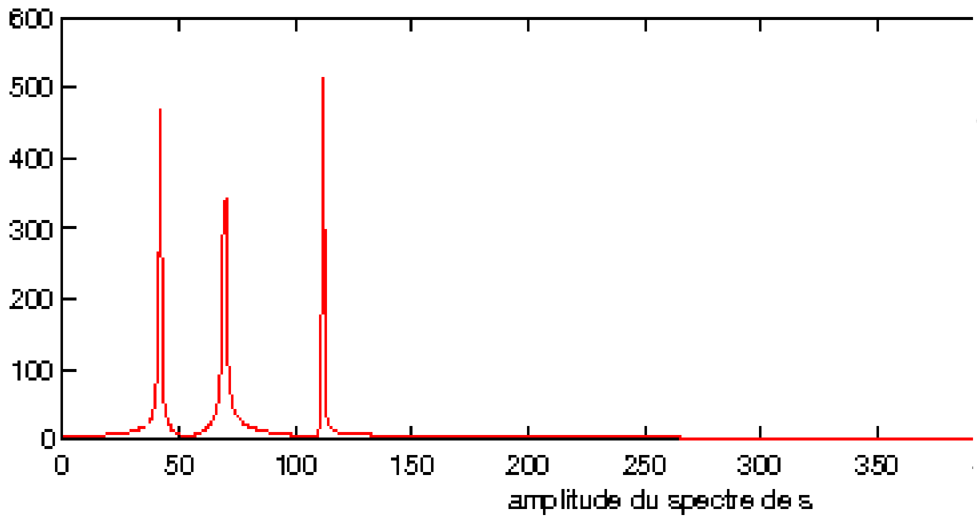
Objets, assertions, relations

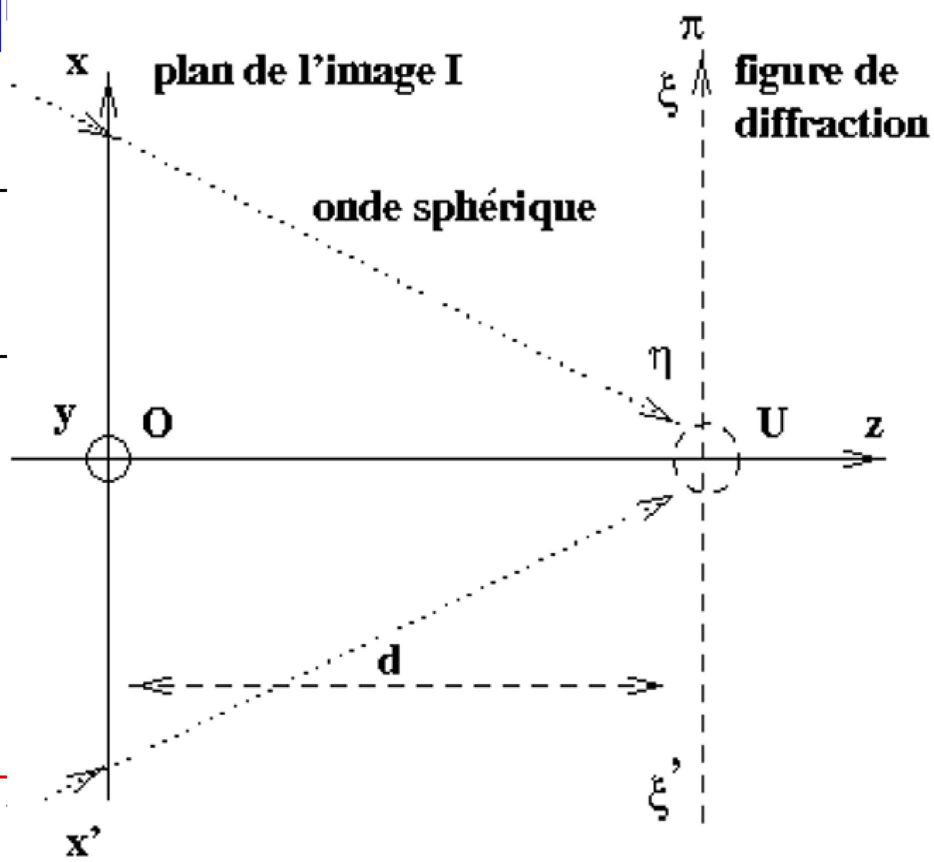


Les objets géométriques

Objets , assertions, relations







Les transformations physiques
(exemple : la diffraction = transformation de Fourier)

Objets , <u>assertions (propositions), relations</u>

VRAI

FAUX

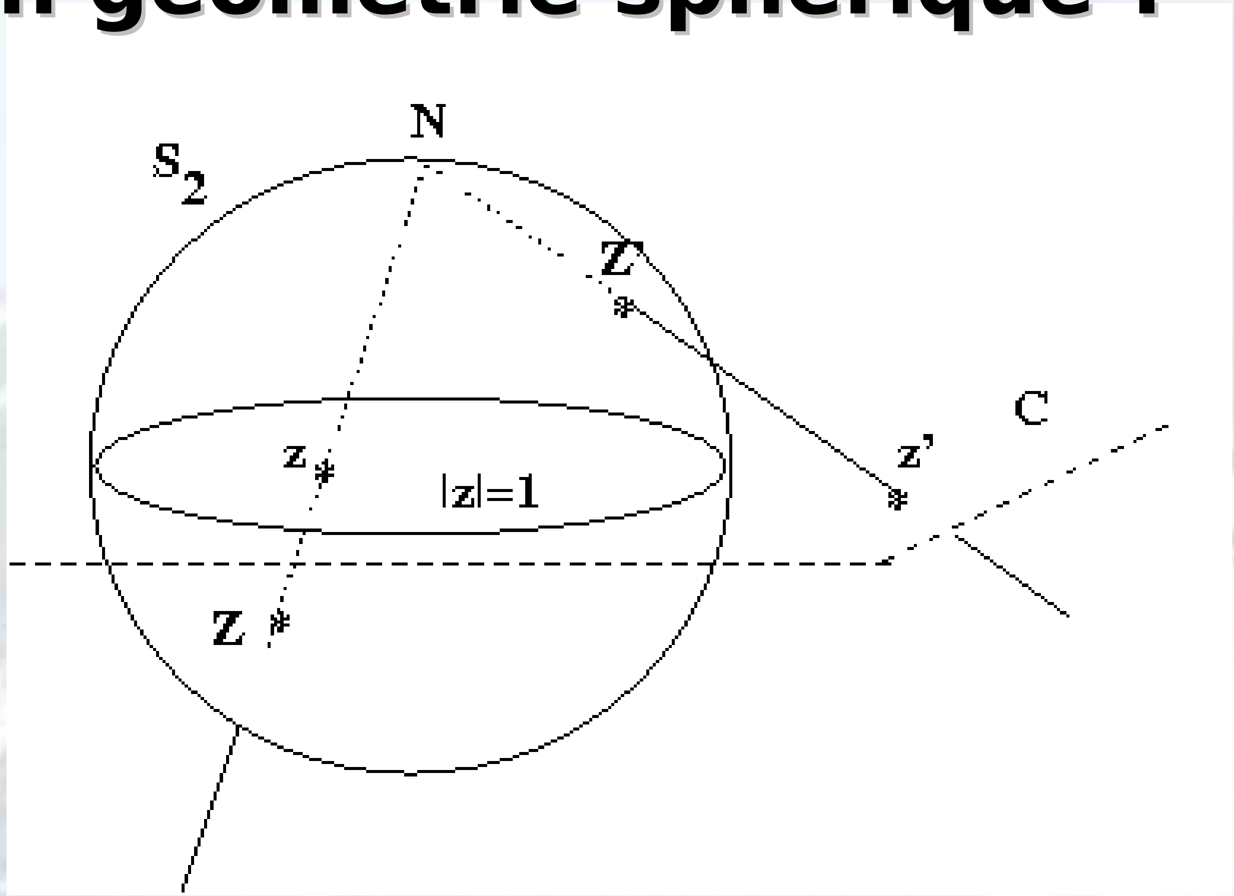
Les <u>axiomes</u> : la règle du jeu

« Et si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces deux droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits »

Euclide d'Alexandrie (environ 325-265 avant J.C)

Euclide
Les éléments

Quid en géométrie sphérique ?



Droite du plan = cercle sur le globe passant par le pôle Nord !

Etablir grâce à un jeu d'axiomes qu'une assertion est VRAIE

- **C'est prouver un théorème …**
- **ou prouver un lemme …**
- **ou prouver un corollaire …**

Quelques opérations entre propositions

La disjonction : R **ou** S

V

R	S	R ou S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

V

La conjonction : R et S

∧

R	S	R <u>et</u> S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

∧

L’implication : R **implique** S

R	S	R implique S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L’équivalence : R équivaut à S

R	S	R équivaut à S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La négation : non R

┐

R	non R
0	1
1	0

┐

Règles de logique (exemples)

$$
\begin{array}{rcl}
(R \vee R) & \Longrightarrow & R \\
R & \Longrightarrow & R \\
R & \vee & (\mathrm{non}\, R) \\
R & \Longleftrightarrow & (\mathrm{non}\, (\mathrm{non}\, R)) \\
R & \Longrightarrow & (R \vee S) \\
(S \vee S) & \Longrightarrow & (S \vee R) \\
(R \vee S) & \Longrightarrow & (S \vee R) \\
(R \wedge S) & \Longrightarrow & (S \wedge R) \\
(R \vee S) & \Longleftrightarrow & (S \vee R) \\
(R \wedge S) & \Longleftrightarrow & (S \wedge R) \\
(R \Longrightarrow S) & \Longrightarrow & \Big((R \vee T) \Longrightarrow (S \vee T)\Big)
\end{array}
$$

LA REGLE DE CONTRAPOSITION

$[R \longrightarrow S] \Longleftrightarrow [(\text{non } S) \longrightarrow (\text{non } R)]$

La règle de transitivité

$$[(R \Rightarrow S)\ \text{VRAIE}] \text{ et } [(S \Rightarrow T)\ \text{VRAIE}]$$

$$\Downarrow$$

$$[(R \Rightarrow T)\ \text{VRAIE}]$$

Apprendre à raisonner :
Le principe de contraposition

$[R \Rightarrow S] \Leftrightarrow [(\text{non } S) \Rightarrow (\text{non } R)]$

Apprendre à raisonner : Le principe du **raisonnement par l’absurde**

BUT : montrer que R est VRAIE

PRINCIPE :
2. on suppose R fausse
3. on exhibe (*via* notre système d’axiomes) une certaine assertion S
4. on montre que (R fausse+ axiomes) implique [S est VRAIE]
5. on montre que (R fausse+ axiomes) implique [S est FAUSSE]

CONCLUSION : R est VRAIE

Compter, calculer, ordonner

Raisonner par récurrence (ou induction)

BUT : montrer que R {n} est VRAIE à tout cran n

PRINCIPE :

2. on montre que **R{0} est VRAIE**
3. on montre : **([R {n} VRAIE] implique [R {n+1} VRAIE])** à tout cran n

CONCLUSION : R {n} est VRAIE à tout cran n

Les deux principes de récurrence

Données : une proposition R {n} où figure le caractère « n » et un nombre entier n_0 fixé

PRINCIPE 1 L'assertion :

$$\Big(R\{n_0\} \text{ et } \big[\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\} \Rightarrow R\{n+1\}\big] \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\Big(\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\}\Big)$$

est une évidence dans l'axiomatique de Peano

PRINCIPE 2 L'assertion :

$$R\{n_0\} \text{ et } [\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0, [R\{k\} \text{ OK pour } k=n_0,\dots,n] \Rightarrow R\{n+1\}]]$$

$$\Downarrow$$

$$\Big(\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\}\Big)$$

est une évidence dans l'axiomatique de Peano

Ensembles et parties d'un ensemble ; quantificateurs

Notion d’ensemble

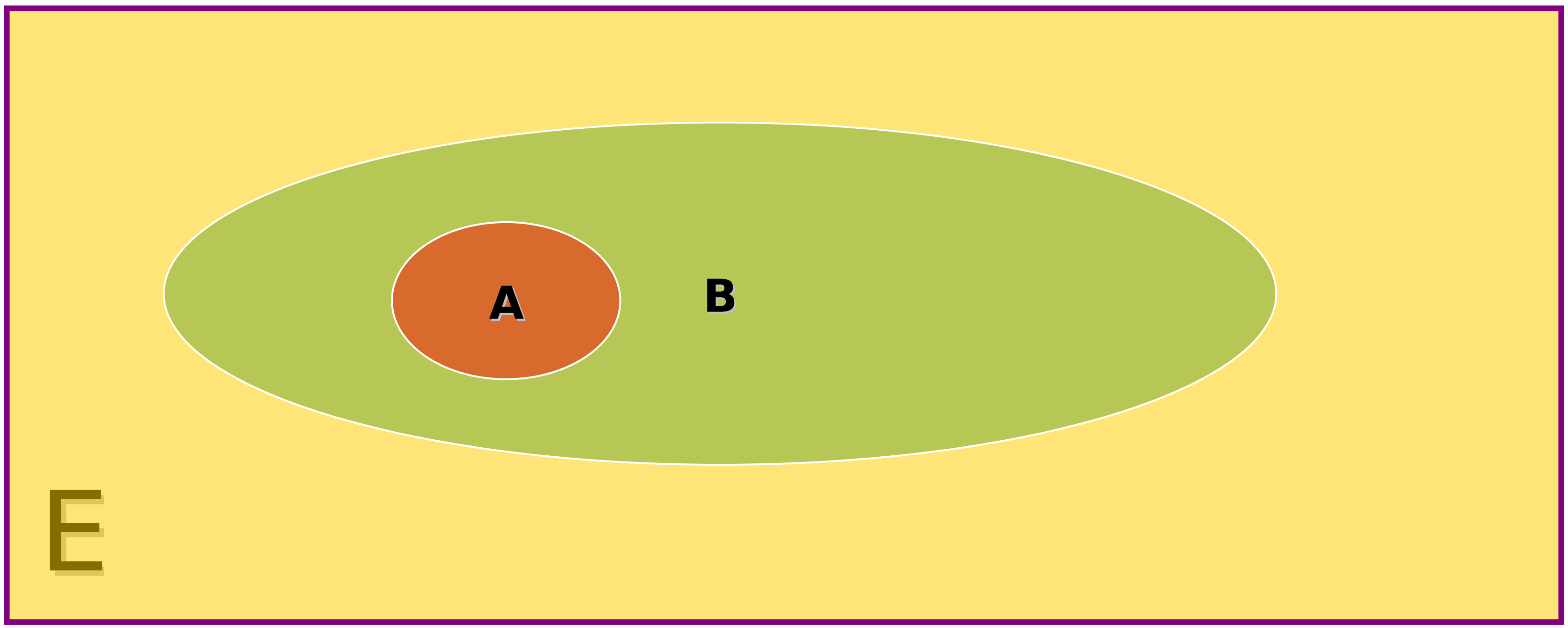
Exemples

Les deux quantificateurs :

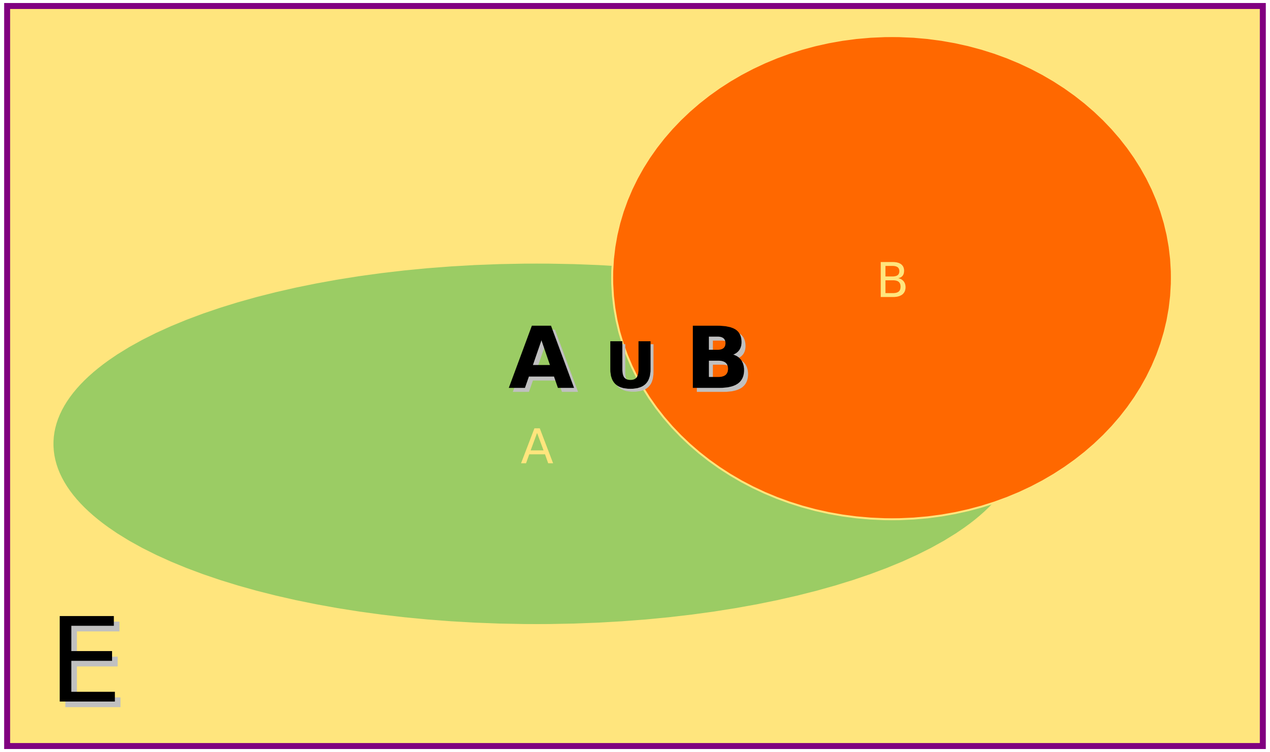
« Quelque soit » « il existe »

Parties d'un ensemble ; l'inclusion

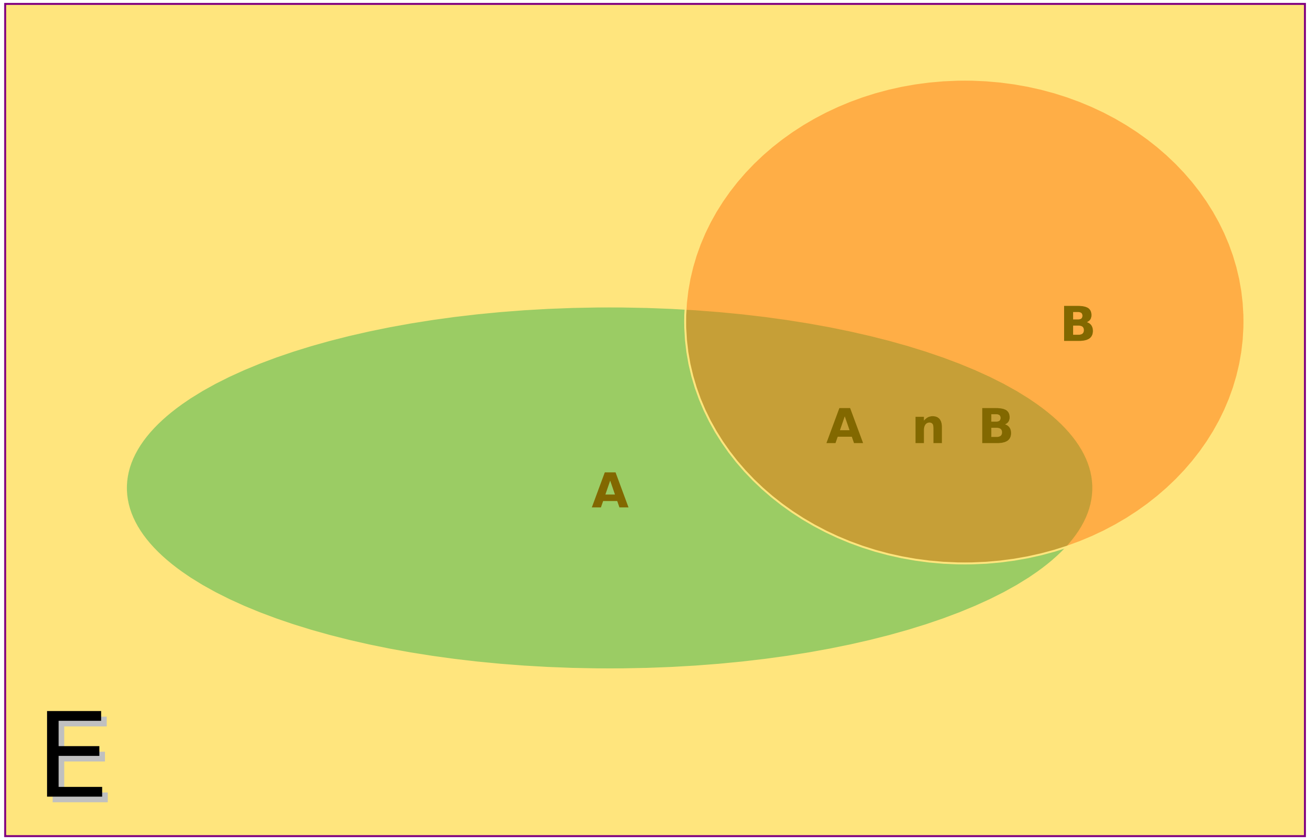
A c B



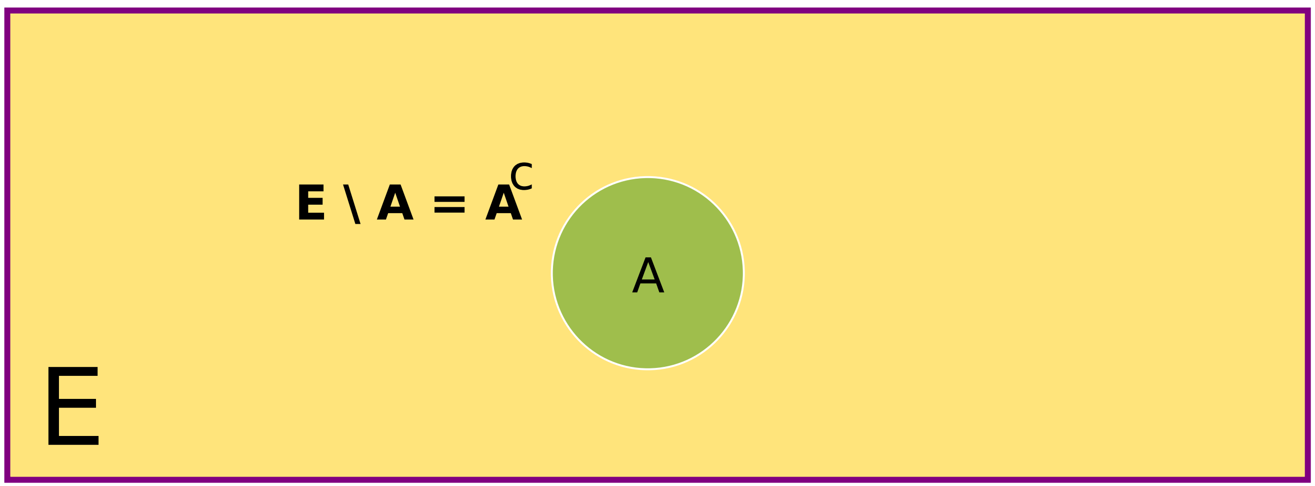
L'union de deux parties A et B d'un ensemble E



L'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E



Le complémentaire de A



Quantificateurs

$$\forall x \in E\,, \forall y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$

$$\forall x \in E\,, \exists y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$

$$\exists x \in E\,, \forall y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$

$$\exists x \in E\,, \exists y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$

$$\forall y \in F\,, \exists x \in E\,, \qquad R\{x, y\}$$

$$\exists y \in F\,, \forall x \in E\,, \qquad R\{x, y\}$$

Règles de logique et quantificateurs

$$\text{non}\Big(\forall x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big)$$
$$\iff \Big(\exists x \in E, \exists y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

$$\text{non}\Big(\forall x \in E, \exists y \in F,\ R\{x,y\}\Big)$$
$$\iff \Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

$$\text{non}\Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big)$$
$$\iff \Big(\forall x \in E, \exists y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

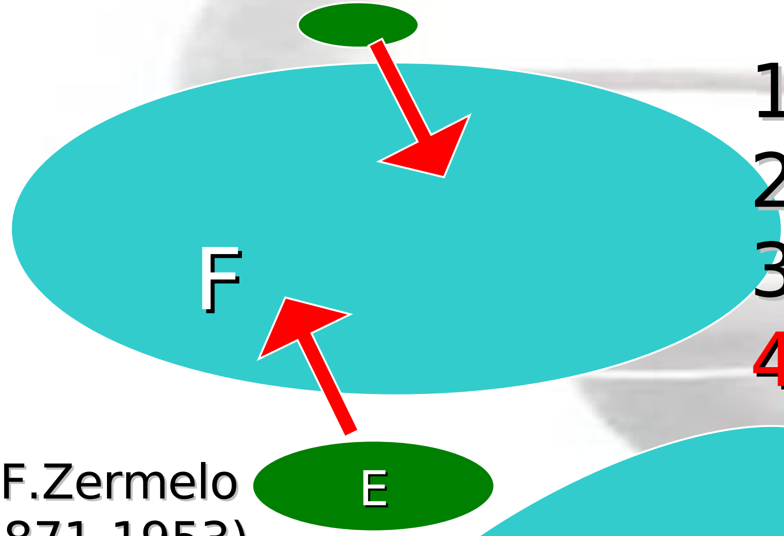
$$\text{non}\Big(\exists x \in E, \exists y \in F,\ R\{x,y\}\Big)$$
$$\iff \Big(\forall x \in E, \forall y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

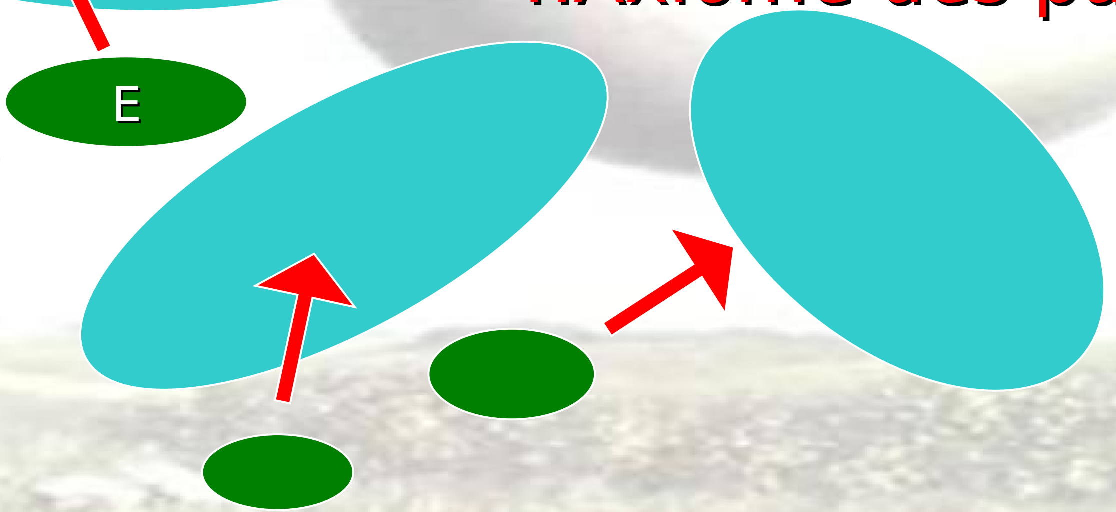
$$\Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big)$$
$$\Longrightarrow \Big(\forall y \in F, \exists x \in E,\ R\{x,y\}\Big)$$

Les axiomes de la théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel)

A.A.Fraenkel
(1891-1965)

1. Axiome de la paire
2. Axiome d’extensionnalité
3. Axiome de la somme
4. Axiome des parties

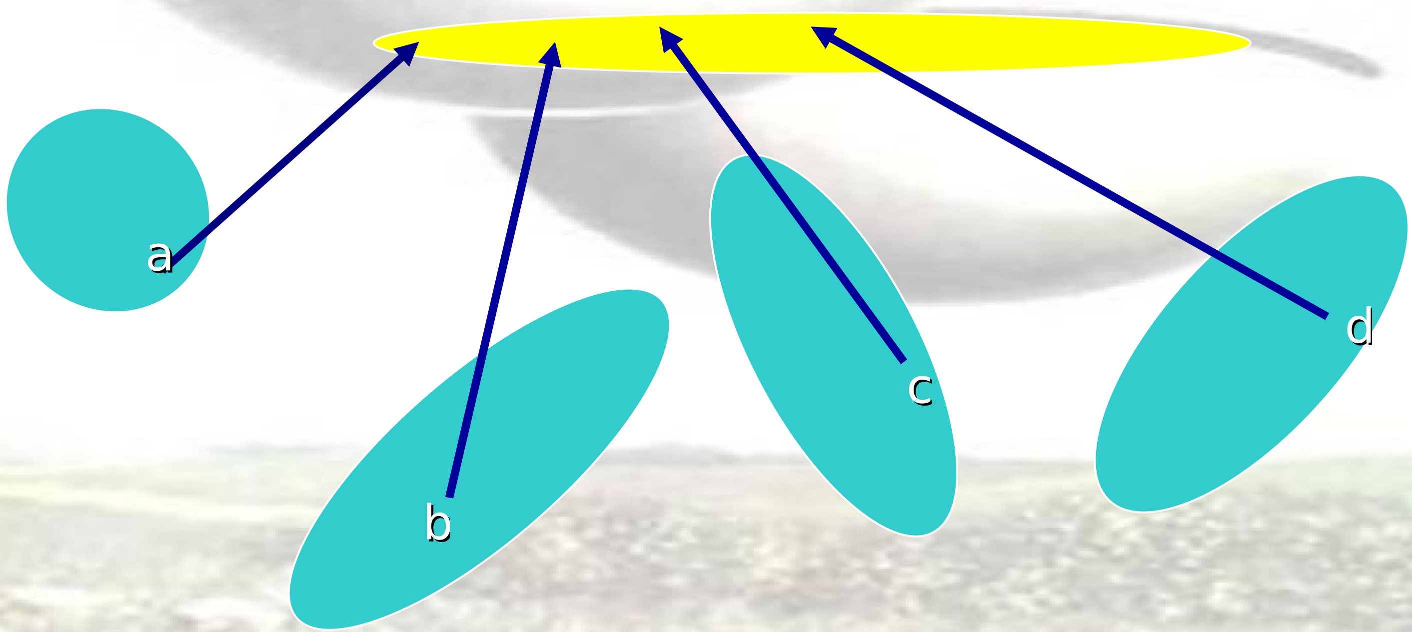




E.F.Zermelo
(1871-1953)

L’axiome du choix

« Etant donnée une collection d’ensembles non vides de l’univers n’ayant deux à deux aucun élément commun, on peut construire un nouvel ensemble en prenant un élément dans <u>chacun</u> des ensembles de la collection »



L’axiome de fondation

« ***Tout ensemble non vide contient un élémen***
avec lequel il n’a aucun élément en commun

intuitivement : aucun ensemble ne peut s’auto-appartenir

Encore quelques opérations entre ensembles ou parties d’un ensemble …

- **Le produit de deux ensembles**
- **L’union d’une famille de parties d’un ensemble**
- **L’intersection d’une famille de parties d’un ensemble**

Notion d’application

GRAPHES ET APPLICATIONS

Définition : on appelle *application* ou ***fonction*** d'un ensemble E dans un ensemble F la donnée d'un sous ensemble G_f de E x F tel que :

Pour tout x dans E , il existe un UNIQUE élément y de F tel que (x,y) soit un élément de G_f

L'ensemble G_f est dit ***graphe*** de la fonction f ainsi associée à G_f et on note

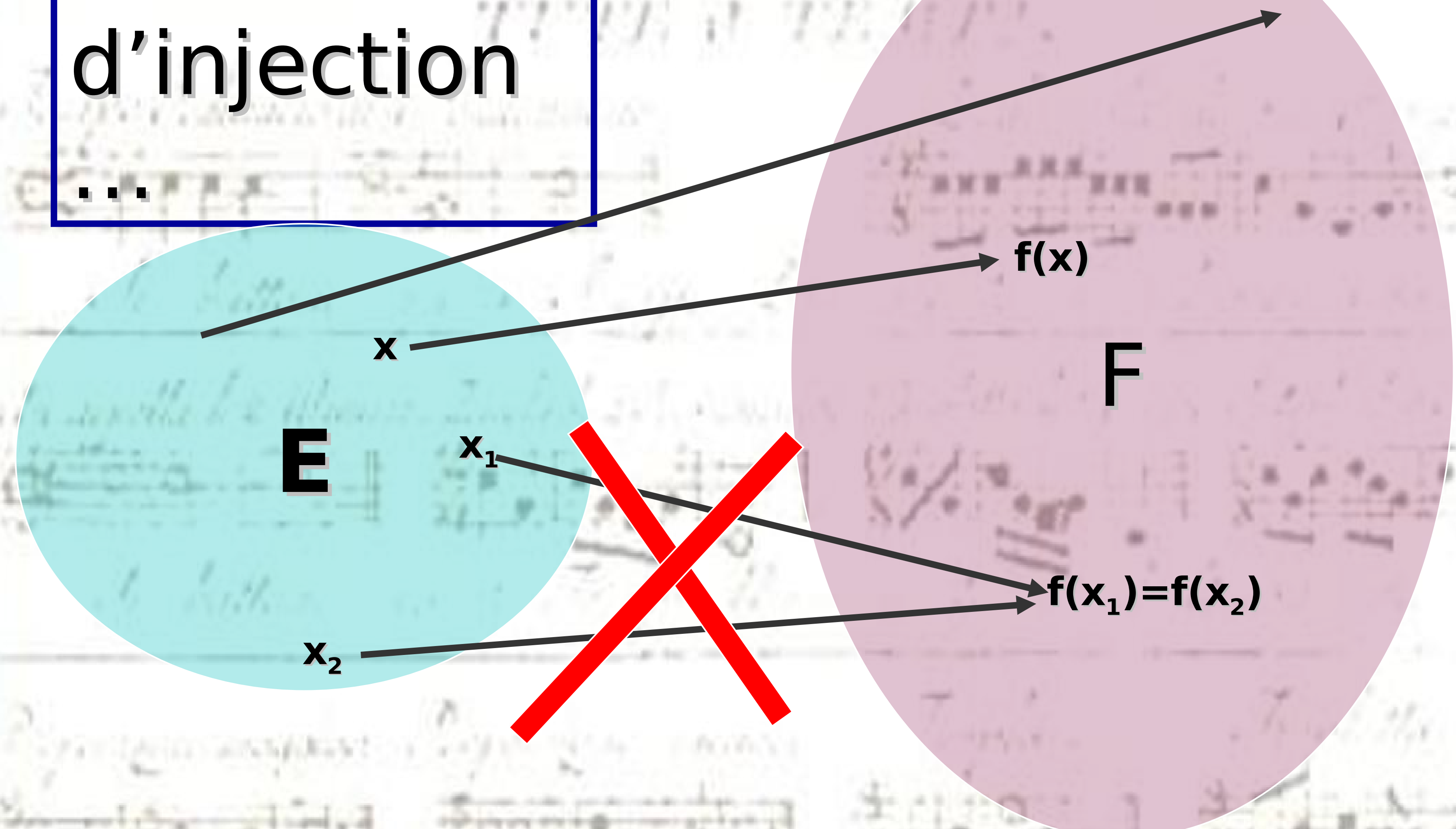
$$y = f(x)$$

l'unique élément de F tel que (x,y) soit dans G_f

$$F^E$$

Notions d'injection

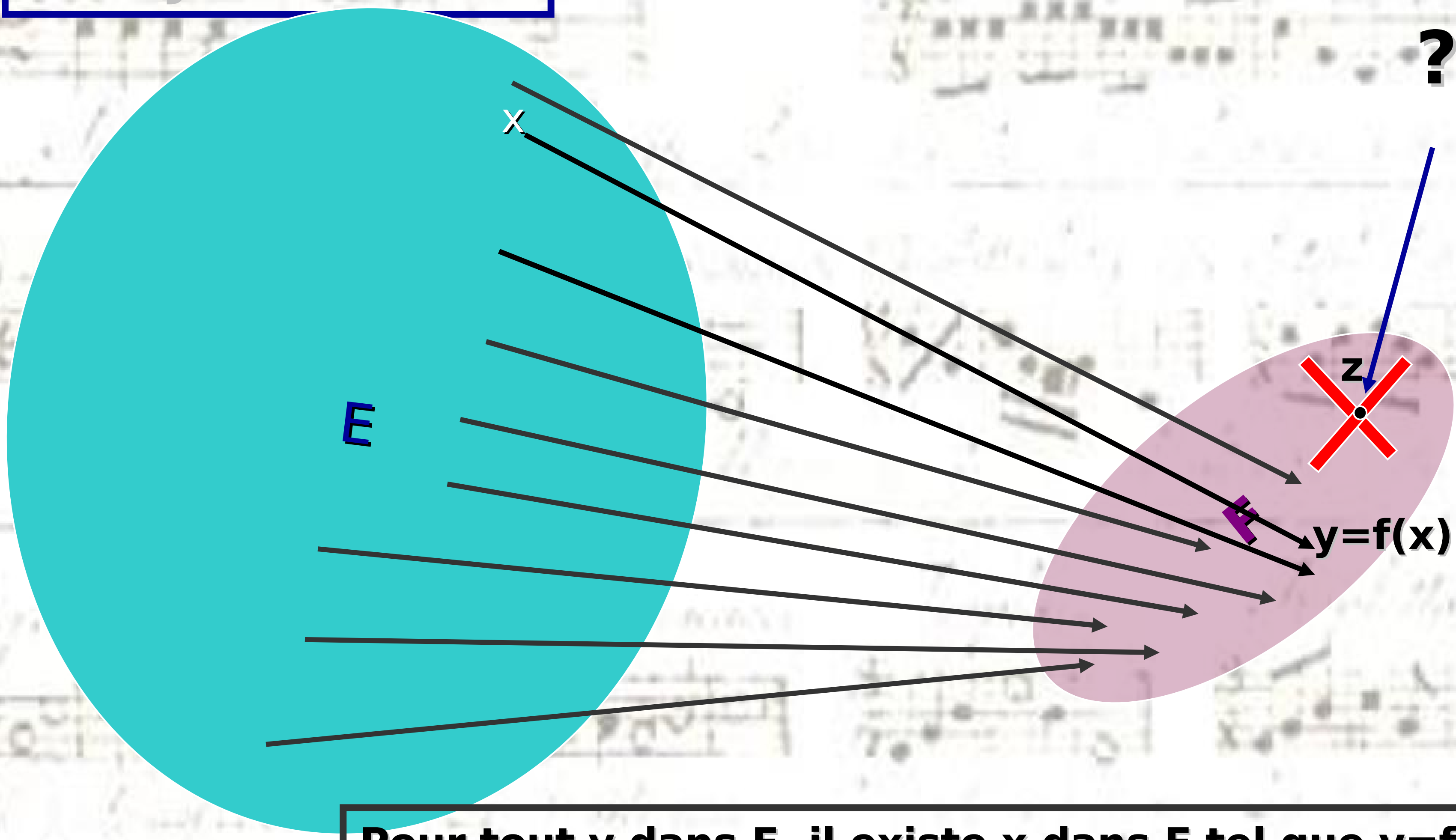
…



Pour tout x_1 dans E, pour tout x_2 dans E, $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Pour tout x_1 dans E, pour tout x_2 dans E, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

… et de surjection



Pour tout y dans F, il existe x dans E tel que y=f(x)

f injective et surjective

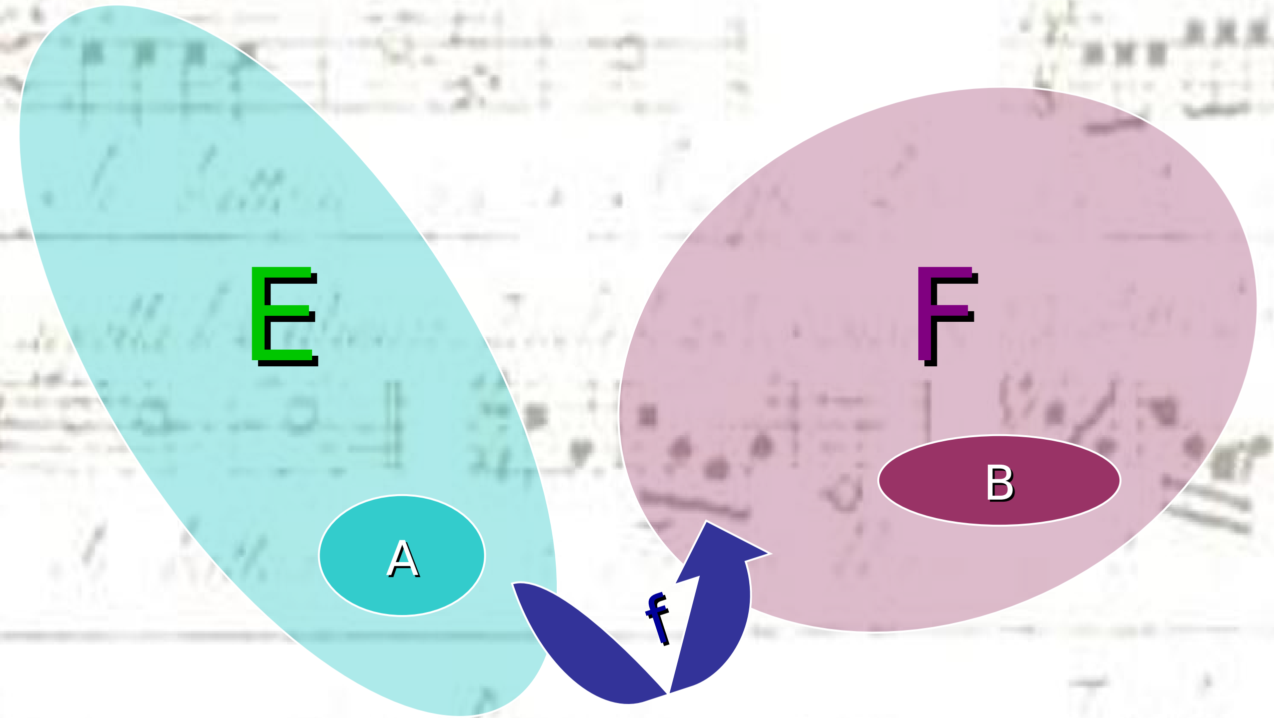
$\Updownarrow$

f bijective

<u>Exemple</u> : l'ensemble des parties de E est en bijection avec l'ensemble des applications de E dans {0,1}

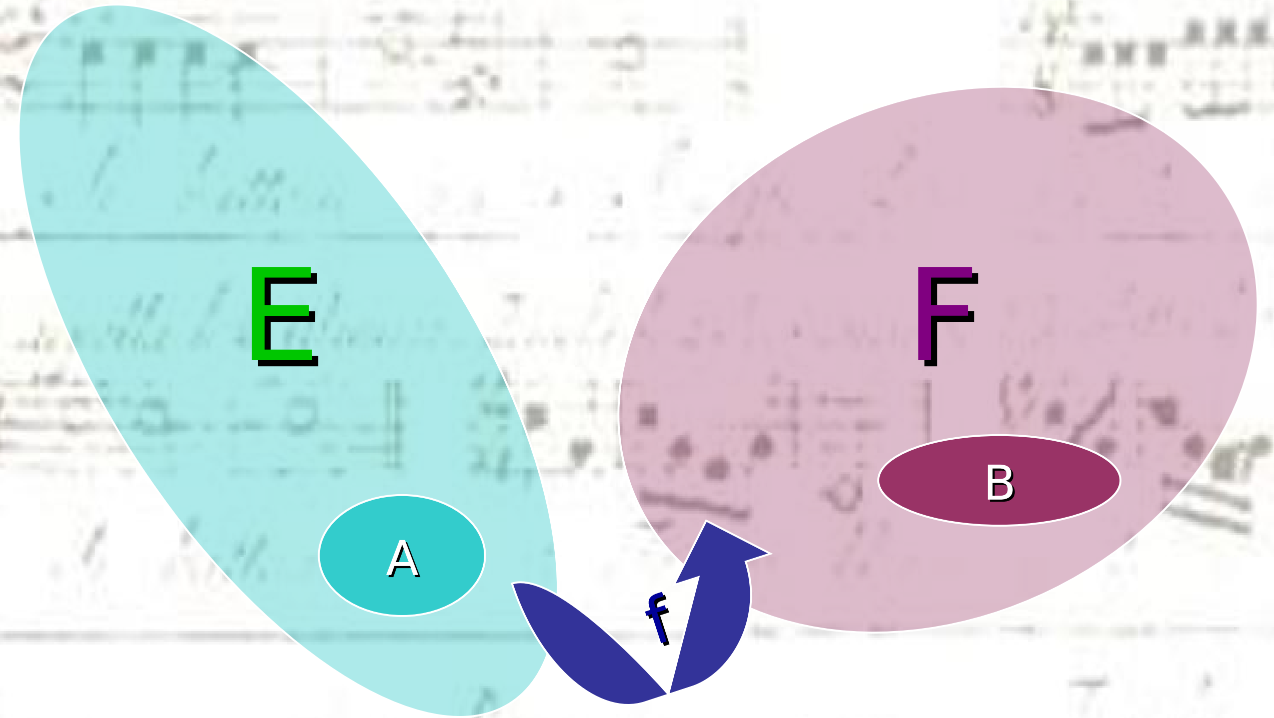
$A \subset E$ **Fonction caractéristique de A**

Image directe, image réciproque



$f(A)$= image directe de A = $\{y,\ y$ dans F ; $\exists x$ dans A tel que $y = f(x)\}$

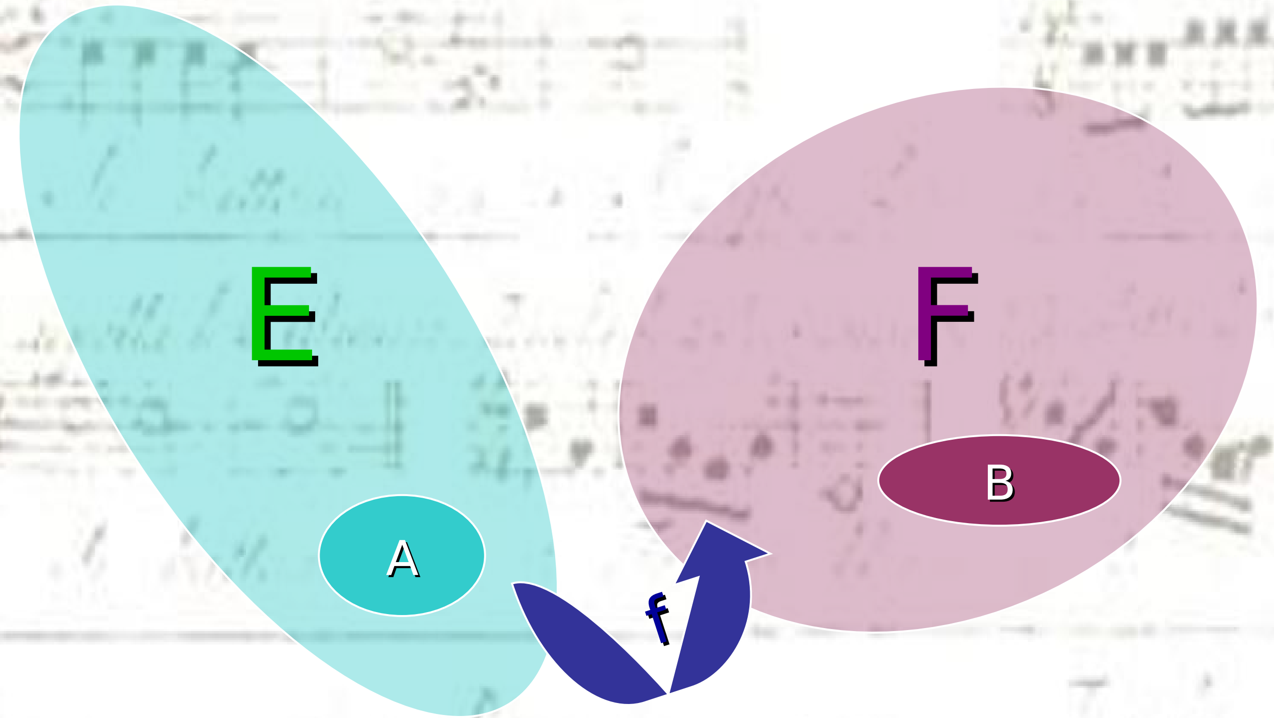
$f^{-1}(B)$= image réciproque de B = $\{x,\ x$ dans E ; $f(x)$ est dans $B\}$



$A \mathrel{c} f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E

$f(f^{-1}(B)) \mathrel{c} B$ pour toute partie B de F

Quelques règles



(f injective) ⇒ $\left(A = f^{-1}(f(A))\right.$ pour toute partie A de E$\left.\right)$

(f surjective) ⇒ $\left(f(f^{-1}(B)) = B\right.$ pour toute partie B de F$\left.\right)$

Composition des applications

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$g \circ f\,(x) := g\,(f(x))$ pour tout x dans E

Inverse à gauche …

$g\,(f(x)) = x$
pour tout x dans E

et injectivité :

<< f est injective de E dans F si et seulement si f admet un inverse à gauche >>

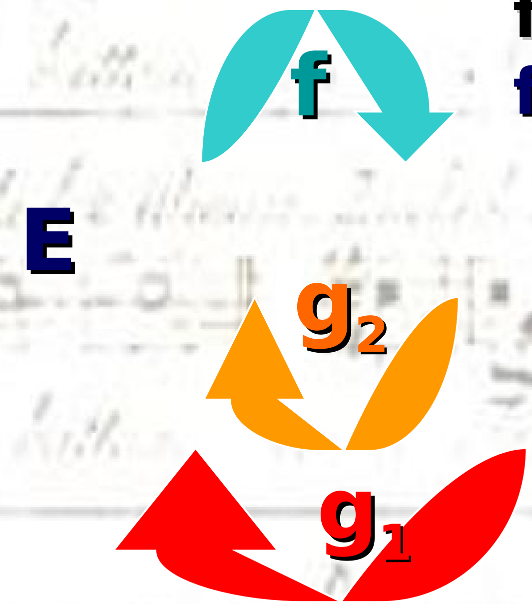
Inverse à droite …

$f(g(y)) = y$
pour tout y dans F

et surjectivité :

<< f est surjective de E dans F si et seulement si f admet un inverse à droite >>

Inverse des applications bijectives



$f(f^{-1}(y))=y$ pour tout y dans F

$f^{-1}(f(x))=x$ pour tout x dans E

$f(g_2(y)) = y$

pour tout y dans F

$g_1(f(x)) = x$

pour tout x dans E

$$g_1 = g_2 = f^{-1}$$

Dénombrement (les ensembles finis)

Si E et F sont des ensembles finis de cardinaux respectifs p (pour E) et n (pour F), l'ensemble des fonctions de E dans F est un ensemble de cardinal

$$\mathbf{Card}\ (\ F^{E}\ ) = n^{p}$$

<u>Exemple</u> : E fini de cardinal p, F={0,1}

$$\mathbf{Card}\ (\{0,1\}^{E}) = 2^{p}$$

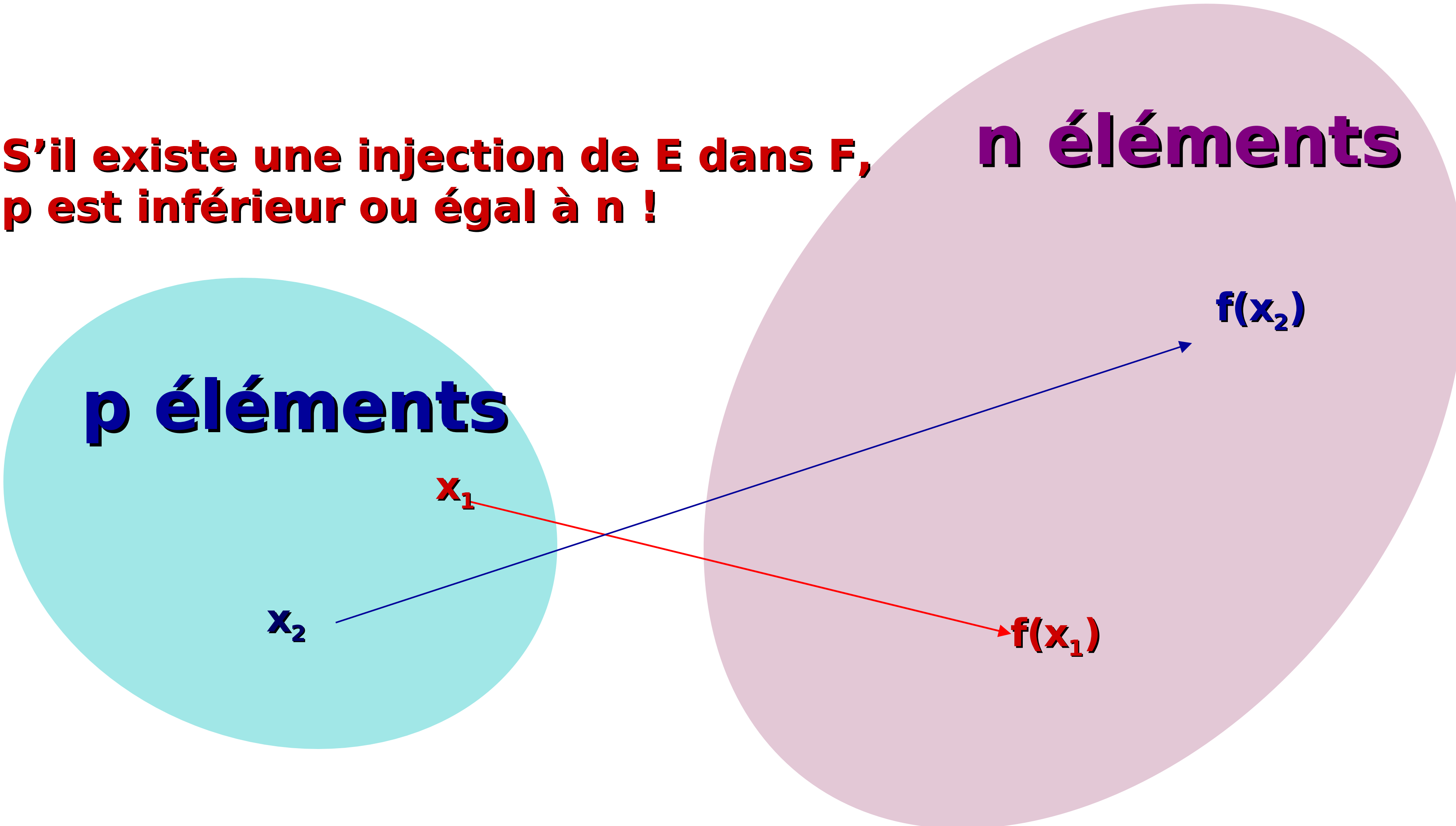
Eléments de combinatoire

Nombre d'**arrangements** de p éléments parmi n

=nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments

$$\boxed{A_n^p}$$

S’il existe une injection de E dans F,
p est inférieur ou égal à n !



$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Un cas particulier important :

Le nombre de permutations d'un ensemble à p élements vaut :

$$\boxed{A_p^p = p \times (p-1) \times \dots \times 1 = p\,!}$$

Nombre de combinaisons de p éléments parmi n

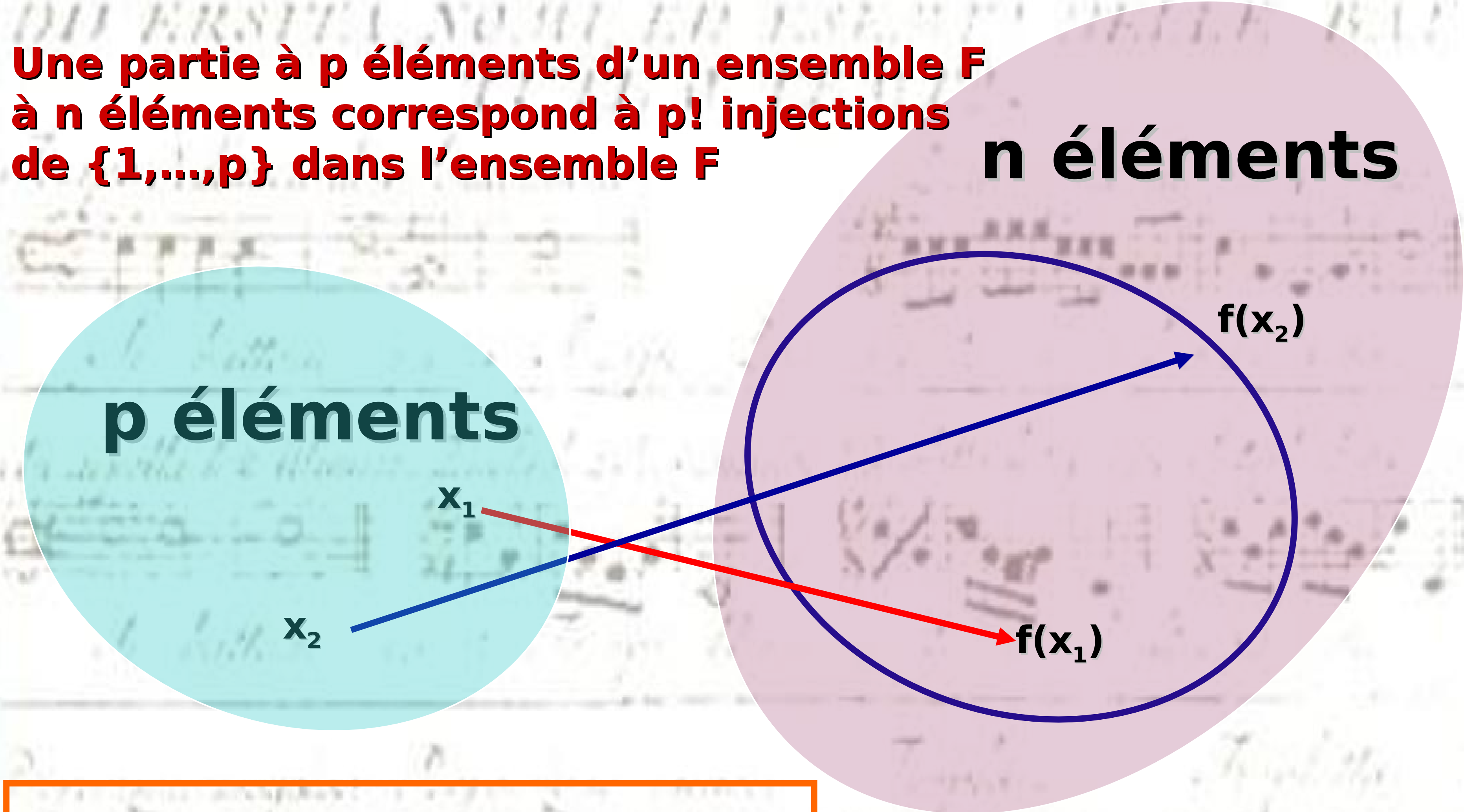
= nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{0}{1} = 0$$

$$C_n^p$$

Une partie à p éléments d'un ensemble F à n éléments correspond à p! injections de {1,…,p} dans l'ensemble F



$$\boxed{A_n^p = p! \times C_n^p}$$

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n vaut :

$$\frac{n\,!}{p\,! \times (n-p)\,!}$$

Le triangle de Pascal

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1
x^8	x^7y	x^6y^2	x^5y^3	x^4y^4	x^3y^5	x^2y^6	xy^7	y^8

$$= (x+ y)^8$$

Formule du binôme

Blaise Pascal (1623-1662)

Si $x \times y = y \times x$
(clause de commutativité)

$$(x+y)^n = C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, y$$
$$\ldots + C_n^p\, x^p\, y^{n-p} \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1}\, x\, y^{n-1} + C_n^n\, y^n$$

Fin du Chapitre 1