Quelques questions d'effectivité en Géométrie Algébrique

Alain Yger

14 mai 2011

Table des matières

Chapitre 1

Polynômes et Polyèdres

1.1 Complexité algorithmique d'un polynôme ou d'un polynôme de Laurent

Soit A un anneau et P un polynôme en n variables à coefficients dans A. La première idée qui vient à l'esprit pour quantifier la complexité algorithmique d'un tel polynôme est d'utiliser comme paramètre de quantification le *degré* de ce polynôme. Si F est un polynôme de Laurent à coefficients dans A, c'est à dire un élément de $\mathrm{A}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$, c'est dans un premier temps naturellement au degré de F (mais considéré cette fois comme polynôme en les $2n$ variables $X_1, X_1^{-1}, ..., X_n, X_n^{-1}$) que l'on pense.

Une remarque cependant s'impose après ce choix : un polynôme (disons en deux variables) aussi simple que

$$P(X_1, X_2) = 1 + X_1^{10000} + X_2$$

semble avoir (du moins intuitivement) une complexité moindre qu'un polynôme générique en deux variables de degré total 10000. Il semble donc, au vu de cet exemple, plus raisonnable de décrire la complexité en termes du *support* du polynôme P, c'est à dire de l'ensemble

$$\operatorname{supp} P := \{\underline{l} \in \mathbb{N}^n ; a_{\underline{l}}(P) \neq 0\}$$

si

$$P(X_1, ..., X_n) = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{l}}(P) X^{\underline{l}},$$

où l'on a noté pour simplifier

$$X^{\underline{l}} := X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}$$

quand $\underline{l} = (l_1, ..., l_n)$. On peut définir de la même manière la notion de support pour un polynôme de Laurent. Du fait que la géométrie des convexes (et en particulier des polyèdres convexes) est d'un maniement plus facile que la géométrie des polytopes arbitraires, cette notion de support appelle naturellement la définition complémentaire suivante

Définition 1.1 *Soit P (resp. F) un polynôme (resp. un polynôme de Laurent) en n variables ; on appelle polyèdre de Newton de P (resp. de F) l'enveloppe convexe fermée du support de P (resp. de F).*

Le support d'un polynôme P (ou d'un polynôme de Laurent F) en n variables (lorsque le cardinal de ce support est strictement supérieur à 1) engendre un sous-espace affine $L = L(P)$ (ou $L = L(F)$) de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k = k(P)$ ou $k = k(F) \in \{1, ..., n\}$; la trace de $\mathbb{Z}^n$ sur ce sous-espace L est un réseau k-dimensionnel (noté $\Lambda_{L(P)}$ ou $\Lambda_{L(F)}$). Une seconde approche visant à quantifier la complexité algorithmique du polynôme P (ou du polynôme de Laurent F) consiste à dire que celle-ci est mesurée par le volume normalisé

$$v_L(P) := \mathrm{Vol}_{L(P)}\left[\Delta(P)\right],$$

où $\Delta(P)$ désigne le polyèdre de Newton de P et $\mathrm{Vol}_{L(P)}$ la mesure de Lebesgue k-dimensionnelle sur l'espace affine $L(P) \simeq \mathbb{R}^k$ normalisée de manière à ce que le volume k-dimensionnel de la maille élémentaire du réseau $\Lambda_{L(P)}$ vaille 1. On procède de la même manière en ce qui concerne le cas d'un polynôme de Laurent F. Dans le cas particulier où $k = n$, on a

$$v(P) := n!\,\mathrm{Vol}_n\left[\Delta(P)\right],$$

où Vol_n désigne la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^n$.

Notons que ce point de vue rend compte de la complexité de manière tout à fait différente que n'en rend compte le degré : par exemple, si P_0 est un polynôme générique en 2 variables de degré total 10000, on a

$$v(P_0) = 10^4 \times 10^4 = 10^8$$

tandis que si P est le polynôme

$$P(X_1, X_2) = 1 + X_1^{10000} + X_2\,,$$

on a

$$v(P) = 10000 = 10^4\,.$$

Par contre, au niveau des degrés, il n'y a pas de "retour d'information" concernant cette différence évidente de complexité entre P_0 et P (en effet $\deg P_0 = \deg P = 10^4$). Mieux, si $k(P) = n$, on peut décider de mesurer la complexité de P par la quantité

$$\mu(P) = (v(P))^{\frac{1}{n}}$$

et l'on voit sur notre exemple que, tandis que $\mu(P_0) = \deg(P_0) = 10^4$, on a $\mu(P) \sim 100$, ce qui est significativement une estimation bien moindre que ne l'est donc celle que l'on aurait obtenu en traitant le polynôme P comme un polynôme du type P_0, c'est à dire un polynôme "plein" de degré 10000. Nous avons bien tenu compte, dans notre nouvelle quantification de la complexité, de l'aspect "creux" du polynôme P.

Nous n'avons ici considéré que la complexité des polynômes au sens géométrique (via le degré ou la donnée du polyèdre de Newton) ; le codage du polynôme, si par exemple celui-ci s'avère à coefficients entiers, nécessite un nombre de bits en relation avec la taille (au sens pour l'instant naïf) du polynôme, et cela nous aiguille vers une autre notion de complexité, la notion de complexité au sens arithmétique. Par *taille ou encore hauteur logarithmique* (au sens naïf) du polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ (ou du polynôme de Laurent $F \in \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$), nous entendons la quantité

$$h(P) := \sup_{\underline{l} \in \operatorname{supp} P} \log |a_{\underline{l}}(P)| \,.$$

Degré et hauteur logarithmique au sens naïf, ou bien polyèdre de Newton et hauteur logarithmique au sens ci-dessus, sont donc les deux paramètres conditionnant (au moins au sens naïf) la complexité d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Si P est un polynôme à coefficients rationnels et δ désigne le PPCM des dénominateurs des coefficients $a_{\underline{l}}(P)$, $\underline{l} \in \operatorname{supp} P$, une fois ces dénominateurs écrits sous la forme réduite, on convient d'appeler taille ou encore hauteur logarithmique au sens naïf la quantité

$$h(P) := \max(\log |\delta|,\ h(\delta P)) \,.$$

1.2 Le volume mixte d'un système de n polyèdres dans $\mathbb{R}^n$

Une opération interne naturelle sur l'ensemble des polyèdres convexes fermés de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ est *l'addition de Minkowski* : étant donnés deux polyèdres convexes Δ_1 et Δ_2, on définit le polyèdre convexe $\Delta_1 + \Delta_2$ par

$$\Delta_1 + \Delta_2 := \{\xi \in \mathbb{R}^n ;\ \xi = \xi_1 + \xi_2 \,,\ \xi_1 \in \Delta_1,\ \xi_2 \in \Delta_2\} \,. \tag{1.1}$$

Il s'agit là d'une opération interne associative.

Si $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polyèdres convexes fermés de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, on définit un opérateur $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{P}_n \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ en "polarisant" (relativement à cette opération d'addition) la forme dont l'action est définie sur $\mathcal{P}_n$ par

$$\Delta \mapsto n!\,\mathrm{Vol}_n\,(\Delta)\,. \tag{1.2}$$

Remarquons que cette forme est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ceci nous conduit alors à la définition suivante

Définition 1.2 *L'opérateur* *<u>"prise de volume mixte"</u>* *est l'opérateur n-linéaire (relativement à l'addition interne de Minkowski) défini sur $\mathcal{P}_n \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ par*

$$\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n) := (-1)^n \sum_{I \subset \{1,...,n\}} (-1)^{\# I} \mathrm{Vol}_n\Big(\sum_{k \in I} \Delta_k\Big)\,, \tag{1.3}$$

c'est à dire comme l'opérateur obtenu en polarisant (relativement à l'opération d'addition de Minkowski) la forme volume normalisée défnie en (1.2).

<u>Exemple :</u> Le volume mixte de deux polyèdres convexes Δ_1 et Δ_2 du plan affine $\mathbb{R}^2$ s'exprime donc via la formule

$$\mathcal{M}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{aire}\,(\Delta_1 + \Delta_2) - \mathrm{aire}\,\Delta_1 - \mathrm{aire}\,\Delta_2\,,$$

l'aire corresondant ici à la mesure de Lebesgue normalisée au sens habituel (l'aire du simplexe $\mathrm{conv}\,\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ vaut $1/2! = 1/2$). À titre d'exemple, on vérifiera que le volume mixte des deux polyèdres

$$\Delta_1 = [-2,2]^2, \quad \Delta_2 = \mathrm{conv}\,\{(-2,2),(1,1),(1,-1),(-2,-2)\}$$

vaut $\mathcal{M}(\Delta_1, \Delta_2) = 28$.

L'espace $\mathcal{P}_n$ peut aussi être équipé d'une opération externe

$$]0,\infty[\times \mathcal{P}_n : \ \Delta \mapsto \lambda\Delta\,,$$

où, par définition

$$\lambda\Delta := \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \xi = \lambda\eta,\ \eta \in \Delta\} \tag{1.4}$$

(il s'agit juste de la prise d'homothétique). La n-linéarité de l'opérateur $\mathcal{M}$ relativement à l'addition de Minkowski implique la n-linéarité de ce même opérateur considéré cette fois comme opérateur sur $\mathcal{P}_n \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ lorsque

$\mathcal{P}_n$ est équipé de la loi d'addition interne de Minkowski (1.1) et de l'action externe (1.4) ; il suffit en effet dans un premier temps de prouver par exemple

$$\mathcal{M}\Big(\Delta_1, ..., \Delta_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta_{kj}, \Delta_{k+1}, ..., \Delta_n\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_{k-1}, \Delta_{kj}, \Delta_{k+1}, ..., \Delta_n)$$

lorsque les λ_j sont des rationnels tous strictement positifs (on se ramène au cas entier après une homothétie de rapport le PPCM des dénominateurs des λ_j), puis dans un second temps d'utiliser la continuité des applications

$$\lambda \in]0, \infty[^n \mapsto \mathrm{Vol}_n\Big(\sum_{k\in I} \lambda_k \Delta_k\Big), \quad I \subset \{1, ..., n\},$$

et la définition (1.3) de l'action de l'opérateur $\mathcal{M}$. On déduit ensuite de la n-linéarité de l'opérateur $\mathcal{M}$ (relativement à l'opération interne d'addition et à l'opération externe de prise d'homothétique) que la fonction

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in]0, \infty[^n \mapsto \mathrm{Vol}_n\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta_j\Big) = \frac{1}{n!} \mathcal{M}\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta_j, ..., \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta_j\Big) \quad (1.5)$$

est une fonction polynomiale homogène de degré n en les variables λ_j, le volume mixte $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ se trouvant être précisément le coefficient du monôme $\lambda_1 ... \lambda_n$ dans le développement de cette fonction polynomiale (1.5).

Il est important de souligner que la formule (1.3) donnant l'expression du volume mixte, si elle est théorique, pose néanmoins de sérieux problèmes de complexité au niveau algorithmique. Les calcul du volume mixte se font en fait suivant un argument plus "visuel", suivant la présentation proposée par exemple dans [17] (section 2). On introduit tout d'abord la notion de <u>*subdivision mixte*</u> d'une famille $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$ de $r \in \mathbb{N}$ sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^n$. On commence tout d'abord par introduire la définition de <u>*cellule*</u> de la famille $\mathcal{A}$, avec les notions qui lui sont afférentes.

Définition 1.3 *Si $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$, on appelle <u>cellule</u> de $\mathcal{A}$ tout r-uplet $(C_1, ..., C_r)$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^n$ tels que $C_j \subset \mathcal{A}_j$ pour tout $j = 1, ..., r$. L'enveloppe convexe d'une cellule $(C_1, ..., C_r)$, avec $C_j \subset \mathcal{A}_j$ est par définition*

$$\mathrm{conv}\, C = \mathrm{conv}\,(C_1 + \ldots + C_r),$$

où $C_1 + \ldots + C_r$ est défini de manière tout à fait analogue à la manière dont était définie la somme de Minkowski de deux polyèdres convexes, c'est à dire comme

$$C_1 + \ldots + C_r := \{\xi_1 + \ldots + \xi_r \in \mathbb{R}^n;\ \xi_1 \in C_1, \ldots, \xi_r \in C_r\}.$$

Le type d'une cellule $(C_1, ..., C_r)$ *de la famille* $\mathcal{A}$ *est par définition*

$$\operatorname{type} C := \Big(\dim(\operatorname{conv} C_1), ..., \dim(\operatorname{conv} C_r)\Big) \in \mathbb{N}^r$$

(la dimension d'un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ *étant par définition la dimension du plus petit sous-espace affine de* $\mathbb{R}^n$ *qui le contienne).*

Rappelons aussi que si Δ est un polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, une *face* de Δ est par définition un sous-ensemble δ de Δ (qui s'avère être de fait aussi un sous-polyèdre fermé de Δ) tel qu'il existe une forme linéaire x^* sur $\mathbb{R}^n$, tel que δ soit le plus grand sous-ensemble de Δ ayant la propriété

$$\min_{\xi \in \delta} < x^*, \xi >= \min_{\xi \in \Delta} < x^*, \xi > , \quad j = 1, ..., n\,.$$

Notons que Δ tout entier est une face de Δ (on prend $x^* = 0$). Si Δ est un polyèdre de dimension k, les faces de dimension $k-1$ sont appelées *facettes* du polyèdre.

Nous pouvons maintenant introduire le concept de *subdivision mixte* d'une famille $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$ telle que $\mathbb{R}^n$ soit l'espace engendré par l'union des $\mathcal{A}_j$, $j = 1, ..., r$.

Définition 1.4 *Une subdivision mixte d'une telle famille* $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$ *de sous-ensembles finis de* $\mathbb{R}^n$ *est par définition une collection finie de cellules* $\{C^{(1)}, ..., C^{(m)}\}$ *de* $\mathcal{A}$ *telle que*

- $\dim \operatorname{conv}(C^{(k)}) = n, \quad k = 1, ..., m$
- $\forall k_1, k_2 \in \{1, ..., m\}$, *l'intersection des ensembles* $\operatorname{conv}(C^{(k_1)})$ *et* $\operatorname{conv}(C^{(k_2)})$ *est une face à la fois de* $\operatorname{conv}(C^{(k_1)})$ *et de* $\operatorname{conv}(C^{(k_2)})$.
- *L'union des enveloppes convexes des cellules* $C^{(k)}$, $k = 1, ..., m$, *est égale au polyèdre convexe (et de dimension* n *du fait de l'hypothèse faite sur* $\mathcal{A}$*)* $\Delta_1 + \ldots + \Delta_r$, *où* $\Delta_j := \operatorname{conv} \mathcal{A}_j$, $j = 1, ..., r$.
- *enfin, pour toute cellule* $C^{(k)} = (C_1^{(k)}, ..., C_r^{(k)})$, *on a*

$$\sum_{j=1}^{r} \dim(\operatorname{conv} C_j^{(k)}) = n\,.$$

Réalisation pratique d'une subdivision mixte : Pour réaliser concrètement (et en même temps visualiser) une subdivision mixte pour $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$, voici un moyen algorithmique de procéder (cette méthode se trouve décrite dans [27] et nous la retrouverons ultérieurement) : on commence par choisir, pour $j = 1, ..., r$ des "poids" génériques

$$w_j^* = (w_{j1}, ..., w_{jn}) \in \mathbb{N}^n$$

puis l'on considère, dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (la nouvelle coordonnée étant dénotée t) les ensembles "relevés"

$$\widetilde{\mathcal{A}}_j := \{(\xi, < w_j^*, \xi >);\ \xi \in \mathcal{A}_j\}\,.$$

Les enveloppes convexes de ces ensembles (considérés maintenant dans $\mathbb{R}^{n+1}$ sont les polyèdres convexes (et de dimension n) de $\mathbb{R}^{n+1}$ définis par

$$\widetilde{\Delta}_j := \{(\xi, < w_j^*, \xi >);\ \xi \in \Delta_j = \operatorname{conv} \mathcal{A}_j\}\,,\ j = 1, ..., n$$

(du fait de la linéarité des applications $\xi \mapsto < w_j^*, \xi >$). On peut aussi construire (exactement comme on a construit la somme de Minkowski de polyèdres convexes) la somme de Minkowski $\widetilde{\Delta}$ des polyèdres convexes $\widetilde{\Delta}_j$, $j = 1, ..., r$, soit le polytope de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}_1 + \ldots + \widetilde{\Delta}_r\,.$$

On obtient ainsi un certain polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension $n+1$ (pourvu que le choix des poids w_j^* soit générique). De plus, toujours sous des hypothèses de généricité concernant ces mêmes poids, on voit que les facettes de ce polyèdre (toutes de dimension n, puisque le polyèdre $\widetilde{\Delta}$ est de dimension $n+1$) peuvent être triées en <u>deux classes</u> : celles pour lesquelles le vecteur normal unitaire rentrant orthogonalement à la face est un vecteur du demi-espace $\{t > 0\}$, celles pour lequelles ce vecteur normal unitaire rentrant est un vecteur du demi-espace $\{t < 0\}$. Par définition, <u>*l'enveloppe convexe inférieure*</u> du polyèdre $\widetilde{\Delta}$ est précisément la collection $\widetilde{\mathcal{C}}$ des faces n-dimensionnelles du polyèdre $\widetilde{\Delta}$ à normale rentrante pointant vers les $t > 0$ (la collection des autres facettes de $\widetilde{\Delta}$ est, quant à elle, <u>*l'enveloppe convexe supérieure*</u> de $\widetilde{\Delta}$). Si $\widetilde{C}$ est un élément extrait de la collection $\widetilde{\mathcal{C}}$, la projection de l'ensemble

$$\widetilde{C} \cap \Big\{\sum_{j=1}^{r} \widetilde{\mathcal{A}}_j\Big\}$$

s'écrit sous la forme

$$\pi\Big(\widetilde{C} \cap \Big\{\sum_{j=1}^{r} \widetilde{\mathcal{A}}_j\Big\}\Big) = C_1 + \ldots + C_r\,,$$

où C_1 est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1$,..., C_r un sous-ensemble de $\mathcal{A}_r$. Lorsque les poids ω_j^*, $j = 1, ..., r$, sont choisis de manière générique, toutes les conditions sont remplies pour que la collection de tous les r-uplets $(C_1, ..., C_r)$, lorsque $\widetilde{C}$ parcourt la famille $\widetilde{C}$, soit une subdivision mixte pour la famille $(\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r)$.

La connaissance d'une subdivision mixte pour une famille $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n)$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^n$ dont l'union engendre $\mathbb{R}^n$ (comme espace affine) fournit un moyen bien pratique pour calculer le volume mixte $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$, où $\Delta_j := \mathrm{conv}\,\mathcal{A}_j$. On a en effet la

Proposition 1.1 *Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n)$ une famille de sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^n$ dont l'union engendre $\mathbb{R}^n$ (comme espace affine). Si $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sont les enveloppes convexes des ensembles $\mathcal{A}_1$,..., $\mathcal{A}_n$ et si $\mathcal{C} = \{C^{(1)}, ..., C^{(m)}\}$ est une subdivision mixte de la famille $\mathcal{A}$, on a la formule combinatoire suivante*

$$\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n) = \sum_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ \mathrm{type}\, C = (1, ..., 1)}} \mathrm{Vol}_n \Big[\mathrm{conv}(C_1) \times \ldots \times \mathrm{conv}(C_n)\Big]\,. \tag{1.6}$$

Remarque. Comme les ensembles $\mathrm{conv}\, C_j$, $j = 1, ..., n$ attachés à une cellule $C = (C_1, ..., C_n)$ de type $(1, ..., 1)$ sont des segments $[a_j b_j]$ de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, le volume du parallélotope $\mathrm{conv}\,(C_1) \times \ldots \times \mathrm{conv}\,(C_n)$ se calcule immédiatement via la formule

$$\mathrm{Vol}_n \Big[\mathrm{conv}(C_1) \times \ldots \times \mathrm{conv}(C_n)\Big] = |\det(b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)|\,.$$

Preuve de la proposition. On introduit des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ et l'on introduit, pour chaque valeur $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]0, \infty[^n$, la famille

$$\mathcal{A}_\lambda := (\lambda_1 \mathcal{A}_1, \ldots, \lambda_n \mathcal{A}_n)\,.$$

Si $\mathcal{C}$ est une subdivision mixte de $\mathcal{A}$, la famille $\mathcal{C}_\lambda$ dont les éléments sont les

$$(\lambda_1 C_1, ..., \lambda_n C_n)\,, \quad C = (C_1, ..., C_n) \in \mathcal{C}\,,$$

est clairement une subdivision mixte de $\mathcal{A}_\lambda$. Ceci implique (du fait des différentes clauses qui régissent la définition d'une subdivision mixte) que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_n \Delta_n) &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Vol}_n \Big[\mathrm{conv}(\lambda_1 C_1) \times \ldots \times \mathrm{conv}(\lambda_n C_n)\Big] \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda^{\underline{\mathrm{type}\, C}} \mathrm{Vol}_n \Big[\mathrm{conv}(C_1) \times \ldots \times \mathrm{conv}(C_n)\Big]\,. \end{aligned}$$

La proposition résulte alors du fait que l'on sache que le volume mixte $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ est exactement le coefficient de $\lambda_1 \ldots \lambda_n = \lambda^{\underline{1}}$ dans le développement de la fonction polynomiale

$$\lambda \mapsto \mathrm{Vol}_n(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_n \Delta_n)\,.$$

La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

1.3 Sous-ensembles algébriques discrets de $\mathbb{C}^n$ ou de $\mathbb{T}^n$

Dans cette section consacrée à quelques rappels algébriques bien connus, nous allons nous intéresser à une classe de sous-ensembles algébriques de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ (resp. de l'ouvert affine $\mathbb{T}^n := \{\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n;\ \zeta_1 \dots \zeta_n \neq 0\}$) discrets (c'est à dire constitués uniquement de points isolés dans l'espace affine $\mathbb{C}^n$ (resp. dans l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$).

Définition 1.5 *On appelle* <u>*sous-ensemble algébrique discret de l'espace affine*</u> $\mathbb{C}^n$
tout sous-ensemble $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{C}^n$ constitué de points isolés d'une part, et tel qu'il existe une famille $\{P_1, ..., P_m\}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ avec

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ P_1(\zeta) = ... = P_m(\zeta) = 0\} \tag{1.7}$$

d'autre part. On appelle <u>*sous-ensemble algébrique discret de l'ouvert affine*</u> $\mathbb{T}^n$ *tout sous-ensemble $\mathcal{W}$ de $\mathbb{T}^n$ consitué de points isolés dans $\mathbb{T}^n$ d'une part, et tel qu'il existe une famille $\{F_1, ..., F_m\}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ avec*

$$\mathcal{W} = \{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_1(\zeta) = ... = F_m(\zeta) = 0\} \tag{1.8}$$

d'autre part.

L'étude de tels ensembles (du point de vue par exemple de leur complexité) se trouve dès le départ grandement facilitée par le fait bien connu que de tels ensembles sont automatiquement <u>finis</u>. On a la

Proposition 1.2 *Tout sous-ensemble algébrique discret de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ (resp. de l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$) est de cardinal fini.*

Preuve. Considérons tout d'abord le cas des sous-ensembles algébriques discrets de l'espace affine $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{Z}$ un tel sous ensemble et

$$I(\mathcal{Z}) := \{P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n];\ \forall \zeta \in \mathcal{Z},\ P(\zeta) = 0\}\,.$$

On sait que $I(\mathcal{Z})$, en tant qu'idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, admet une décomposition en idéaux primaires

$$I(\mathcal{Z}) = \mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_l$$

et que l'ensemble $\mathcal{Z}$ est inclus dans l'union des idéaux premiers $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_l$, constituant la liste $\mathrm{Ass}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I(\mathcal{Z}))$, que sont les radicaux des idéaux primaires $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, ..., l$ (en ce qui concerne les bases de la théorie de la décomposition des idéaux de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, on se reportera par exemple au chapitre 2 de [25]). Le fait que tout point de $\mathcal{Z}$ soit isolé implique que tous les idéaux premiers maximaux $(\zeta_1 - \alpha_1, ..., \zeta_n - \alpha_n)$, $\alpha \in \mathcal{Z}$, doivent figurer dans la liste $\{\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_l\}$ (et d'ailleurs que tous les éléments de cette liste sont de ce type). On en déduit bien que le cardinal de $\mathcal{Z}$ est fini (et d'ailleurs en fait égal à l).

Considérons maintenant un sous-ensemble algébrique discret $\mathcal{W}$ de l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$. Soient $F_1, ..., F_m$ m polynômes de Laurent tels que

$$\mathcal{W} = \{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_1(\zeta) = \ldots = F_m(\zeta) = 0\}.$$

Il existe un entier N tel que, pour tout $j = 1, ..., m$, le polynôme de Laurent

$$P_j(X) := (X_1 ... X_n)^N F_j(X)$$

soit en fait un polynôme. Considérons la liste

$$\mathrm{Ass}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n)) = \{\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_l\}$$

des idéaux premiers attachés à l'idéal $(P_1, ..., P_n)$ via la décomposition primaire. Cette liste se scinde en deux sous-listes : celle des idéaux premiers qui ne contiennent aucun des monômes coordonnées $X_1, ..., X_n$, et celle de ceux qui contiennent au moins l'un de ces monômes. Le fait que les points de $\mathcal{W}$ inclus dans l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$ soient des points isolés implique qu'il y a une bijection entre cet ensemble de points et la sous-liste des idéaux premiers de la liste $\mathrm{Ass}\,(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n))$ constituée de ceux qui ne contiennent aucun des X_j, $j = 1, ..., n$. L'ensemble $\mathcal{W}$ est donc fini. $\diamondsuit$

L'un des objectifs de ce cours sera de montrer comment extraire des informations relatives à un sous-ensemble algébrique discret de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ (resp. de l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$) à partir de la donnée d'un système d'équations algébriques définissant cet ensemble. On commencera par énoncer ici un résultat important du point de vue algébrique par la suite.

Proposition 1.3 *Soient $P_1, ..., P_m$, m éléments de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que l'ensemble*

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(P) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ P_1(\zeta) = \ldots = P_m(\zeta) = 0\}$$

soit un ensemble discret. Alors, l'espace vectoriel quotient

$$\frac{\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]}{(P_1, ..., P_m)}$$

(où $(P_1, ..., P_m)$ désigne l'idéal engendré par les P_j, $j = 1, ..., m$, dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient de même $F_1, ..., F_m$, m polynômes de Laurent dans $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ tels que l'ensemble

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(F) := \{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_1(\zeta) = \ldots = F_m(\zeta) = 0\}$$

soit un ensemble discret. Alors, l'espace vectoriel quotient

$$\frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_m)}$$

(où $(F_1, ..., F_m)$ désigne l'idéal engendré par les F_j dans $\mathbb{C}[X_1^{\pm}, ..., X_n^{\pm}]$) est aussi un espace vectoriel de dimension finie.

Preuve. Considérons tout d'abord le cas des polynômes ; comme on l'a vu, si

$$\mathcal{Z} := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ P_1(\zeta) = \ldots = P_m(\zeta) = 0\}$$

est un ensemble discret, cet ensemble est en fait fini, de cardinal $M(P)$, et il y a une correspondance bijective entre les points de $\mathcal{Z}$ et l'ensemble

$$\mathrm{Ass}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n))\,.$$

Le radical de l'idéal $(P_1, ..., P_m)$ est l'intersection des éléments de la liste

$$\mathrm{Ass}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_m))\,,$$

c'est à dire des idéaux premiers maximaux $(X_1 - \alpha_1, ..., X_n - \alpha_n)$, où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ décrit l'ensemble des points de $\mathcal{Z}(P)$. Pour chaque j entre 1 et n, le polynôme en X_j

$$Q_j(X_j) := \prod_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} (X_j - \alpha_j)$$

appartient donc au radical de $(P_1, ..., P_m)$. Il existe donc un entier $q_j \in N^*$ tel que

$$Q_j^{q_j}(X_j) = X_j^{q_j M(P)} + \cdots$$

appartienne à l'idéal $(P_1, ..., P_m)$, et ce pour tout $j = 1, ..., n$. Ceci implique bien que le système des classes modulo $(P_1, ..., P_m)$ des monômes

$$X_1^{\beta_1} \ldots X_n^{\beta_n},\ \beta_j \leq q_j M(P) - 1,\ j = 1, ..., n,$$

est un système générateur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_m)$. Il s'ensuit bien que cet espace est de dimension finie.

Dans le second cas, la preuve est identique ; on introduit comme dans la seconde partie de la preuve de la proposition 1.2, les polynômes

$$P_j(X) = (X_1...X_n)^N F_j(X)\,.$$

Soit $N = \#\mathcal{W}(F)$. Si l'on pose, pour $j = 1, ..., n$,

$$Q_j(X_j) := \prod_{\alpha\in\mathcal{W}(F)} (X_j - \alpha_j)\,,$$

c'est cette fois le polynôme

$$H_j(X) = X_1 \dots X_n\, Q_j(X_j)$$

qui se trouve dans le radical de l'idéal engendré par les P_j. Il existe donc, pour chaque j entre 1 et n, un entier $q_j \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$H_j^{q_j} = (X_1 \dots X_n)^{q_j}(X_j^{q_j N} + \dots + \gamma_j), \quad \gamma_j := \prod_{\alpha\in\mathcal{W}(F)} (-\alpha_j)^{q_j} \neq 0\,.$$

On en déduit immédiatement que le système des classes modulo $(F_1, ..., F_m)$ des monômes de Laurent

$$X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}, \quad \text{où} \quad -q_j M(P) + 1 \leq \beta_j \leq q_j M(P) - 1,\ j = 1, ..., n,$$

engendre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]/(F_1, ..., F_m)$. $\diamondsuit$

1.4 Élimination creuse

Dans cette section, nous considérons $n + 1$ sous-ensembles finis $\mathcal{A}_0$,...,$\mathcal{A}_n$ de $\mathbb{Z}^n$, de cardinaux respectifs $A_0 > 1, ..., A_n > 1$, soit

$$\mathcal{A}_j = \{\alpha_{j,0}, ..., \alpha_{j,A_j-1}\}, \quad j = 0, ..., n\,,$$

et nous notons

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)$$

le sous-ensemble de l'espace projectif produit

$$\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1} := \mathbb{P}^{A_0-1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^{A_n-1}(\mathbb{C})$$

constitué des points $([c_{0,0} : \dots : c_{0,A_0-1}], ..., [c_{n,0} : \dots : c_{n,A_n-1}])$ de cet espace tels que le système d'équations

$$\sum_{l_j=0}^{A_j-1} c_{j,l_j}\zeta^{\alpha_{j,l_j}} = 0\,, \quad j = 0, ..., n\,, \tag{1.9}$$

ait au moins une solution dans l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$. Nous pouvons alors affirmer le résultat suivant :

Proposition 1.4 *Étant donnés $n+1$ sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^n$, $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$, de cardinaux respectifs $A_0 > 1, ..., A_n > 1$, l'adhérence (dans le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$ équipé de la métrique produit usuelle) du sous-ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)$ défini précédemment est une sous variété algébrique irréductible propre, définie sur $\mathbb{Q}$, de la variété algébrique projective $\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$. Ceci signifie qu'il existe une famille finie de polynômes $\Phi_1, ..., \Phi_L$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, multihomogènes en les blocs de variables $c_0 = (c_{0,0}, ..., c_{0,A_0-1})$,..., $c_n = (c_{n,0}, ..., c_{n,A_n-1})$, tels que*

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)} = \\ &= \{c = (c_0, ..., c_n) \in \mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1};\ \Phi_l(c_0, ..., c_n) = 0,\ l = 1, ..., L\}\,.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Lorsque cette sous-variété est une hypersurface de $\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$ (ce qui veut dire que l'on peut se contenter de prendre $L = 1$ dans (1.10)), on appelle résultant creux attaché aux sous-ensembles $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$ le polynôme irréductible unique (au signe près) $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)$ dont le lieu des zéros dans $\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$ est précisément l'hypersurface $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$. Si la sous-variété algébrique $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ n'est plus de codimension 1, on conviendra de ce que

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n) \equiv 1\,.$$

Exemple 1. Considérons $n = 2$ et les trois sous-ensembles

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 := \{(0,1),\ (1,0)\}, \quad \mathcal{A}_2 := \{(1,0), (0,1), (0,0)\}\,.$$

On vérifie aisément que dans ce cas

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}\,.$$

Exemple 2. Si $n = 1$, le calcul du résultant creux $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, où

$$\mathcal{A} = \{0, ..., d_1 - 1\},\ \mathcal{A}_2 = \{0, ..., d_2 - 1\}$$

nous donne le calcul classique du déterminant de Sylvester de taille d_1+d_2-2.

(pour d'autres exemples plus complexes, on se reportera aux articles [26], [30] et [31]).

Preuve de la proposition. On considère, dans

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}\,,$$

la sous-variété algébrique

$$\mathcal{Y} := \{(\zeta, (c_0, ..., c_n));\ \sum_{l_j=0}^{A_j-1} c_{j,l_j}\zeta^{\underline{\alpha}_{j,l_j}} = 0,\ j = 0, ..., n\}$$

(dite aussi variété d'incidence). La première projection π_1 (celle de $\mathcal{Y}$ sur l'ouvert affine $\mathbb{T}^n$) est surjective. Si ζ est fixé dans $\mathbb{T}^n$, alors l'ensemble $\pi_1^{-1}(\zeta)$ se présente comme le produit des $n+1$ hyperplans respectivement de $\mathbb{P}^{A_0-1}(\mathbb{C}), ..., \mathbb{P}^{A_n-1}(\mathbb{C})$ orthogonaux respectivement aux directions $(\zeta^{\underline{\alpha}_{j,0}}, ..., \zeta^{\underline{\alpha}_{j,A_j-1}})$, $j = 0, ..., n$. Ces fibres sont donc des sous-variétés linéaires et de dimension constante k (et irréductibles). On dispose donc, avec $\mathcal{Y}$, de l'espace sous-jacent à un fibré de rang k au dessus d'une base irréductible ($\mathbb{T}^n$ est bien une variété quasi-affine, c'est à dire un ouvert d'une variété affine, irréductible). L'irréductibilité de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ (qui est l'image de $\mathcal{Y}$ par cette fois la seconde projection) en résulte, d'où aussi bien sûr celle de l'adhérence de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ dans $\mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$.

Pour montrer que la sous-variété algébrique $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ est propre, on peut se ramener au cas où les sous-ensembles $\mathcal{A}_j$ sont du type

$$\mathcal{A}_j = \{(0, ..., 0)\} \cup \mathcal{B}_j\,,\ \mathcal{B}_j \subset \mathbb{N}^n\,, \quad j = 0, ..., n\,.$$

Supposons

$$\mathcal{B}_j = \{\beta_{j,1}, ..., \beta_{j,A_j-1}\}\,,\ j = 0, ..., n\,.$$

Considérons les polynômes

$$S_j(X) = \sum_{l_j=1}^{A_j-1} c_{j,l_j} X^{\underline{\beta}_{j,l_j}}\,,\ j = 0, ..., n,$$

comme des polynômes à coefficients dans l'anneau aux indéterminées

$$\mathbb{C}[c_{01}, ..., c_{0,A_0-1}, ..., c_{n,1}, ..., c_{n,A_n-1}]\,.$$

Puisqu'il s'agit de $n+1$ polynômes en n variables, ces polynômes doivent être algébriquement liés. Il doit donc exister un polynôme $\mathcal{Q}$, non identiquement nul, à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}[c_{01}, ..., c_{0,A_0-1}, ..., c_{n,1}, ..., c_{n,A_n-1}]$, tel que

$$\mathcal{Q}(c_{01}, ..., c_{0,A_0-1}, ..., c_{n,1}, ..., c_{n,A_n-1}, S_0, ..., S_n) \equiv 0\,.$$

Mais il en résulte alors que tout élément $c = (c_0, ..., c_n)$ de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ doit satisfaire automatiquement la relation

$$\mathcal{Q}(c_{01}, ..., c_{0,A_0-1}, ..., c_{n,1}, ..., c_{n,A_n-1}, -c_{0,0}, ..., -c_{n,0}) = 0\,,$$

ce qui montre bien que que $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A})} \neq \mathbb{P}^{A_0-1,...,A_n-1}$ comme voulu. Le fait que $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ se trouve définie sur $\mathbb{Q}$ résulte de la théorie de l'élimination classique (voir par exemple [23], chapitre IX,& 3). $\diamondsuit$

Nous donnerons ultérieurement une condition nécessaire et suffisante pour que la variété algébrique $\overline{\mathcal{U}}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)$ soit de codimension 1 : cette condition s'énoncera en fait de manière très simple, en disant que la variété $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ est de codimension 1 si et seulement si l'un au moins des volumes mixtes

$$\mathcal{M}(\mathrm{conv}(\mathcal{A}_0, ..., \widehat{\mathrm{conv}\,\mathcal{A}_j}, ..., \mathrm{conv}(\mathcal{A}_n))$$

est non nul (ici le chapeau signifie l'exclusion).

1.5 Élimination pleine

Considérons maintenant non plus $n+1$ mais $n > 1$ sous-ensembles finis $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ de $\mathbb{N}^n$ définis par

$$\widetilde{\mathcal{A}}_j = \widetilde{\mathcal{A}}(D_j) := \{\underline{\xi} \in \mathbb{N}^n;\ \xi_1 + \ldots + \xi_n = D_j\}\,, \quad j = 1, ..., n,$$

où $D_1, ..., D_n$ sont n entiers strictement positifs. Le cardinal de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ est égal à la dimension de l'espace des polynômes homogènes en n variables et de degré D_j et vaut

$$\#\widetilde{\mathcal{A}}(D_j) = \widetilde{A}(D_j) = \binom{n + D_j - 1}{n - 1}\,.$$

On indexera les éléments de $\widetilde{\mathcal{A}}(D_j)$ suivant

$$\widetilde{\mathcal{A}}(D_j) = \{\tilde{\alpha}_{j,0}, ..., \tilde{\alpha}_{j,A(D_j)-1}\}\,.$$

Considérons les polynômes homogènes $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n$ de n variables $X_1, ..., X_n$, à coefficients dans l'anneau aux indéterminées

$$\mathbb{Z}[c_1, ..., c_n] = \mathbb{Z}[c_{1,0}, ..., c_{1,\widetilde{A}(D_1)-1}; \ldots;\ c_{n,0}, ..., c_{n,\widetilde{A}(D_n)-1}]$$

définis par

$$\mathcal{P}_j(c, X) := \sum_{l_j=0}^{\widetilde{A}(D_j)-1} c_{j,l_j} X^{\underline{\tilde{\alpha}}_{j,l_j}}\,,\ j = 1, ..., n\,.$$

Notons aussi

$$\mathcal{A}(D_j) := \{\underline{l} \in \mathbb{N}^{n-1};\ l_1 + \ldots + l_{n-1} \leq D_j\}\,.$$

Les ensembles $\mathcal{A}(D_1), ..., \mathcal{A}(D_n)$ constituent n sous-ensembles finis de $\mathbb{N}^{n-1}$. Les volumes mixtes

$$\mathcal{M}_{n-1}\Big(\mathcal{A}(D_1), ..., \widehat{\mathcal{A}(D_j)}, ..., \mathcal{A}(D_n)\Big)\,,\ j = 1, ..., n,$$

sont ici immédiats à calculer et l'on a

$$\mathcal{M}_{n-1}\Big(\mathcal{A}(D_1),...,\widehat{\mathcal{A}(D_j)},....,\mathcal{A}(D_n)\Big) = \prod_{k\neq j} D_k\,, \quad j=1,...,n\,.$$

La théorie de l'élimination creuse développée dans la section 1.4 précédente nous permet d'associer à une telle famille un sous-ensemble algébrique $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1),...,\mathcal{A}(D_n))}$ de $\mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$ (qui d'ailleurs s'avère irréductible, propre, et défini sur $\mathbb{Q}$). Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 1.5 *Dire que $c=(c_1,...,c_n)$ appartient à $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1),...,\mathcal{A}(D_n))}$ est équivalent à dire que, pour ce choix spécifique de c, les polynômes*

$$(\mathcal{P}_1(c,X_1,...,X_n),\ldots,\mathcal{P}_n(c,X_1,...,X_n))$$

(considérés comme polynômes homogènes en $X_1,...,X_n$ à coefficients précisés par ce choix de c) ont au moins un zéro commun $\zeta\in\mathbb{C}^n\setminus\{(0,...,0)\}$.

Remarque. Compte tenu de ce que nous avons admis par anticipation dans la section précédente concernant la condition nécessaire et suffisante suivant laquelle on peut affirmer que $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1),...,\mathcal{A}(D_n))}$ est de codimension 1, on est assuré que c'est le cas ici et qu'il existe donc un polynôme $\mathcal{R}(D_1,...,D_n)$, dit <u>*résultant*</u> des n-formes à coefficients indéterminés $\mathcal{P}_1,...,\mathcal{P}_n$, tel que l'on ait l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

(i) $\quad\mathcal{R}(c)\neq 0$

(ii) $\quad\exists\eta>0,\quad\forall\xi\in\mathbb{S}^{2n-1}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|=1\},\quad\max_{1\leq j\leq n}|\mathcal{P}_j(c,\xi)|\geq\eta\,.$

Ce polynôme est irréductible et défini sur $\mathbb{Q}$. On trouvera une présentation classique (et beaucoup plus complète) du résultant de n formes homogènes (construction, propriétés caractéristiques) dans le chapitre IX, section 3, de [23] (en particulier le lemme 3.7 fournissant un moteur de construction basé sur l'utilisation d'un argument d'algèbre linéaire). Cette théorie de l'élimination pleine est essentiellement due à Macaulay. Le principe de l'élimination creuse est lui en germe dans les travaux de Cayley.

Preuve de la proposition.

Supposons dans un premier temps que $c=(c_1,...,c_n)$ soit un point de

$$\mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$$

tel que

$$c\in\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1),...,\mathcal{A}(D_n))}\,.$$

Ceci signifie qu'il existe une suite $(c^{(k)})_{k\geq 0}$ de points de $\mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$ convergeant vers c (pour la métrique usuelle sur le produit d'espaces projectifs) et telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les polynômes "dés-homogénéisés"

$$P_j(c^{(k)}, Y_1, ..., Y_{n-1}) = \mathcal{P}_j(c^{(k)}, 1, Y_1, ..., Y_{n-1})\,, \quad j = 1, ..., n$$

(considérés comme polynômes en $Y_1, ..., Y_n$ à coefficients spécifiés $c^{(k)}$) aient au moins un zéro commun $\xi^{(k)} \in \mathbb{T}^{n-1}$. Il en résulte que les n fonctions

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mapsto \mathcal{P}_j(c^{(k)}, \xi_1, ..., \xi_n)$$

(considérées comme des fonctions continues sur la sphère unité de $\mathbb{C}^n$) ont au moins un zéro commun $(\tilde{\xi}^{(k)})$ sur $\mathbb{S}^{2n-1}$. De la suite de points $(\tilde{\xi}^{(k)})_{k\geq 0}$ (qui est une suite de points d'un compact) on peut extraire une sous-suite convergente (disons vers $\tilde{\xi} \in \mathbb{S}^{2n-1}$). En faisant tendre k vers l'infini et en utilisant le fait que la suite $(c^{(k)})_{k\geq 0}$ converge vers c, on en déduit

$$\mathcal{P}_j(c, \tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_n) = 0\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

Il existe donc bien une solution dans $\mathbb{C}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ pour le système d'équations

$$\mathcal{P}_j(c, X_1, ..., X_n) = 0\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

Prouvons maintenant la réciproque. Supposons que $c \in \mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$ soit tel que les polynômes $\mathcal{P}_j(c, X_1, ..., X_n)$, $j = 1, ..., n$, aient un zéro commun

$$\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}\,.$$

Supposons pour fixer les idées que $\zeta_1 \neq 0$. Alors les polynômes en $n-1$ variables $\mathcal{P}_j(c, 1, Y_1, ..., Y_{n-1})$, $j = 1, ..., n$, ont un zéro commun ξ dans $\mathbb{C}^{n-1}$. On peut approcher ξ par une suite de points $(\xi^{(k)})_{k\geq 0}$ de $\mathbb{T}^{n-1}$. Les polynômes "perturbés"

$$\mathcal{P}_j(c, 1, Y_1, ..., Y_{n-1}) - \mathcal{P}_j(c, 1, \xi^{(k)})\,,\ j = 1, ..., n,$$

ont donc une racine commune dans $\mathbb{T}^{n-1}$. Ces polynômes sont aussi des polynômes de supports respectifs les ensembles $\mathcal{A}(D_1), ..., \mathcal{A}(D_n)$. Si $(\tilde{c}^{(k)})_{k\geq 0}$ désigne le point de l'espace $\mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$ correspondant à ces polynômes, on a par conséquent

$$c^{(k)} \in \overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1), ..., \mathcal{A}(D_n))}\,.$$

Mais le fait que

$$\mathcal{P}_j(c, \xi) = 0\,, \quad j = 1, ..., n$$

et que la suite $(\xi^{(k)})_{k\geq 0}$ converge vers ξ implique évidemmment que la suite $(c^{(k)})_{k\geq 0}$ converge vers c dans $\mathbb{P}^{\widetilde{A}(D_1)-1,...,\widetilde{A}(D_n)-1}$. On en déduit bien

$$c \in \overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}(D_1), ..., \mathcal{A}(D_n))}$$

et la proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

1.6 Énoncé des théorèmes de Bézout et de Bernstein

Nous avons en main tous les éléments pour conclure ce chapitre par les deux énoncés des résultats (l'un dû à Bézout dans le cadre "plein", l'autre à D. Bernstein [5] dans le cadre "creux") concernant une information effective quant au premier être que l'on peut associer à un sous-ensemble algébrique discret de $\mathbb{C}^n$ (resp. de $\mathbb{T}^n$) qu'est la dimension de l'espace vectoriel de dimension fini introduit dans l'énoncé de la proposition 1.3. Nous avons les deux résultats suivants :

Théorème 1.1 (Bézout) *Si $P_1, ..., P_n$ sont des polynômes de degrés $D_1, ..., D_n$ définissant un sous ensemble algébrique discret de $\mathbb{C}^n$, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient*

$$\frac{\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]}{(P_1, ..., P_n)}$$

est au plus égale au produit des degrés $D_1 \dots D_n$, l'égalité ayant lieu si et seulement si

$$\mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[c] \neq 0\,,$$

où $c := (c_1, ..., c_n)$, c_j désignant le vecteur des coefficients de la partie homogène de degré D_j du polynôme P_j.

Nous allons formuler un résultat analogue concernant les sous-ensembles algébriques discrets de $\mathbb{T}^n$.

Théorème 1.2 (D. Bernstein) *Soient $\Delta_1, ..., \Delta_n$ n polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A}_j := \Delta_j \cap \mathbb{Z}^n$, $j = 1, ..., n$. Soient $F_1, ..., F_n$ n polynômes de Laurent de supports respectifs inclus dans $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ et définissant un sous-ensemble algébrique discret dans $\mathbb{T}^n$. La dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient*

$$\frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_n)}$$

est au plus égale à $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$. De plus l'égalité a lieu si et seulement si pour toute direction η_i^*, $i = 1, ..., s$, orthogonale à une facette du polyèdre $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, on a

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_i^*})(c^{\eta_i^*}) \neq 0\,,$$

où

$$\mathcal{A}_j^{\eta_i^*} := \{\underline{l} \in \mathcal{A}_j;\ < \eta_i^*, \underline{l} >= \min_{\xi \in \Delta_j} < \eta_i^*, \xi >\}\,,\ j = 1, ..., n,$$

$\mathcal{R}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_i^*})$ *désigne le résultant creux de ces ensembles calculé relativement au réseau* $\mathbb{Z}^n \cap (\eta_i^*)^\perp \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ *et* $c^{\eta_i^*} = (c_1^{\eta_i^*}, ..., c_n^{\eta_i^*})$ *désigne le vecteur constitués des listes de coefficients des polynômes de Laurent obtenus à partir des* F_j *en n'en conservant que la partie "la plus en retrait" dans la direction* η_i^**, c'est à dire la combinaison de tous les monômes dont le support se trouve inclus dans* $\mathcal{A}_j^{\eta_i^*}$.

Le chapitre suivant du cours sera consacré à une première preuve (relativement élémentaire) de ces deux théorèmes. La quantité présentée ici comme la dimension de l'espace quotient sera aussi interprétée (dans le chapitre 2) comme le nombre de points d'intersection (comptés avec multiplicité) des hypersurfaces $\{P_j = 0\}$ dans $\mathbb{C}^n$, $j = 1, ..., n$ (ou $\{F_j = 0\}$, $j = 1, ..., n$, dans $\mathbb{T}^n$). La formulation du théorème de Bézout, si elle remonte à Bézout dans le cas classique de l'intersection de deux courbes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, est essentiellement due à Cayley, Macaulay,... En ce qui concerne le résultat de Bernstein, il s'agit d'un résultat beaucoup plus récent [5] et pourtant tout à fait parallèle.

Chapitre 2

Les théorèmes de Bézout et de Bernstein

2.1 Multiplicité locale d'intersection

Dans cette section, nous nous placerons au voisinage d'un point z_0 d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n et nous considèrerons m germes de fonctions holomorphes $f_1, ..., f_m$ sur $\mathcal{X}$ au voisinage de z_0, tels que le germe de variété défini en z_0 par les f_j, $j = 1, ..., m$, soit de dimension 0. Le théorème des zéros de Noether, appliqué dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z_0}$, nous assure alors que

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X},z_0}}{(f_1, ..., f_m)}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ; la dimension de cet espace vectoriel est appelée <u>*multiplicité locale d'intersection*</u> au point z_0 des germes d'hypersurfaces (considérées avec multiplicité) $\{f_j = 0\}$, $j = 1, ..., m$. On la note $\mu(f_1, ..., f_m; z_0)$.

Il faut prendre garde ici au fait qu'il existe <u>une autre notion de multiplicité</u>, plus en relation avec le point de vue issu de la théorie des anneaux locaux (voir par exemple le livre de Serre [29]) : l'idéal $\mathcal{N}_{z_0}(f)$ engendré par les f_j, $j = 1, ..., m$, dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z_0}$ est un idéal $\mathcal{M}$ primaire ($\mathcal{M}$ désignant l'idéal maximal de cet anneau local). On sait alors (voir par exemple [29], sections II (B)) qu'il existe un entier ν_0 tel que, pour tout $\nu \geq \nu_0$, la fonction

$$\nu \mapsto \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X},z_0}}{[\mathcal{N}_{z_0}(f)]^\nu}$$

prenne les mêmes valeurs qu'une fonction polynomiale de degré la dimension de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z_0}$, soit ici n, et à coefficients rationnels. Cette fonction polynomiale s'écrit

$$P_f(\nu) = \frac{e(f;z_0)}{n!}\nu^n + \ldots$$

et la <u>*multiplicité au sens de Serre*</u> de l'idéal $\mathcal{M}$-primaire $\mathcal{N}_{z_0}(f)$ est par définition l'entier $e(f;z_0)$ (voir [29], section V (A)). Nous verrons que cette multiplicité au sens de Serre s'appréhende plus facilement via des outils analytiques que la multiplicité d'intersection que nous avons introduit précédemment. Cependant, dans le cas $m = n$, ces deux notions coïncident, comme nous le verrons ultérieurement. Dans le suite de ce paragraphe, nous nous en tiendrons cependant à la première notion introduite.

On sait bien, dans le cas $n = m = 1$, $\mathcal{X} = \mathbb{C}$, qu'il existe une formule intégrale pour représenter la multiplicité en un point ; si f désigne un représentant défini dans un disque $D(0,\epsilon)$ du germe $\dot{f}$, tel que z_0 soit le seul zéro de f dans ce disque, alors la multiplicité locale de $\{f = 0\}$ en z_0 est donnée par la formule

$$\mu(f;z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial U}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\,,$$

où U désigne n'importe quel ouvert contenant z_0 tel que $\overline{U} \subset D(0,\epsilon)$ et que ∂U soit C^1 par morceaux. C'est là une conséquence immédiate du théorème des résidus. Il se trouve que ce résultat s'étend sans difficulté au cas $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$, $m = n$. Mieux, la souplesse qu'octroie le nombre de degrés de liberté (ici n au lieu de 1) autorise un éventail beaucoup plus riche de formules de représentation intégrale pour la multiplicité.

On verra toutefois que l'existence de telles formules de représentation intégrale (formules dans lesquelles le symbole intégral lui même ne joue qu'un rôle neutre) pose bien plus de problèmes dans le cas où $m > n$ (une telle formule se trouve par exemple proposée dans [24], mais son étude dépasse pour l'instant le contenu de ce cours). À titre d'exercice, on pourra montrer cependant que dans le cas où $n = 1$ et $f_1, \ldots, f_m$ sont m fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors, pour toute fonction φ de support compact dans U, holomorphe au voisinage de $\{f_1 = \ldots = f_m = 0\}$,

$$\sum_{\alpha\in\{f_1=\ldots=f_m=0\}} \mu(f_1,\ldots,f_m;\alpha)\,\varphi(\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\,\frac{1}{\epsilon}\int_{|f_1|^2+\ldots+|f_m|^2=\epsilon}\varphi\Big(\sum_{j=1}^m \overline{f_j}df_j\Big)$$

On raisonnera localement au voisinage d'un point α et l'on écrira

$$f_j(\zeta) = (\zeta-\alpha)^{\nu_j(\alpha)}g_{j,\alpha}(\zeta)\,,\quad g_{j,\alpha}(\alpha) \neq 0\,,$$

au voisinage de α, auquel cas bien sûr

$$\mu(f_1,\ldots,f_m;\alpha) = \inf_{1\le j\le m}\nu_j(\alpha)\,.$$

Ce qui précède nous incite à nous cantonner au cas $m = n$; dans ce cadre, nous avons le :

Théorème 2.1 *Soient $f_1, ..., f_n$ n fonctions holomorphes dans une boule $B(\underline{0}, \epsilon)$ de $\mathbb{C}^n$, telles que $\{\underline{0}\} = B(\underline{0}, \epsilon) \cap \{f_1 = \ldots = f_n = 0\}$. Alors, si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant z_0 tel que $\overline{U} \subset B(\underline{0}, \epsilon)$ et que ∂U soit C^1 par morceaux, st si $s = (s_1, ..., s_n)$ est un n-uplet de fonctions de classe C^1 dans un voisinage V de ∂U, avec*

$$s_1(\zeta) f_1(\zeta) + \ldots + s_n(\zeta) f_n(\zeta) = 1 \qquad \forall \zeta \in V\,, \tag{2.1}$$

alors

$$\mu(f_1, ..., f_n; \underline{0}) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} \Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} s_j \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} ds_l \Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} df_j \,. \tag{2.2}$$

En particulier, si $s_j = \overline{f_j}/\|f\|^2$, où $\|f\|^2 := \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2$, on a

$$\mu(f_1, ..., f_n; \underline{0}) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} \frac{\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{f_j} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \overline{df_j} \Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} df_j}{\|f\|^{2n}} \,. \tag{2.3}$$

Ces formules, dites <u>formules de Bochner-Martinelli</u>, se transposent immédiatement du cadre de $\mathbb{C}^n$ au cadre d'une variété analytique complexe de dimension n (compte tenu du fait qu'il s'agisse de formules locales).

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'hypothèse (que le seul zéro commun à $f_1, ..., f_n$ soit l'origine) implique que la forme différentielle $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ ne saurait être identiquement nulle au voisinage de $\underline{0}$. Prouvons le pour $n = 2$. Il est clair que $df_1 \not\equiv 0$ au voisinage de 0 (sinon $f_1 \equiv 0$ au voisinage de 0, ce qui contredit le fait que $\underline{0}$ est un zéro commun isolé de (f_1, f_2)). Il existe donc ξ (que l'on peut supposer aussi voisin de $\underline{0}$ que l'on veut) tel que $df_1(\xi) \neq 0$. Mais la condition

$$df_1 \wedge df_2 \equiv 0$$

au voisinage de ξ implique alors que f_2 est une fonction de f_1 au voisinage de ξ ; la variété des zéros communs de $(f_1 - f_1(\xi), f_2 - f_2(\xi))$ serait de dimension strictement positive et devrait donc pouvoir s'échapper d'une boule $B(\underline{0}, \epsilon)$ au voisinage de laquelle f_1 et f_2 sont holomorphes. Ceci est exclus si ξ est assez voisin de $\underline{0}$ car alors

$$\min_{\|\zeta\| = \epsilon} \Big[|f_1 - f_1(\xi)| + |f_2 - f_2(\xi)| \Big] \geq \frac{1}{2} \min_{\|\zeta\| = \epsilon} \|f(\zeta)\| > 0\,.$$

On laisse en exercice le soin d'adapter cette preuve du cas $n = 2$ au cas quelconque.

Venons en maintenant à la preuve de la formule proprement dite.

Elle se fait tout d'abord dans le cas très simple où les fonctions f_j sont les fonctions coordonnées $f_j = \zeta_j$, $j = 1, ..., n$ (on voit ici l'importance que revêt le fait que $m = n$). On sait que, si $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont n nombres strictement positifs et si le n-cycle réel analytique

$$\Gamma_\epsilon := \{|\zeta_1|^2 = \epsilon_1, \dots, |\zeta_n|^2 = \epsilon_n\}$$

est convenablement orienté, alors on a, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de $\underline{0}$, pour tout $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ assez petits,

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{h(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \dots \zeta_n} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^{n} \frac{d|\zeta_j|^2}{|\zeta_j|^2} = \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \frac{1}{\epsilon_1 \dots \epsilon_n} \int_{\Gamma_\epsilon} h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^{n} d|\zeta_j|^2 \,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si maintenant nous désignons par Σ_{n-1} le $n-1$-simplexe de $\mathbb{R}^n$ (de volume de Lebesgue $n-1$ dimensionnel $1/(n-1)!$) défini par

$$\Sigma_{n-1} := \{\xi \in [0, \infty[^n;\ \xi_1 + \dots + \xi_n = 1\}\,,$$

nous en déduisons, par simple "moyennisation" des identités de Cauchy (2.4), lorsque η est assez petit, la formule de représentation

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{(n-1)!}{\eta^n} \int\limits_{\eta\Sigma_{n-1}} \Big[\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} h(\zeta) \bigwedge_{j=1}^{n} d|\zeta_j|^2\Big] dV_{n-1}(\epsilon) = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|^2=\eta} h(\zeta) \frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{\zeta_j} \bigwedge\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} d\overline{\zeta_l}\Big) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} d\zeta_j}{\|\zeta\|^{2n}} \end{aligned}$$

Par simple changement de variable, on en déduit que si $g_1, ..., g_n$ sont n fonctions holomorphes au voisinage de 0 telles que

$$\det \Big[\frac{\partial g_j}{\partial \zeta_k}\Big]_{1\leq j,k\leq n} (\underline{0}) \neq 0\,,$$

alors, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de $\underline{0}$, et pour tout η assez petit

$$h(0) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|g\|^2=\eta} h(\zeta) \frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{g_j} \bigwedge\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \overline{dg_l}\Big) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dg_j}{\|g\|^{2n}}\,.$$

Passons maintenant à une version non plus locale, mais semi-locale de ce résultat en supposant que $\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n$ sont n fonctions holomorphes au voisinage d'un ouvert borné U de $\mathbb{C}^n$, à frontière C^1 par morceaux. Supposons aussi que $\|\tilde{g}\|^2 > 0$ sur ∂U et que les zéros communs de $\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n$ dans U sont des points α isolés dans U et tels que

$$\det \Big[\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial \zeta_k}\Big]_{1\leq j,k\leq n} (\alpha) \neq 0\,,$$

ce qui implique (d'après Bolzano-Weierstrass) que ces points α constituent un sous-ensemble fini $V(\tilde{g}; U)$ de U. Supposons que h soit une fonction holomorphe au voisinage de U. On remarque (c'est un calcul très simple) que la forme différentielle

$$h\frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{\tilde{g}_j} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \overline{d\tilde{g}_l}\Big) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} d\tilde{g}_j}{\|\tilde{g}\|^{2n}} = h\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\tilde{s}_j \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} d\tilde{s}_l\Big) \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n\,,$$

où $\tilde{s}_j = \overline{\tilde{g}_j}/\|\tilde{g}\|^2$, $j = 1, ..., n$, est une forme différentielle fermée dans l'ouvert $U \setminus \{\|\tilde{g}\| = 0\}$ (de classe C^1 jusqu'au bord de U) ; ceci résulte simplement du fait que, dans $U \setminus \{\|\tilde{g}\| = 0\}$, on a

$$\tilde{s}_1\tilde{g}_1 + \ldots + \tilde{s}_n\tilde{g}_n \equiv 1$$

et donc, en différentiant et en utilisant l'holomorphie des $\tilde{g}_j$, $j = 1, ..., n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_j d\tilde{s}_j \equiv 0 \mod (d\zeta_1, ..., d\zeta_n)\,,$$

d'où il suit bien sûr que (toujours dans l'ouvert $U \setminus \{\|\tilde{g}\| = 0\}$),

$$d\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\tilde{s}_j \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} d\tilde{s}_l\Big)\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n\Big] = n d\tilde{s}_1\wedge\ldots\wedge d\tilde{s}_n\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n \equiv 0\,.$$

On déduit alors du théorème de Stokes que l'on a

$$\sum_{\alpha\in V(\tilde{g};U)} h(\alpha) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h(\zeta)\frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{\tilde{g}_j} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \overline{d\tilde{g}_l}\Big) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} d\tilde{g}_j}{\|\tilde{g}\|^{2n}}\,.$$

Revenons maintenant au cas des fonctions $f_1, ..., f_n$ holomorphes au voisinage de $\underline{0}$ et prenons U comme dans l'énoncé du théorème. Si $\eta_1, ..., \eta_n$ sont des nombres complexes de module assez petit ($\|\eta\| < \min_{\partial U} \|f\|$), on a

$$\min_{\partial U} \|f - \eta\| > 0\,,$$

où $f-\eta := (f_1-\eta_1, ..., f_n-\eta_n)$. Un résultat important de géométrie différentielle, le théorème de Sard [28], assure que l'ensemble des <u>*valeurs critiques*</u> de l'application

$$\zeta \mapsto f(\zeta) := (f_1(\zeta), ..., f_n(\zeta))$$

(considérée comme application d'un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$) est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. On rappelle que $(\eta_1, ..., \eta_n)$ est une valeur critique de $(f_1, ..., f_n)$ si et seulement si η est l'image par $(f_1, ..., f_n)$ d'un point critique, c'est à dire d'un point ζ_η où le rang de la matrice Jacobienne de f est strictement inférieur au rang "générique" de cette matrice Jacobienne (ici $2n$). Ainsi, pour η de norme assez petite et "générique" (c'est à dire hors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{C}^n$), on est assuré que, outre le fait que $g^{[\eta]} = f - \eta$ n'a qu'un nombre fini de zéros communs dans U (et aucun sur ∂U), tous ces zéros communs sont des zéros simples. On a donc, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de U,

$$\sum_{\alpha \in V(g^{[\eta]};U)} h(\alpha) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h(\zeta) \frac{\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{g_j^{[\eta]}} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \overline{dg_l^{[\eta]}}\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} dg_j^{[\eta]}}{\|g^{[\eta]}\|^{2n}} \tag{2.5}$$

En appliquant cette formule à la fonction $h \equiv 1$, il vient

$$\operatorname{card} V(g^{[\eta]}; U) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} \frac{\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{g_j^{[p]}} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \overline{dg_l^{[\eta]}}\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} dg_j^{[\eta]}}{\|g^{[\eta]}\|^{2n}}.$$

Puisque le membre de droite de cette formule se présente clairement comme une fonction continue de η (η étant hors de l'ensemble exceptionnel), et que le membre de gauche est un entier, on en déduit que cette fonction de η se prolonge à un voisinage de $\underline{0}$ en une fonction constante, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Il reste à démontrer que l'entier obtenu ainsi correspond bien à la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{O}/(f_1, ..., f_n)$, soit au nombre $\mu(f_1, ..., f_n; \underline{0})$. Notre démarche ici suit celle proposée par exemple dans [15], chapitre 6. Notons $N = N(f)$ ce nombre. On commence par remarquer que $N(f)$ est exactement le degré de transcendance de l'extension $[\mathcal{O}_\zeta : f^*\mathcal{O}_w]$, où $\mathcal{O}_\zeta$ désigne l'anneau local des germes de fonctions holomorphes de n variables en $\underline{0}$ (les variables étant ici notées ζ) et $f^*\mathcal{O}_w$ le pull-back (via l'application f de $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ dans $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$) de l'anneau local $\mathcal{O}_w$. Ceci signifie que N est le plus petit entier tel que, pour tout élément $h \in \mathcal{O}_\zeta$, il existe des éléments $a_1, ..., a_d \in \mathcal{O}_w$

(dépendant bien sûr de h et s'annulant en $\underline{0}$ si $h(\underline{0}) = 0$) avec

$$h^N(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{d} a_j(f(\zeta))h(\zeta)^{N-j}$$

(en tant que germes en $\zeta = 0$). Pour vérifier ce point, il suffit de remarquer que, si w est générique et voisin de $\underline{0}$ dans $\mathbb{C}^n$, l'application $g^{[w]} := (f_1 - w_1, ..., f_n - w_n)$ présente N zéros simples, tous dans U, notés $\alpha^{[w],1}, ..., \alpha^{[w],N}$, et que l'on a, pour tout k entre 1 et N,

$$\sum_{l=1}^{N}(h(\zeta^{[w],l})^k = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h^k(\zeta) \frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{g_j^{[w]}} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \overline{dg_l^{[w]}}\Big) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dg_j^{[w]}}{\|g^{[w]}\|^{2n}} \tag{2.6}$$

(il s'agit ici d'un cas particulier d'application de la formule (2.5), avec h remplacé par h^k). Comme le montre un calcul que l'on laisse en exercice (ce n'est pas immédiat au premier coup d'oeil) le second membre de la formule (2.6) définit une fonction holomorphe de w au voisinage de 0. On déduit des formules de Newton l'expression des N fonctions symétriques élémentaires des $h(\alpha^{[w],l})$, $l = 1, ..., N$, comme des germes de fonctions holomorphes en w, notés $a_1, ..., a_N$. On a par construction même des a_j, l'identité

$$h^N(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{d} a_j(f(\zeta))h(\zeta)^{N-j} .$$

D'autre part, N est le plus petit entier possible tel que l'on puisse trouver une relation du type ci-dessus pour <u>tout</u> élément h de $\mathcal{O}_\zeta$. En effet, comme les points $\alpha^{[w],1}, ..., \alpha^{[w],N}$ sont génériquement distincts, il est impossible de trouver un entier $d < N$, tel que, pour <u>tout</u> $h \in \mathcal{O}_\zeta$, il existe d germes de fonctions $b_1, ..., b_d$ de w (dépendant toujours de h), avec

$$h^d(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{d} b_j(f(\zeta))h(\zeta)^{d-j}$$

(en tant que germes en $\zeta = 0$). Ceci implique deux choses : d'une part, il en résulte que la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient

$$\mathcal{O}/(f_1, ..., f_n)$$

est au plus N. D'autre part, si l'on considère $\mathcal{O}_\zeta$ comme un $\mathcal{O}_w$-module via le transport (ou pull-back) par l'application f, l'action de $a \in \mathcal{O}_w$ sur $h \in \mathcal{O}_\zeta$ étant définie par

$$a \bullet h := \zeta \mapsto a(f(\zeta))h(\zeta) ,$$

il résulte d'un argument de platitude que $\mathcal{O}_\zeta$ est un $\mathcal{O}_w$ module libre de rang N. Le lemme de Nakayama (voir par exemple [22], page 119) implique alors que si $(u_1, ..., u_d)$ est un système de générateurs de $\mathcal{O}_\zeta/(f_1, ..., f_n)$, alors $d \geq N$; ceci montre donc aussi que

$$\dim \mathcal{O}_\zeta/(f_1, ..., f_n) \geq N$$

et que l'on a donc l'égalité attendue

$$N = \mu(f_1, ..., f_n; \underline{0}) .$$

On a donc démontré la formule (2.3). Pour passer de la formule (2.3) à la formule (2.2), on introduit, pour $t \in [0, 1]$, la fonction de classe C^1 dans $[0, 1] \times V$

$$(t, \zeta) \mapsto ts(\zeta) + (1 - t)\frac{\overline{f}}{\|f\|^2} ,$$

puis on note, si h est une fonction holomorphe au voisinage de U

$$I(h; t) := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}s_j(t, \cdot) \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} ds_l(t, \cdot)\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} df_j .$$

On vérifie que

$$d_t I(h; t) \equiv 0 ,$$

donc que $I(h; 0) = I(h; 1)$. Comme

$$I(h; 0) = Nh(0) = \mu(f_1, ..., f_n; \underline{0})\ h(0) ,$$

on a aussi

$$I(h; 1) = \mu(f_1, ..., f_n; \underline{0})\ h(0) .$$

La formule (2.2) s'obtient en prenant $h \equiv 1$ au voisinage de U, et l'on en obtient en prime la variante

$$\mu(f_1, ..., f_n; \underline{0})\ h(0) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U} h\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}s_j \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} ds_l\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} df_j \tag{2.7}$$

valable sous les mêmes hypothèses pour s, mais cette fois pour toute fonction h holomorphe au voisinage de U. La preuve du théorème est ainsi terminée. $\diamondsuit$

2.2 La preuve du théorème de Bézout

Nous allons donner une preuve du théorème de Bézout (théorème 1.1) reposant sur un argument de perturbation emprunté à V. Arnol'd, argument dont nous nous inspirerons pour donner plus loin une preuve du théorème de D. Bernstein.

Considèrons ici n polynômes $P_1, ..., P_n$, de degrés respectifs $D_1, ..., D_n$, définissant un sous-ensemble algébrique discret, donc fini de part la proposition 1.2, $\mathcal{Z}(P_1, ..., P_n)$, de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble $\mathcal{Z}(P_1, ..., P_n)$ est donc constitué de p points $\underline{\alpha}_1$,...,$\underline{\alpha}_p$ de $\mathbb{C}^n$ affectés des multiplicités d'intersection $\mu(\underline{P};\, \alpha_1), ..., \mu(\underline{P};\, \underline{\alpha}_p)$, où $\mu(\underline{P};\, \underline{\alpha}_j)$, $j = 1, ..., p$ désigne la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \underline{\alpha}_j}}{(P_1, ..., P_n)\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \underline{\alpha}_j}}$$

introduite dans la section précédente 2.1. Nous admettrons ici deux choses :
– D'une part, que le nombre

$$N := \mu(\underline{P};\, \underline{\alpha}_1) + \ldots + \mu(\underline{P};\, \underline{\alpha}_p)$$

est exactement la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n)$. Ce nombre N est en effet le nombre de zéros (tous simples) de l'application $(P_1 - \epsilon_1, ..., P_n - \epsilon_n)$ (lorsque $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont génériques et de module assez petit) dans une boule $B(0, R)$ contenant tous les points de $\mathcal{Z}(P_1, ..., P_n)$. En reprenant dans le cadre semi-local cette fois et non plus local les arguments utilisés dans la preuve du théorème 2.1, on montre que N est bien la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n)$.
– D'autre part, si $v_1, ..., v_n$ désignent n entiers strictement positifs et si α est un point de $\mathcal{Z}(P_1, ..., P_n)$, alors

$$\mu(P_1^{v_1}, ..., P_n^{v_n};\, \underline{\alpha}) = v_1 \ldots v_n\ \mu(\underline{P};\, \underline{\alpha})\,.$$

Ceci se voit encore via un argument de perturbation ; si les ϵ_{j,l_j}, $1 \leq j \leq n$, $l_j = 1, ..., v_j$, sont génériques et de module assez petit, les polynômes

$$\prod_{l_j=1}^{v_j} (P_j - \epsilon_{j,l_j})\,, \quad j = 1, ..., n\,,$$

ont en effet $v_1 \ldots v_n\, \mu(\underline{P};\, \underline{\alpha})$ zéros communs (tous simples) distincts au voisinage de α.

Il résulte des deux points ci-dessus que si $v \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n)) = \frac{1}{v^n} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/\mathbb{C}[P_1^v, ..., P_n^v])\,.$$

Pour prouver le théorème de Bézout, nous allons montrer dans un premier temps

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1,...,X_n]/\mathbb{C}[P_1^v,...,P_n^v]) \leq \prod_{j=1}^{n}(vD_j+1)\,,$$

d'où nous déduirons en divisant les deux membres de cette inégalité par v^n, puis en faisant tendre v vers $+\infty$, que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1,...,X_n]/(P_1,...,P_n)) \leq D_1 \dots D_n\,.$$

Ceci concluera à la majoration de N par le produit $D_1 \dots D_n$. Il ne restera plus ensuite pour prouver le théorème de Bézout qu'à étudier à quelle situation géométrique correspond le fait d'avoir l'égalité et non plus l'inégalité.

Soit $B(\underline{0},R)$ une boule de $\mathbb{C}^n$ de rayon assez grand de manière à ce qu'elle contienne tous les zéros communs de $P_1,...,P_n$. Le nombre de zéros communs (comptés avec multiplicités) de $(P_1^v,...,P_n^v)$ dans $B(0,R)$ est donné (cela résulte de la formule (2.2) et du théorème de Stokes) par

$$N_P(v) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\|\zeta\|=R}\frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{P_j}^v\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}d\overline{P_l^v}\Big)\wedge\bigwedge\limits_{j=1}^{n}dP_j^v}{(|P_1|^{2v}+\ldots+|P_n|^{2v})^n}\,.$$

Il résulte de cette formule que ce nombre est aussi le même que celui du nombre de zéros communs dans la même boule des polynômes

$$P_{j,v,t} = tX_j^{D_jv+1}+P_j^v\,,\quad j=1,...,n\,,$$

lorsque $t \in \mathbb{C}$ désigne un paramètre de module assez petit. Or la dimension de l'espace quotient

$$\mathbb{C}[X_1,...,X_n]/(P_{1,v,t},...,P_{n,v,t})$$

lorsque $t \neq 0$ est immédiate à calculer et vaut $(vD_1+1)\dots(vD_n+1)$ (car une base du quotient est réalisée par tous les monômes $X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$, avec $0 \leq k_j \leq vD_j$ pour $j=1,...,n$). On a donc automatiquement

$$N_P(v) \leq \prod_{j=1}^{n}(vD_j+1)\,,$$

d'où le résultat

$$\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[X_1,...,X_n]}{(P_1,...,P_n)} \leq D_1\dots D_n\,,$$

ce qui clôt la preuve du premier volet du théorème de Bézout.

Remarque. *À ce point de la preuve, on peut faire la remarque suivante. Le fait que la dimension de* $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]/(P_{1,v,t},...,P_{n,v,t})$ *soit égale au produit* $(vD_1+1)\cdots(vD_n+1)$ *s'interprète aussi* <u>*analytiquement*</u>*, suivant une approche mise en lumière par exemple dans* [1]*, section* IV-21*, ou* [32]*, section* II.8 *. Notons pour abréger* $P_{j,v,t}=Q_j$*,* $\deg Q_j = d_j$ *et considérons un polynôme quelconque* $H \in \mathbb{C}[X_1,...,X_n]$*. Soit, pour* R *assez grand,* $U(\underline{q},R)$ *l'ellipsoïde de* $\mathbb{C}^n$ *défini par*

$$U(\underline{q},R) := \{|\zeta_1|^{2d_1}+\cdots+|\zeta_n|^{2d_n}=R^2\}\,.$$

La formule de Stokes, couplée avec la formule (2.7)*, implique*

$$\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{Z}(Q_1,...,Q_n)} H(\underline{\alpha}) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\partial U_{\underline{q},R}} H\frac{\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\overline{\zeta_j^{d_j}}\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\overline{d\zeta_l^{d_l}}\wedge\bigwedge\limits_{j=1}^{n}dQ_j}{\sum\limits_{l=1}^{n}\overline{\zeta_l^{d_l}}Q_l}$$

(*il suffit en effet de choisir comme application* $\underline{s}$ *dans la formule* (2.7) *la fonction définie par* $\underline{s}=(s_1,...,s_n)$ *où*

$$s_j(\zeta) = \frac{\overline{\zeta_j^{d_j}}}{\sum\limits_{l=1}^{n}\overline{\zeta_l^{d_l}}Q_l}\,, \quad j=1,...,n \ ).$$

Ensuite, on peut exploiter le fait que $Q_j = t\zeta_j^{d_j}+R_j$*,* $\deg R_j < d_j$ *et développer en série géométrique*

$$\frac{1}{\sum\limits_{l=1}^{n}\overline{\zeta_l^{d_l}}(t\zeta_l^{d_l}+R_l)} = \frac{1}{t^n}\frac{1}{\sum\limits_{l=1}^{n}|\zeta_l|^{2d_l}}\frac{1}{1+\frac{1}{t}\frac{\sum_{l=1}^{n}\overline{\zeta_l^{d_l}}R_l}{\sum_{l=1}^{n}|\zeta_l|^{2q_l}}}$$

en fonction de la quantité

$$\rho := \frac{1}{t}\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\overline{\zeta_l^{d_l}}R_l}{\sum\limits_{l=1}^{n}|\zeta_l|^{2d_l}}$$

qui est strictement inférieure disons à $1/2$ *sur* $\partial U(\underline{q},R)$ *lorsque* R *est assez grand. Après intervertion* (*licite*) *entre l'intégration sur le bord de* $U_{\underline{q},R}$ *et la sommation en série géométrique, on remarque que l'orthogonalité des* $e^{2i\pi k\theta}$*,* $k\in\mathbb{Z}$*, dans* $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *implique que la quantité*

$$\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{Z}(Q_1,...,Q_n)} H(\underline{\alpha})$$

est égale au coefficient du terme

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}$$

dans le développement en série formelle de

$$\begin{aligned} &\frac{H dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_n}{t^n(\zeta_1^{d_1} + \frac{R_1}{t}) \cdots (\zeta_n^{d_n} + \frac{R_n}{t})} = \\ &= \frac{H dQ_1 \wedge \ldots \wedge dQ_n}{t^n \zeta_1^{d_1} \cdots \zeta_n^{d_n}} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 - \frac{R_j}{t\zeta_j^{d_j}} + \frac{R_j^2}{t^2 \zeta_j^{2d_j}} - \cdots\Big) . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ce développement en série formelle se présente comme un développement du type développement de Laurent à n variables puisque l'on vérifie aisément (puisque le degré de R_j est strictement inférieur à d_j pour tout j) que tout monôme $\zeta^{\underline{\beta}}$ ne figure qu'au plus dans un nombre fini de termes du développement. Ceci achève cette remarque, remarque qui nous sera utile par la suite lorsque nous aurons à interpréter ce type de résultat en termes de calcul résiduel. Notons dès à présent ici que dans le cas $n = 1$, ceci revient à interpréter

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{C};\, Q(\alpha)=0\}} H(\alpha)$$

comme

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{C};\, Q(\alpha)=0\}} H(\alpha) = -\mathrm{Res}_{\infty}[HQ' d\zeta/Q] .$$

Reprenons maintenant la suite de la preuve du théorème et Supposons que

$$\mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[c] \neq 0 ,$$

où $c = (c_1, ..., c_n)$, c_j désignant le vecteur des coefficients de la partie homogène p_j de degré D_j de P_j. Les polynômes homogènes $p_1, ..., p_n$ n'ont donc aucun zéro commun sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ et il en résulte l'existence de $\gamma > 0$ tel que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\} , \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{|p_j(\zeta)|}{\|\zeta\|^{D_j}} \geq \gamma .$$

D'où il résulte qu'il existe K tel que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n , \quad \|\zeta\| \geq K \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|P_j(\zeta)|}{\|\zeta\|^{D_j}} \geq \frac{\gamma}{2} .$$

Lorsque $\widetilde{P}_1, \dots \widetilde{P}_n$ sont des polynômes dont les coefficients ($\tilde{c}$) des parties homogènes de plus haut degré sont suffisamment proches des coefficients des P_j (les autres coefficients étant les mêmes que ceux des P_j), on peut donc, en utilisant le théorème 2.1, exprimer la dimension de l'espace $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n)$ (c'est à dire le nombre de zéros communs avec multiplicité aux $\widetilde{P}_j$, $j = 1, ..., n$, dans $\mathbb{C}^n$) via la formule

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]}{(\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n)} =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=R} \Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} s_j(t,\cdot) \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} ds_l(t,\cdot)\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} d\widetilde{P}_j \,,$$

où

$$s_j = \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|\zeta\|^{2D_j}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{|p_j(\zeta)|^2}{\|\zeta\|^{2D_j}}\Big)^{-1}$$

et R est assez grand (en tout cas certainement $R >> K$). Nous pouvons maintenant oublier la clause selon laquelle $\tilde{c}$ était proche de c. La fonction

$$\tilde{c} \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]}{(\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n)}$$

est une fonction continue de $\tilde{c}$ sur $\{\tilde{c};\ \mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[\tilde{c}] = 0\}$; comme elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est localement constante. Or le complémentaire de l'hypersurface $\mathcal{R}(D_1, ..., D_n) \equiv 0$ est connexe dans le produit d'espaces projectifs complexes duquel ce résultant définit une hypersurface algébrique ; on en déduit que la fonction

$$\tilde{c} \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]}{(\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_n)}$$

est <u>constante</u> dans $\{\tilde{c};\ \mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[\tilde{c}] = 0\}$. En calculant sa valeur en un $\tilde{c}$ tel que $\tilde{p}_j = \zeta_j^{D_j}$, $j = 1, ..., n$, on voit que cette constante vaut $D_1 \dots D_n$. On a donc montré ainsi que si $\mathcal{R}(D_1, ..., D_n)(c) \neq 0$, la dimension de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/(P_1, ..., P_n)$ valait $D_1 \dots D_n$.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[c] = 0$. Il existe donc $\underline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$, tel que si p_j désigne la partie homogène de plus haut degré de P_j, on ait

$$p_j(\xi_1, ..., \xi_n) = 0\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

Il existe aussi $\underline{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ tel que, pour tout $j = 1, ..., n$, $P_j(\underline{\alpha}) \neq 0$. Considérons maintenant n polynômes homogènes $p_{0,1}, ..., p_{0,n}$, de degrés respectifs $D_1, ..., D_n$, sans zéros communs dans $(\mathbb{C}^n)^*$ et tels que, pour $j = 1, ..., n$, on ait $p_{0,j}(\underline{\xi})\, p_{0,j}(\underline{\alpha}) \neq 0$ (il est évidemment possible de construire de tels polynômes puisque $\underline{\xi}$, $\underline{\alpha} \neq \underline{0}$). Soit maintenant $P_t := (P_{1,t}, ..., P_{n,t})$ le système perturbé défini par

$$P_{j,t}(X) = p_{0,j}(t\underline{\alpha} + \underline{\xi})\, P_j(X) - t^{D_j} P_j(\underline{\alpha} + \frac{\underline{\xi}}{t})\, p_{0,j}(X) =$$
$$= t^{D_j} \Big(p_{0,j}(\underline{\alpha} + \frac{\underline{\xi}}{t})\, P_j(X) - P_j(\underline{\alpha} + \frac{\underline{\xi}}{t})\, p_{0,j}(X) \Big)\,.$$

Ce système perturbé possède par construction même une racine

$$\underline{\zeta}(t) = \underline{\alpha} + \frac{\underline{\xi}}{t}$$

qui tend vers l'infini lorsque t tend vers 0. Lorsque t tend vers 0, il s'agit bien d'une perturbation du système $(P_1, ..., P_n)$. Pour t assez voisin de 0, mais non nul, ce système perturbé est, comme le système $(p_{0,1}(X), ..., p_{0,n}(X))$, un système tel que les coefficients c_t des parties homogènes de plus haut degré satisfont $\mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[c_t] \neq 0$ (c'est le cas, comme on le vérifiera, lorsque t tend vers $+\infty$ et donc lorsque t est générique, c'est à dire hors d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$). Pour $t \neq 0$ et de module assez petit, le système perturbé $(P_{1,t}, ..., P_{n,t})$ a par conséquent $D_1 \dots D_n$ zéros, dont un $(\underline{\zeta}(t))$ s'échappe à l'infini lorsque t tend vers 0. Ainsi, le nombre de zéros communs au système $(P_1, ..., P_n)$ est-il strictement inférieur à $D_1 \dots D_n$. Ceci achève la preuve du théorème de Bézout.

2.3 La preuve originelle du théorème de Bernstein

2.3.1 Une première tentative (inachevée mais intéressante) via un argument de perturbation "à la Arnol'd"

Formellement, une preuve naturelle du théorème de Bernstein (ou tout au moins du fait que la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient est majorée par le volume mixte des polyèdres de Newton $\Delta_1, \dots, \Delta_n$) consisterait à singer l'argument de perturbation "à la Arnol'd" proposé dans la section 2.2. Soient $(F_1, \dots, F_n)$ n polynômes de Laurent en n variables définissant une variété discrète dans $\mathbf{T}^n$ et $r << 1$ et $R >> 1$ deux réels strictement positifs tels que le domaine borné

$$U(r, R) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ |\zeta_1 \dots \zeta_n| > r\,, \quad \|\zeta\| < R\} \subset \mathbb{T}^n$$

contienne tous les points de $\mathcal{W}(F_1,...,F_n)$. Il résulte toujours du théorème 2.1 et de la formule de Stokes (ainsi que des remarques faites en préambule dans la section 2.2) que si $v \in \mathbb{N}$, si $s_{v,1},...,s_{v,n}$ sont n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\partial U(r,R)$ et telles que

$$s_1 F_1^v + \ldots + s_n F_n^v \equiv 1$$

dans ce même voisinage, alors

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1},...,X_n^{\pm 1}]}{(F_1,...,F_n)} &= \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\,\frac{1}{v^n}\int_{\partial U(r,R)} \Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}s_{v,j}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} ds_{v,l}\Big)\wedge\bigwedge_{j=1}^{n} dF_j^v\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Si Δ désigne la somme de Minkowski des polyèdres $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$, il est immédiat de remarquer que, pour chaque valeur de v, il existe n collections de points

$$\mathcal{E}_j(\Delta_j;v) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Delta_j\,, \quad j=1,...,n\,,$$

telles que :

– d'une part le système de polyèdres convexes "perturbés"

$$\widetilde{\Delta}_j(v) := \mathrm{conv}\Big(v\Delta_j + \mathcal{E}_j(\Delta_j,v)\Big)$$

est un système dit *à arêtes indépendantes*, ce qui signifie que tout système $(\gamma_1,...,\gamma_n)$, où γ_j est le vecteur directeur d'une face de dimension 1 de $\widetilde{\Delta_j}(v)$ (on dit aussi une *arête* de $\widetilde{\Delta_j}(v)$), est une base de $\mathbb{R}^n$. Ceci implique qu'étant donnée une face σ quelconque du polyèdre

$$\widetilde{\Delta}(v) := \sum_{j=1}^{n}\widetilde{\Delta_j}(v)$$

s'écrivant $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$, où σ_j est une face de $\widetilde{\Delta_j}(v)$, $j=1,...,n$, l'une au moins des faces σ_j de la décomposition de σ se réduit automatiquement à un singleton.

– d'autre part

$$\lim_{v\to+\infty}\frac{\mathcal{M}(\widetilde{\Delta_1}(v),...,\widetilde{\Delta_n}(v)) - \mathcal{M}(v\Delta_1,...,v\Delta_n)}{v^n} = 0\,.$$

On se convaincra aisément de ce qu'une telle construction est possible. On peut d'ailleurs supposer aussi que chaque polyèdre

$$\mathrm{conv}(\mathcal{E}_j(\Delta_j, v))\,,\ j = 1, ..., n,$$

est de dimension n et contient $v\Delta_j$ dans son intérieur, auquel cas on a bien sûr

$$\widetilde{\Delta}(v) = \mathrm{conv}\,\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j(\Delta_j, v)\Big)\,.$$

On peut aussi faire en sorte que les points de $\mathcal{E}_j(\Delta_j, v)$ soient exactement les sommets de $\widetilde{\Delta_j}(v)$, ce qui implique que l'ensemble des sommets de $\widetilde{\Delta}(v)$ est l'ensemble des points

$$\underline{l_1} + \ldots + \underline{l_n}\,, \quad \underline{l_j} \in \mathcal{E}_j(\Delta_j, v)\,.$$

On se fixe ensuite v assez grand pour que

$$\frac{\mathcal{M}(\widetilde{\Delta_1}(v), ..., \widetilde{\Delta_n}(v)) - \mathcal{M}(v\Delta_1, ..., v\Delta_n)}{v^n} \leq \frac{1}{2}\,. \tag{2.10}$$

On introduit le système de Laurent perturbé $(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})$, où

$$F_{j,v,t}(X) := t\Big(\sum_{\underline{l} \in \mathcal{E}(\Delta_j, v)} X^{\underline{l}}\Big) + F_j^v(X)\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

Lorsque t tend vers 0, il est immédiat de constater que l'application

$$s_{v,t} = (s_{v,t,1}, ..., s_{v,t,n})\,,$$

où

$$s_{v,t,j} := \frac{s_{v,j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{v,j} F_{j,v,t}}$$

converge uniformément vers s_v sur le bord de $U(r, R)$. Pour t assez petit, le nombre de zéros communs (avec multiplicités) du système perturbé $(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})$ dans $U(r, R)$ étant donné par l'intégrale

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U(r,R)} \Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} s_{v,t,j} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} ds_{v,t,l}\Big) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}\,,$$

il en résulte bien que ce nombre de zéros est égal (d'après la formule (2.9)) au nombre

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1^v, ..., F_n^v)} = v^n \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_n)}\,.$$

Il est facile de s'apercevoir que, pour $t \neq 0$, les polynômes de Laurent $(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})$ définissent encore un ensemble algébrique discret dans $\mathbb{T}^n$. Pour ce faire, nous introduirons ici quelques outils inspirés d'une approche analytique du problème. Étant donné un polyèdre convexe Σ de $\mathbb{R}^n$, nous appellerons <u>*fonction indicatrice*</u> du convexe Σ la fonction définie sur l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ par

$$\forall y^* \in \mathbb{R}^n, \quad H_\Sigma(y^*) = \sup_{\underline{\xi} \in \Sigma} < y^*, \underline{\xi} > \ .$$

On se propose de vérifier que, pour $t \neq 0$, il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $K \geq 0$ telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \|\mathrm{Re}\,\zeta\| \geq K \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_{j,v,t}(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp\Big(H_{\widetilde{\Delta_j(v)}}(\mathrm{Re}\,\zeta)\Big)} \geq \gamma\,. \tag{2.11}$$

On notera le parallèle entre cette clause de croissance à l'infini de la fonction $F_{t,v} = (F_{t,v,1}, ..., F_{t,v,n})$ et celle satisfaite (toujours à l'infini) par une application polynomiale $P = (P_1, ..., P_n)$ dont le résultant des coefficients des parties homogènes de plus haut degré est non nul. Le recours à l'exponentielle s'avère ici techniquement utile pour transférer la structure multiplicative de $\mathbb{T}^n$ en la structure additive de $\mathbb{C}^n$, mais ne joue nullement un rôle essentiel. La vérification de (2.11) tient au fait suivant : dans <u>chaque</u> direction w^* de $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, il existe au moins un indice $j = j(w^*)$ dans $\{1, ..., n\}$ tel que l'ensemble

$$\{\underline{l} \in \widetilde{\Delta_j}(v);\ < w^*, \underline{l} >= \min_{\xi \in \widetilde{\Delta_j}(v)} < w^*, \xi >\}$$

se réduise à un sommet du polyèdre $\widetilde{\Delta_j(v)}$ (cette clause est assuré par le fait que le système perturbé est un système à arêtes indépendantes). Mais le théorème de Liouville (selon lequel il ne saurait exister de fonction holomorphe bornée autre que les constantes sur une variété analytique complexe de dimension 1) implique l'impossibilité, pour l'ensemble analytique

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ F_{j,v,t}(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_j}) = 0,\ j = 1, ..., n\}$$

de contenir un ensemble analytique de dimension 1 (c'est à dire une courbe) qui resterait “piégé” dans la bande $\{\|\mathrm{Re}\,\zeta\| \leq K\}$, comme l'exigerait la contrainte (2.11). Ceci montre donc que les polynômes de Laurent “perturbés” $F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t}$ définissent un sous-ensemble algébrique discret (et donc fini de $\mathbb{T}^n$).

Reprenons le fil de l'argument de perturbation. Pour t assez petit, les systèmes $(F_1^v, ..., F_n^v)$ et $(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})$ ont même nombre de zéros communs (comptés avec multiplicité) à l'intérieur de $U(r,R)$, comme on l'a vu précédemment. On en déduit donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_n)} \leq \frac{1}{v^n} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})}\,.$$

Si l'on prouvait l'inégalité

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})} \leq \mathcal{M}(\widetilde{\Delta_1}(v), ..., \widetilde{\Delta_n}(v))\,,$$

on aurait donc bien montré, compte tenu de (2.9)

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_n)} \leq \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)\,.$$

Or il se trouve qu'exactement comme dans le cas du théorème de Bézout, la configuration géométrique de la situation "perturbée" fait que l'on a en fait l'égalité

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})} = \mathcal{M}(\widetilde{\Delta_1}(v), ..., \widetilde{\Delta_n}(v))\,. \tag{2.12}$$

Cette égalité se ramène à la preuve d'une formule combinatoire de géométrie des convexes car l'on va voir que si G est un polynôme de Laurent quelconque, le calcul de l'expression

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{W}(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})} G(\underline{\alpha})$$

(en fonction de t, de v et des coefficients des F_j) est tout à fait explicite (et algorithmiquement peu coûteux). Avant d'abandonner cette piste, nous indiquerons néanmoins le résultat énoncé dans [14] et dans la thèse de Hai Zhang [33, 34]. Nous reviendrons sur ce résultat lorsque nous aurons à notre disposition l'outil que constituent les <u>*variétés toriques*</u> dont $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un exemple particulier.

Soit $\underline{l}$ un sommet de $\widetilde{\Delta}(v)$; nous pouvons écrire formellement

$$\frac{t^n X^{\underline{l}}}{F_{1,v,t}(X) \dots F_{n,v,t}(X)} = \\ 1 + (1 - R_{v,t}(X)) + (1 - R_{v,t}(X))^2 + ... + (1 - R_{v,t}(X))^k + ...\,, \tag{2.13}$$

où

$$R_{v,t}(X) = \frac{F_{1,v,t}(X)\dots F_{n,v,t}(X)}{t^n X^{\underline{l}}}\,.$$

Du fait que $\underline{l}$ est un sommet de $\widetilde{\Delta}(v)$, chaque monôme n'apparait au plus qu'un nombre fini de fois dans le développement figurant au second membre de (2.13). Si maintenant G est un polynôme de Laurent quelconque, on appelle <u>*résidu au sommet*</u> $\underline{l}$ de la forme différentielle

$$\frac{G \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{j,v,t}}$$

le coefficient du terme

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}$$

dans le développement en série de Laurent

$$\begin{aligned}
&\frac{G \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{j,v,t}} = \\
&= \frac{G \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{t^n \zeta^{\underline{l}}} \Big(1 + (1 - R_{v,t}(X)) + (1 - R_{v,t}(X))^2 + ... + (1 - R_{v,t}(X))^k + ...\Big)\,.
\end{aligned}$$

On notera l'analogie avec les développements explicités dans la remarque de la section 2.2 (formule (2.8) par exemple, où le rôle de $\underline{l}$ est joué par le point $(d_1, ..., d_n)$ de $\mathbb{R}^n$). Ce nombre sera donc par la suite interprété (au signe près) comme un résidu à l'infini (relatif au sommet $\underline{l}$) pour la n-forme différentielle

$$\frac{G \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{j,v,t}}$$

et on le notera

$$\mathrm{Res}_{\infty,\underline{l}} \left[\frac{G \bigwedge\limits_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod\limits_{j=1}^{n} F_{j,v,t}} \right].$$

On montrera ultérieurement qu'il existe des entiers relatifs $k_{\underline{l}}$, $\underline{l}$ décrivant la famille des sommets du polyèdre $\widetilde{\Delta}(v)$, entiers qui ne dépendent <u>que</u> de la géométrie du système de convexes $(\widetilde{\Delta_1}(v), ..., \widetilde{\Delta_n}(v))$, tels que

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{W}(F_{1,v,t}, ..., F_{n,v,t})} G(\underline{\alpha}) =$$

$$= \sum_{\underline{l};\, \underline{l} \text{ sommet de } \widetilde{\Delta}(v)} (-1)^n k_{\underline{l}} \operatorname{Res}_{\infty, \underline{l}} \left[\frac{G \bigwedge_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod_{j=1}^{n} F_{j,v,t}} \right]. \tag{2.14}$$

Dès lors la formule de combinatoire qu'il s'agit de prouver pour obtenir le théorème de Bernstein est facile à poser ; comme on le voit immédiatement, on a, si

$$\underline{l} = \underline{l_1} + \ldots + \underline{l_n}\,,\ \underline{l_j} \text{ sommet de } \widetilde{\Delta}_j(v)\,,$$

$$\operatorname{Res}_{\infty, \underline{l}} \left[\frac{\bigwedge_{j=1}^{n} dF_{j,v,t}}{\prod_{j=1}^{n} F_{j,v,t}} \right] = \det(\underline{l_1}, ..., \underline{l_n})\,.$$

Ainsi la relation combinatoire à prouver si l'on désire démontrer l'identité (2.12) est l'identité combinatoire

$$\mathcal{M}(\widetilde{\Delta_1}(v), ..., \widetilde{\Delta_n}(v)) = (-1)^n \sum_{\substack{\underline{l} \text{ sommet de } \widetilde{\Delta}(v) \\ \underline{l} = \underline{l_1} + \cdots + \underline{l_n}}} k_{\underline{l}} \det(\underline{l_1}, ..., \underline{l_n})\,. \tag{2.15}$$

Il existe un mécanisme combinatoire assez simple pour calculer les coefficients $k_{\underline{l}}$, mécanisme sur lequel nous reviendrons dans la suite du cours ; une fois ceci compris, la preuve de l'identité combinatoire (2.14) se fait naturellement par induction (pour plus de détails sur cet aspect combinatoire, voir [13]). Nous abandonnerons ici cette piste, mais nous y reviendrons avec tant la machinerie des variétés toriques (chapitre 3) que celle du calcul résiduel (chapitre 4).

2.3.2 $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-généricité au sens de Bernstein

Soient $\Delta_1, ..., \Delta_n$ n polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_j := \Delta_j \cap \mathbb{Z}^n$, et

$$F_j = \sum_{\underline{l_j} \in \mathcal{A}_j} c_{j, \underline{l_j}} X^{\underline{l_j}}, \quad j = 1, ..., n\,,$$

n polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs Δ_1, ..., Δ_n. Pour chaque direction w^* de $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ (l'espace $\mathbb{R}^n$ est ici considéré comme espace dual de la copie de $\mathbb{R}^n$ où vivent les ensembles $\mathcal{A}_j$), on peut poser

$$\mathcal{A}_j^{w^*} := \{\underline{l} \in \mathcal{A}_j;\ < w^*, \underline{l} >= \min_{\underline{\xi} \in \Delta_j} < w^*, \underline{\xi} >\}\,,\ j = 1, ..., n$$

(ces ensembles ont été pour l'instant seulement introduits lorsque w^* était l'un des vecteurs orthogonaux aux facettes de $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, et ce dans l'énoncé du théorème de Bernstein 1.2, mais nous en aurons besoin ici pour <u>chaque</u> w^* dans $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$). On peut poser

$$F_j^{[w^*]} = \sum_{\underline{l_j} \in \mathcal{A}_j^{w^*}} c_{j,\underline{l_j}} X^{\underline{l_j}}, \quad j = 1, ..., n \,.$$

Il s'agit de versions tronquées des polynômes de Laurent originaux F_j. Nous aurons besoin dans un premier temps de la

Définition 2.1 *Le système $(F_1, ..., F_n)$ de polynômes de Laurent à polyèdres de Newton précisés $\Delta_1, ..., \Delta_n$ est dit $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique si pour toute direction w^* de $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, on a*

$$\{\zeta \in \mathbb{T}^n ;\ F_j^{[w^*]}(\zeta) = 0,\ j = 1, ..., n\} = \emptyset \,.$$

Ce que signifie de fait cette hypothèse est que, pour tout choix de faces $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ (avec σ_j face de Δ_j) tel que $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ soit une face <u>propre</u> de $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, les polynômes de Laurent

$$F_j^{(\sigma_j)} := \sum_{\underline{l_j} \in \sigma_j} c_{j,\underline{l_j}} X^{\underline{l_j}}, \quad j = 1, ..., n \,,$$

n'ont <u>aucun zéro commun</u> dans $\mathbb{T}^n$. Le fait que $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ soit propre implique qu'il existe un vecteur w^* orthogonal aux faces $\sigma_1, ..., \sigma_n$; il en résulte qu'il existe une transformation monoidale $X = Y^U$, $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que la résolution du système

$$F_j^{(\sigma_j)}(X) = 0 \,,\ j = 1, ..., n, \qquad X \in \mathbb{T}^n,$$

se ramène à celle d'un sysème

$$G_j(Y_2, ..., Y_n) = 0 \,,\ j = 1, ..., n, \qquad (Y_2, ..., Y_n) \in \mathbb{T}^{n-1} \,,$$

c'est à dire un système de n équations à $n - 1$ inconnues. L'argument utilisé pour montrer la propreté de $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ dans la preuve de la proposition 1.4 permet donc de conclure que le système $(F_1, ..., F_n)$ est certainement $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique dès que les coefficients des F_j ne sont pas liés par une certaine relation algébrique.

Il existe aussi une caractérisation analytique de la $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$- généricité ; c'est la proposition suivante, dont la preuve résulte des remarques qui précèdent et d'un argument par induction ([18]). On laisse cette caractérisation souvent utile en exercice ici.

Proposition 2.1 *Le système $(F_1, ..., F_n)$ de polynômes de Laurent à polyèdres de Newton précisés $\Delta_1, ..., \Delta_n$ est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$- générique si et seulement si pour toute face propre $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ de $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, il existe $\epsilon(\sigma) > 0$ tel que*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j^{(\sigma_j)}(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\sigma_j}(\operatorname{Re}\zeta))} \geq \epsilon(\delta)\,, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n\,. \tag{2.16}$$

On déduit facilement de cette proposition le résultat suivant :

Proposition 2.2 *Soient $\Delta_1, ..., \Delta_n$ n polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ et $F_1, ..., F_n$ n-polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$ constituant un système $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique au sens de Bernstein ; il existe alors des constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n,\ \|\operatorname{Re}\zeta\| \geq K \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\operatorname{Re}\zeta))} \geq \gamma\,. \tag{2.17}$$

Preuve. On suppose que $(F_1, ..., F_n)$ est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique. Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que pour tout $w^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, il existe un secteur conique ouvert S_{-w^*} de $\mathbb{R}^n$ de sommet $\underline{0}$, contenant $-w^*$, et des constantes $K(w^*)$ et $\gamma(w^*)$ telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n,\ \|\operatorname{Re}\zeta\| \geq K(w^*) \text{ et } \operatorname{Re}\zeta \in S_{-w^*} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\operatorname{Re}\zeta))} \geq \gamma(w^*)\,.$$

Un argument de compacité permettra ensuite de conclure. Après changement de variable, on peut supposer $w^* = e_1^* = (1, 0, ..., 0)$ et

$$F_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n}) = e^{k_j\zeta_1} f_j(e^{\zeta_2}, ..., e^{\zeta_n}) + r_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})\,,$$

où r_j est une somme d'exponentielles à fréquences réelles incluses dans le demi-espace $\{x_1 > k_j\}$. Les ensembles $\delta_j + k_j e_1$ sont des faces des polyèdres respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$, faces dont la somme est une face propre de $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$. On peut donc appliquer la proposition et affirmer que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|e^{k_j\zeta_1} f_j(e^{\zeta_2}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\delta_j + k_j e_1}(\operatorname{Re}\zeta))} \geq \epsilon > 0\,.$$

Comme les fréquences de r_j sont dans le demi-espace $\{x_1 > k_j\}$, il existe $\rho > 0$ et $\kappa > 0$ tels que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n$, avec $\operatorname{Re}\zeta_1 < -\kappa$ et $|\operatorname{Re}\zeta_j| \leq \rho|\operatorname{Re}\zeta_1|$, $j = 1, ..., n$, on ait

$$H_{\delta_j + k_j e_1}(\operatorname{Re}\zeta) = H_{\Delta_j}(\operatorname{Re}\zeta)$$

et
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|r_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\delta_j + k_j e_1}(\operatorname{Re}\zeta))} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|r_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\operatorname{Re}\zeta))} < \frac{\epsilon}{2} \, . \, .$$
Pour un tel ζ, on a donc
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\operatorname{Re} z))} \geq \frac{\epsilon}{2}$$
de part l'inégalité triangulaire. Nous avons ainsi le secteur conique et les constantes $K(w^*) = \kappa$ et $\gamma(w^*) = \epsilon/2$ voulues. $\diamondsuit$

De fait, la réciproque de cette proposition est vraie, sans que nous ayions encore les moyens de la prouver à ce point du cours ; nous avons donc une caractérisation analytique de condition de généricité de Bernstein.

Nous pouvons aussi traduire encore algébriquement, mais de manière différente, les conditions de généricité de Bernstein en énoncant la

Proposition 2.3 *Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ et $F_1, ..., F_n$ n polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$; avec les notations du théorème 1.2, si le système $(F_1, ..., F_n)$ est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique, alors on a nécessairement*
$$\prod_{\eta_i^* \text{ facette de } \Delta_1 + \ldots + \Delta_n} \mathcal{R}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_i^*})(c^{\eta_i^*}) \neq 0 \, . \tag{2.18}$$

Preuve. Si les conditions de généricité de Bernstein sont remplies, on a, pour tout η_i^* orthogonal à une facette de $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ (il s'agit de directions particulières),
$$c^{\eta_i^*} \notin \mathcal{U}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_n^*}) \, .$$
Comme les conditions de Bernstein restent valides après perturbation, on a aussi
$$c^{\eta_i^*} \notin \overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_n^*})}$$
(l'adhérence étant prise dans le produit d'espaces projectifs correspondants). De part la définition des sous-résultants, il vient bien la condition
$$\prod_{\eta_i^* \text{ facette de } \Delta_1 + \ldots + \Delta_n} \mathcal{R}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_i^*})(c^{\eta_i^*}) \neq 0 \, .$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Remarque. Ici encore, cette proposition a en fait une réciproque que pour l'instant nous n'avons pas encore les moyens de prouver. La preuve nécessitera le recours à l'homogénéisation et par conséquent la théorie des variétés toriques (qui sera développée au chapitre 3). On pourra cependant l'esquisser en dimension 3, en montrant que si η^* est orthogonal à une facette Σ de $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ et si $\mathcal{R}^{\eta^*}(\mathcal{A}_1^{\eta^*}, \mathcal{A}_2^{\eta^*}, \mathcal{A}_3^{\eta^*}) \neq 0$, alors, pour toute face $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ de Σ, les polynômes de Laurent $F_1^{(\sigma_1)}, F_2^{(\sigma_2)}, F_3^{(\sigma_3)}$ n'ont aucun zéro commun dans $\mathbb{T}^3$. Ceci assure bien (dans le cas $n = 3$ au moins) que la condition (2.18) implique la généricité au sens de Bernstein. Il serait assez facile de concevoir une démonstration élémentaire (mais assez pénible) de ce résultat en dimension supérieure ; l'usage des coordonnées homogènes sur une variété torique adaptée rendra cette preuve plus lumineuse, c'est pourquoi nous l'omettrons ici.

Du fait de la remarque ci-dessus, nous ne serons dans cette section capables que de démontrer en fait une version imparfaite du théorème 1.2, à savoir que l'égalité entre dimension du quotient et volume mixte a lieu si et seulement si le système $(F_1, ..., F_n)$ est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique ; il en résultera que si la dimension du quotient est égale au volume mixte, alors la condition (2.18) est remplie. Par contre subsistera le problème de savoir s'il y a bien égalité entre dimension du quotient et volume mixte lorsque précisément (2.18) est satisfait.

2.3.3 La preuve de D. Bernstein

Étant donnés n polyèdres convexes $\Delta_1, ..., \Delta_n$ de $\mathbb{R}^n$, et $(F_1, ..., F_n)$ un système de polynômes de Laurent de polyèdres de Newton précisés Δ_1,...,Δ_n, tel que $(F_1, ..., F_n)$ soit $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique, on peut affirmer, du fait de la proposition 2.2 et du théorème de Liouville (qui exclut qu'un ensemble analytique de dimension strictement positive puisse rester piégé dans un tube $\{\|\mathrm{Re}\,\zeta\| \leq K\}$), que l'ensemble

$$\{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_1(\zeta) = \ldots = F_n(\zeta) = 0\}$$

est un ensemble discret, donc fini. De plus, comme l'on a

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n,\ \|\mathrm{Re}\,\zeta\| \geq K \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\mathrm{Re}\,\zeta))} \geq \gamma\,,$$

on conserve, pour tout système $(\widetilde{F}_1, ..., \widetilde{F}_n)$ obtenu en perturbant (suffisamment peu) les coefficients des F_j, l'inégalité

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n,\ \|\mathrm{Re}\,\zeta\| \geq K \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|\widetilde{F}_j(e^{\zeta_1}, ..., e^{\zeta_n})|}{\exp(H_{\Delta_j}(\mathrm{Re}\,\zeta))} \geq \frac{\gamma}{2}\,.$$

Admettons ici pour simplifier les choses que les conditions de généricité au sens de Bernstein se lisent via la condition (2.18) ; ceci signifie que dire que $(F_1, ..., F_n)$ est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique équivaut à dire que le vecteur de coefficients $(c^{\eta_1^*}, ..., c^{\eta_s^*})$ (considéré comme élément d'un produit $\mathbb{P}$ d'espaces projectifs), où $\eta_1^*, ..., \eta_s^*$ sont les directions orthogonales aux facettes de $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, n'appartient pas à une sous-variété algébrique projective $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}$ (sous-variété définie elle même comme une sous-variété produit). La fonction qui à $(F_1, ..., F_n)$ à coefficients hors de $\mathcal{X}$ associe la dimension du quotient $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]/(F_1, ..., F_n)$ est une fonction continue (considérée comme fonction des coefficients, et essentiellement des coefficients $c^{\eta_1^*}, ..., c^{\eta_n^*}$), à valeurs dans $\mathbb{N}$, localement constante et donc constante dans l'ouvert (connexe) de $\mathbb{P} \setminus \mathcal{X}$. Il en résulte qu'il existe $N(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ tel que, pour tout système $(F_1, ..., F_n)$ qui soit $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique, on ait

$$N(\Delta_1, ..., \Delta_n) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{C[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, ..., F_n)}\,.$$

Nous allons établir ici le premier résultat clef.

Proposition 2.4 *On a $N(\Delta_1, ..., \Delta_n) = \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ pour tout système de n polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. On commence par remarquer la chose suivante : les deux applications

$$(\Delta_1, ..., \Delta_n) \mapsto \mathcal{M}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$$

et

$$(\Delta_1, ..., \Delta_n) \mapsto N(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$$

sont n-linéaires. Pour le volume mixte, c'est une propriété déjà vue, pour l'autre application, on remarquera que si Δ_1 et Δ_1' sont deux polyèdres et si $(F_1, F_2, ..., F_n)$ (resp. $(F_1', F_2, ..., F_n)$) est un système $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique (resp. $(\Delta_1', \Delta_2, ..., \Delta_n)$-générique), alors $(F_1F_1', F_2, ..., F_n)$ est $(\Delta_1+\Delta_1', \Delta_2, ..., \Delta_n)$ générique. D'autre part

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{C[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1F_1', F_2, ..., F_n)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{C[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1, F_2, ..., F_n)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{C[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]}{(F_1', F_2 ..., F_n)}\,.$$

La multilinéarité de N en résulte. Prouver la proposition se ramène donc à la prouver lorsque $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n = \Delta$, ce que nous allons faire par induction sur la dimension n.

Nous supposons le résultat acquis au cran $n-1$ (le cas $n = 1$ est immédiat à vérifier). Prenons un polyèdre Δ, $\underline{l_0}$ un point de l'intérieur relatif de Δ et

$w^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$. Le réseau

$$\mathbb{Z}^{[w^*]} := \mathbb{Z}^n \cap w^{*\perp}$$

est un réseau $n-1$ dimensionnel. Si l'on note $\Delta^{[w^*]}$ la face de Δ définie par

$$\Delta^{[w^*]} := \{\underline{\xi} \in \Delta; < w^*, \underline{\xi} >= \min_{\underline{\eta} \in \Delta} < w^*, \underline{\eta} >\},$$

on peut supposer (au prix d'une translation qui n'affecte ni la valeur de $N(\Delta, ..., \Delta)$, ni celle de $n!\mathrm{Vol}_n(\Delta)$, que $\Delta^{[w^*]}$ est incluse dans $w^{*\perp}$, et se trouve donc être un polyèdre dans un espace de dimension $n-1$, à sommets dans le réseau $\mathbb{Z}^{[w^*]} := \mathbb{Z}^n \cap w^{*\perp} \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$. Si w^* n'est pas orthogonal à une face de Δ, le nombre

$$N_{n-1}\,(\overbrace{\Delta^{[w^*]}, ..., \Delta^{[w^*]}}^{n-1\ fois})$$

(calculé relaivement à l'espace de dimension $n-1$ où vivent les objets concernés ici) est nul (puisque $\Delta^{[w^*]}$ est un singleton). Ceci reste vrai (si l'on utilise l'hypothèse inductive) lorsque w^* n'est pas orthogonal à une facette de Δ (dans ce cas en effet, la dimension de $\Delta^{[w^*]}$ est strictement inférieure à $n-1$ et son volume $n-1$-dimensionnel au sens de Lebesgue est nul). Si $w^* = \eta_i^*$, $i = 1, ..., s$, est orthogonal à une facette de Δ, alors, l'hypothèse inductive permet d'affirmer

$$N_{n-1}\,(\overbrace{\Delta^{[\eta_i^*]}, ..., \Delta^{[\eta_i^*]}}^{n-1\ fois}) = (n-1)!\,\mathrm{Vol}_{n-1}(\Delta^{[\eta_i^*]}), \quad i = 1, ..., s. \tag{2.19}$$

Pour un tel η_i^* (orthogonal à une facette de Δ), désignons par $\Pi_{\underline{l_0},\eta_i^*}$ la pyramide de sommet $\underline{l_0}$ et de "base" $\Delta^{[\eta_i^*]}$. On a bien sûr la formule géométrique évidente (puisque Δ est décomposé en pyramides de sommet $\underline{l_0}$)

$$n!\,\mathrm{Vol}_n\Delta = n! \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(\Pi_{\underline{l_0},\eta_i^*}). \tag{2.20}$$

Le réseau quotient $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^{[\eta_i^*]}$ est un réseau de rang 1, engendré par un vecteur e_i parfaitement défini dès que l'on impose $< \eta_i^*, e_i > > 0$. Notons π_i la projection

$$\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^{[\eta_i^*]} \oplus \mathbb{Z}e_i \mapsto \mathbb{Z}e_i.$$

La hauteur $H_{\underline{l_0},\eta_i^*}$ de la pyramide $\Pi_{\underline{l_0},\eta_i^*}$ est donnée par la formule

$$\pi(\underline{l_0}) - \min\{< \eta_i^*, \underline{\xi} >; \underline{\xi} \in \Delta\} = H_{\underline{l_0},\eta_i^*} e_i.$$

Le volume de cette pyramide, est donné (du fait de (2.19)) par

$$\mathrm{Vol}_n(\Pi_{\underline{l_0},\eta_i^*}) = \frac{1}{n}(\text{vol (base)} \times \text{hauteur}) = \frac{1}{n} H_{\underline{l_0},\eta_i^*} \frac{N_{n-1}\ (\overbrace{\Delta^{[\eta_i^*]},...,\Delta^{[\eta_i^*]}}^{n-1\ fois})}{(n-1)!}\,.$$

La formule à établir pour achever la preuve inductive de la proposition est donc

$$N\ (\overbrace{\Delta,...,\Delta}^{n\ fois}) = \sum_{i=1}^{s} H_{\underline{l_0},\eta_i^*} N_{n-1}\ (\overbrace{\Delta^{[\eta_i^*]},...,\Delta^{[\eta_i^*]}}^{n-1\ fois})\ . \tag{2.21}$$

Pour prouver cette formule, on fixe un système de polynômes de Laurent $(F_1, ..., F_n)$ qui est $(\Delta, ..., \Delta)$-générique et tel que $(F_2^{[\eta_i^*]}, ..., F_n^{[\eta_i^*]})$ soit $(\Delta^{[\eta_i^*]}, ..., \Delta^{[\eta_i^*]})$ ($n-1$ fois)-générique pour $i = 1, ..., s$. On perturbe ensuite ce système en posant, pour $t \neq 0$,

$$F_{1,t} = F_1 + \frac{X^{\underline{l_0}}}{t},\ F_{j,t} = F_j,\ j = 2, ..., n\,.$$

Comme $\underline{l_0}$ est intérieur à Δ, le système perturbé est tout autant $(\Delta, ..., \Delta)$-générique que le système $(F_1, ..., F_n)$ originel et les zéros communs de $(F_{1,t}, ..., F_{n,t})$ dans $\mathbb{T}^n$ s'organisent en $N(\Delta, ..., \Delta)$ branches $t \mapsto \zeta(t)$. Les fonctions $t \mapsto \zeta(t)$ sont des fonctions algébriques du paramètre t : on peut utiliser par exemple le Nullstellensatz qui nous permet d'affirmer que chaque fonction coordonnée $t \mapsto \zeta_j(t)$, $j = 1, ..., n$, satisfait une relation algébrique

$$\mathcal{Q}_j(t, \zeta_j(t)) \equiv 0\,,$$

où $\mathcal{Q}_j \in \mathbb{C}[T, X]$. Il existe donc (par le théorème de Puiseux, voir par exemple [10], pp. 106–112), si $t \mapsto \zeta(t)$ est une telle "branche" de zéros communs, des vecteurs $a \in \mathbb{T}^n$, $\alpha^* \in \mathbb{Q}^n$, dépendant de la branche, et tels que, lorsque t tend vers 0,

$$\zeta(t) = a t^{\alpha^*}(1 + \mathbf{o}(1))\,.$$

Si $\alpha^* = \underline{0}$, on aurait, toujours lorsque t tend vers 0,

$$F_{1,t}(\zeta(t)) = \frac{a^{\underline{l_0}}}{t} + \mathbf{O}(1) \equiv 0\,,$$

ce qui est absurde. On a donc $\alpha^* \in \mathbb{Q}^n \setminus \{\underline{0}\}$, et ce pour toute branche de zéros. Nous allons montrer que le nombre de branches $t \mapsto \zeta(t)$ de zéros tels que le multi-exposant de Puiseux $\alpha^* = \alpha^*_\zeta$ soit colinéaire à une direction fixée parmi les η_i^*, $i = 1, ..., s$, vaut exactement

$$H_{\underline{l_0},\eta_i^*}\ N_{n-1}\ (\overbrace{\Delta^{[\eta_i^*]},...,\Delta^{[\eta_i^*]}}^{n-1\ fois})$$

Comme le nombre total de branches vaut (puisque le système perturbé est $(\Delta, ..., \Delta)$-générique) exactement $N(\Delta, ..., \Delta)$, le partitionnement de l'ensemble des branches selon la direction du multi-exposant de Puiseux α nous donnera au niveau du dénombrement la formule (2.21) voulue.

Montrons tout d'abord que le nombre de branches dont le α^* pointe dans la direction η_i^*, $i = 1, ..., s$, est bien <u>majoré</u> par la quantité

$$H_{\underline{l_0}, \eta_i^*}\, N_{n-1}\, (\overbrace{\Delta^{[\eta_i^*]}, ..., \Delta^{[\eta_i^*]}}^{n-1\ fois})$$

Pour simplifier les choses, on peut se ramener (modulo une transformation monoidale $X = Y^U$, avec $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et une translation, ce qui est possible car les η_i^* sont dans $\mathbb{Q}^n \setminus \{\underline{0}\}$) au cas où

$$\eta_i^* = (1, 0, ..., 0)\,,$$

$$\min\{\xi_1,\ \underline{\xi} \in \Delta\} = 0\,,$$

et $\underline{l_0} = (H, 0, ..., 0)$, $H = H_{\underline{l_0}, \eta_i^*}$. Supposons donc que $t \mapsto \zeta(t)$ soit une branche de zéros dont le multi-exposant de Puiseux pointe dans la direction $(1, 0, ..., 0)$. En écrivant

$$\zeta_j(t) = a_j t^{\alpha_1 \underline{w}^*}(1 + \mathbf{o}(t))\,,\ j = 1, ..., n,$$

(lorsque t tend vers 0) et en reportant cette information dans les relations

$$F_{2,t}(\zeta(t)) \equiv \ldots \equiv F_{n,t}(\zeta(t)) \equiv 0\,,$$

on voit que $(a_2, ..., a_n)$ est une racine (dans $\mathbb{T}^{n-1}$) du système

$$F_2^{[(1,0,...,0)]} = \ldots = F_n^{[(1,0,...,0)]} = 0\,.$$

Le nombre de choix possibles pour $(a_2, ..., a_n)$ se limite, du fait de l'hypothèse de récurrence et de la $(\Delta^{[(1,0,...,0)]}, ..., \Delta^{[(1,0,...,0)]})$-généricité du système

$$(F_2^{[(1,0,...,0)]}, ..., F_n^{[(1,0,...,0)]})\,,$$

au nombre

$$N_{n-1}\, (\overbrace{\Delta^{[(1,0,...,0)]}, ..., \Delta^{[(1,0,...,0)]}}^{n-1\ fois})\ .$$

La généricité de $(F_1, ..., F_n)$ (relativement cette fois à $(\Delta, ..., \Delta)$) impose que pour un tel choix de $(a_2, ..., a_n)$, on ait

$$F_1^{[(1,0,...,0)]}(a_2, ..., a_n) \neq 0\,.$$

En reportant maintenant l'information concernant le comportement de la branche $t \mapsto \zeta(t)$ au voisinage de 0 dans la première équation, il vient

$$F_{1,t}(\zeta(t)) = a_1^H t^{-1+H\alpha_1} + F_1^{[(1,0,...,0)]}(a_2, ..., a_n) + \mathbf{o}(1)\,.$$

On a donc nécessairement $-1 + H\alpha_1 = 0$ et $a_1^H = -F_1^{[(1,0,...,0)]}(a_2, ..., a_n)$. Ainsi, nous ne disposons (et encore, seulement si $H \neq 0$) que d'un unique choix pour α_1 ($\alpha_1 = -1/H$) et (toujours si $H > 0$) de H choix pour a_1, ce qui limite donc bien le nombre de branches dont le multi-exposant de Puiseux pointe dans la direction $(1, 0, ..., 0) \simeq \eta_i^*$ à

$$H\, N_{n-1}\, (\overbrace{\Delta^{[(1,0,...,0)]}, ..., \Delta^{[(1,0,...,0)]}}^{n-1\ fois})$$

comme voulu. Ceci reste vrai lorsque $H = 0$ (aucune branche n'est alors possible avec un tel multi-exposant de Puiseux).

On doit maintenant minorer le nombre de branches dont le multi-exposant de Puiseux pointe dans la direction η_i^*. On suppose toujours la situation "redressée" pour que $\eta_i^* = (1, 0, ..., 0)$, $\underline{l_0} = (H, 0, ..., 0)$ et

$$\min\{\xi_1,\ \underline{\xi} \in \Delta\} = 0\,.$$

Fixons (si $H > 0$) $\alpha_1 = 1/H$ et introduisons le changement de variables

$$Y_1 = X_1 t^{-\alpha_1}\,, \quad Y_j = X_j,\ j = 2, ..., n\,.$$

Le système $\{F_{t,1}(X) = \ldots = F_{t,n}(X) = 0\}$ s'exprime en les nouvelles variables

$$\begin{aligned}
&Y_1^H + F_1^{[(1,0,...,0)]}(Y_2, ..., Y_n) + P_{1,t}(Y) = 0\\
&F_{2,t}(Y_2, ..., Y_n) + P_{2,t}(Y) = 0\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&F_{n,t}(Y_2, ..., Y_n) + P_{n,t}(Y) = 0\,,
\end{aligned}$$

où les coefficients de tous les polynômes $P_{j,t}$, $j \geq 2$, sont, lorsque t tend vers 0, des fonctions algébriques de t tendant vers 0. Pour $t = 0$, ce système (en Y) a exactement

$$H\, N_{n-1}\, (\overbrace{\Delta^{[(1,0,...,0)]}, ..., \Delta^{[(1,0,...,0)]}}^{n-1\ fois})$$

solutions. Le système correspondant à $t \neq 0$ et petit, système se présentant comme une perturbation du précédent, doit avoir au moins autant de solutions (c'est toujours le principe de l'argument basé sur l'extension du théorème de Rouché au cadre de n fonctions holomorphes de n variables, cadre développé dans la section 2.1). Nous avons donc la minoration voulue pour le nombre de branches dont le multi-exposant de Puiseux pointe dans la direction η_i^*.

Tout ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Cette proposition se doit d'être complétée par l'étude de ce qui se passe dans le cas “non générique” qui dans la suite de ce cours sera le cas qui retiendra notre attention ; on dit aussi, en langage plus “dynamicien”, qu'un système de n polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$ *présente de la résonance* lorsqu'il est non $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$- générique. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 2.5 *Soit $(F_1, ..., F_n)$ un système de polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$ présentant de la résonance relativement à la configuration $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ (c'est à dire non $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique, ou encore, modulo ce que nous avons pour l'instant admis, tel que les conditions* (2.18) *soient en défaut). Alors, si $\mathcal{W}_{\rm disc}(F_1, ..., F_n)$ désigne l'ensemble des zéros communs isolés de $(F_1, ..., F_n)$ dans $\mathbb{T}^n$, on a*

$$\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{W}_{\rm disc}(F_1,...,F_n)} \mu(F_1, ..., F_n; \underline{\alpha}) \ < \ \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)\,, \tag{2.22}$$

avec la convention que le membre de gauche de (2.22) *vaut $-\infty$ dès que*

$$\mathcal{W}_{\rm disc}(F_1, ..., F_n) = \emptyset\,.$$

Preuve. La preuve est une transposition au cas torique de l'argument qui clôt la preuve du théorème de Bézout (voir le dernier paragraphe de la section 2.2). On suppose que $\underline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$ est une solution (dans $\mathbb{T}^n$) d'un système d'équations du type

$$F_1^{(\sigma_1)} = ... = F_n^{(\sigma_n)} = 0\,,$$

où σ_j est une face de Δ_j, $j = 1, ..., n$, et $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ est une face propre de $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$. Quitte à effectuer une certaine transformation monoidale $Y = X^U$, avec $U \in {\rm GL}_n(\mathbb{Z})$, puis à multiplier les polynômes de Laurent par des monômes, on peut supposer que les faces $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont toutes incluses dans le plan $\{x_1 = 0\}$ de l'espace $\mathbb{R}^n$. Les polynômes de Laurent $F_j^{(\sigma_j)} = F_j^{[e_j^*]}$, $j = 1, ..., n$, deviennent ainsi des polynômes de Laurent en les variables $x_2, ..., x_n$, ayant une racine commune $(\xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{T}^{n-1}$ (on a en effet, après changement de variables, $\underline{\xi} = (0, \xi_2, ..., \xi_n)$).

Nous ferons tout d'abord l'hypothèse que le volume mixte de $\Delta_1, ..., \Delta_n$ est non nul. Il est alors possible de construire un système $(f_{0,1}, ..., f_{0,n})$ de polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1, ..., \Delta_n$, qui soit $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ générique, ce qui implique que le système d'équations $\{f_{0,1} = ... = f_{0,n} = 0\}$ admette au moins une racine $\underline{\alpha}$ dans $\mathbb{T}^n$. On peut d'ailleurs aussi imposer comme exigences additionnelles que

$$f_{j,0}(0, \xi_2, ..., \xi_n)\ F_j(\underline{\alpha}) \neq 0\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

On introduit ensuite le système "perturbé" $(F_{1,t}, ..., F_{n,t})$, où

$$F_{j,t} = p_{0,j}((1-t)\underline{\xi} + t\underline{\alpha}))\ F_j - F_j((1-t)\underline{\xi} + t\underline{\alpha}))\ p_{j,0}\,,\ j = 1, ..., n$$

(on notera l'analogie avec les $P_{j,t}$ construits à la fin de la section 2.2). Pour $t = 1$, donc pour t générique et voisin de 0, ce système est $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique et admet donc $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ racines qui induisent $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ branches lorsque t tend vers 0. Par contre, pour $t = 0$, le système "limite" (qui est équivalent au système $(F_1, ..., F_n)$) admet comme nombre de zéros isolés la quantité

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{W}_{\rm disc}(F_1, ..., F_n)} \mu(F_1, ..., F_n;\, \underline{\alpha})\,.$$

Par construction même, une des branches de zéros tout au long de la perturbation est la branche

$$t \mapsto (1-t)\underline{\xi} + t\underline{\alpha}\,,$$

branche qui tend (lorsque t tend vers 0) vers un point (en l'occurrence $\underline{\xi}$) n'appartenant pas à $\mathbb{T}^n$, donc se trouvant, en quelque sens, à l'infini du champ dans lequel on travaille (à savoir ici $\mathbb{T}^n$). Puisqu'une branche au moins s'échappe à l'infini, il n'y a plus adéquation entre le nombre de zéros isolés du système limite $(F_1, ..., F_n)$ dans $\mathbb{T}^n$ et le nombre de zéros du système perturbé. D'où l'inégalité stricte

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{W}_{\rm disc}(F_1, ..., F_n)} \mu(F_1, ..., F_n;\, \underline{\alpha}) \ <\ \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)\,.$$

Si maintenant $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n) = 0$, on voit que le système $\{F_1 = \ldots = F_n = 0\}$ ne saurait avoir de zéro isolé dans $\mathbb{T}^n$ car sinon notre théorème de Rouché (version $m = n$) de la section 2.1 nous assurerait qu'un système perturbé (qui lui serait générique) aurait au moins autant de zéros que $\{F_1 = ... = F_n = 0\}$ aurait de points isolés (les multiplicités étant prises en compte), ce qui est absurde puisque le volume mixte des Δ_j est supposé nul.

Ceci achève la preuve de la proposition et conclut, modulo ce que nous avons admis concernant l'équivalence entre la généricité au sens de Bernstein et l'hypothèse (2.18), la preuve du théorème 1.2. On obtient même un peu plus puisque, si $(F_1, ..., F_n)$ présente de la résonance, on dispose d'une information sur le nombre de zéros communs isolés de $F_1, ..., F_n$ dans $\mathbb{T}^n$, et ce sans faire l'hypothèse que $(F_1, ..., F_n)$ définissaient un ensemble algébrique discret dans $\mathbb{T}^n$. $\diamondsuit$

2.4 Quelques conséquences du théorème de Bernstein

La première conséquence du théorème de Bernstein concerne un résultat que l'énoncé de la proposition 1.4 laissait en suspens : quand, étant donnés $n+1$ sous-ensembles finis $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$ de $\mathbb{Z}^n$, l'ensemble $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ est-il de codimension 1 ? Autrement dit, quand peut-on réellement parler de résultant creux attaché aux sous-ensembles $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$? La réponse à ces questions est donnée par la

Proposition 2.6 *Étant donnés $n+1$ sous-ensembles finis $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$ de $\mathbb{Z}^n$, l'ensemble $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ est de codimension 1 si et seulement si l'un au moins des volumes mixtes $\mathcal{M}(\Delta_0, ..., \widehat{\Delta_j}, ..., \Delta_n)$, $j = 0, ..., n$, (le chapeau signifiant l'exclusion), où*

$$\Delta_j = \operatorname{conv} \mathcal{A}_j \,, \quad j = 0, ..., n \,,$$

est différent de 0.

Preuve. Supposons que la codimension de $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ soit égale à 1. Cette variété est alors définie dans $\mathbb{P}^{\mathcal{A}_0 - 1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{\mathcal{A}_n - 1}$ par l'équation $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)[c_0, ..., c_n] = 0$ (c_j désignant le vecteur des coefficients du polynômes de Laurent à support précisé $\mathcal{A}_j$, $j = 0, ..., n$). Il existe certainement $j \in \{0, \ldots, n\}$ tel que le bloc de variables c_j soit effectivement présent dans l'expression de $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)[c_0, ..., c_n]$. Si l'on fixe génériquement les blocs de coefficients c_l, $l \neq j$ (on note ces blocs fixés $\dot{c}_l$, $l \neq j$), il est clairement possible de trouver un choix du bloc c_j tel que

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)[\dot{c}_0, ..., c_j, ..., \dot{c}_n] = 0 \,.$$

Ceci implique qu'il existe des suites $(c_l^{(n)})_{n \geq 0}$, $l \neq j$, avec

$$\lim_{n \to \infty} c_l^{(n)} = \dot{c}_l \,,$$

telles que, si $F_l^{(n)}$, $l \neq j$, sont des polynômes de Laurent de supports respectifs $\mathcal{A}_l$, $l \neq j$, à coefficients précisés $c_l^{(n)}$, alors

$$\{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_l^{(n)}(\zeta) = 0,\ l \neq j\} \neq \emptyset\,.$$

Comme les $\dot{c}_l$, $l \neq j$, ont été choisis génériquement, on peut supposer que le système limite $(F_1^\infty, ..., \widehat{F_j^\infty}, ..., F_n^\infty)$ est $(\Delta_1, ..., \widehat{\Delta_j}, ..., \Delta_n)$ générique. C'est encore le cas pour le système perturbé $(F_1^{(n)}, ..., \widehat{F_j^{(n)}}, ..., F_n^{(n)})$ (avec n assez grand). Par conséquent, il résulte du théorème de Bernstein que

$$\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \widehat{\Delta_j}, ..., \Delta_n) > 0\,.$$

Ceci démontre un sens de la proposition.
Supposons maintenant qu'il existe $j \in \{0, ..., n\}$ tel que

$$\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \widehat{\Delta_j}, ..., \Delta_n) > 0\,.$$

On supposera par exemple $j = 0$, soit

$$\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n) > 0\,.$$

Si les blocs de coefficients $c_1, ..., c_n$ (correspondant à des polynômes de Laurent de support précisé $\mathcal{A}_1$,...,$\mathcal{A}_n$) sont génériques, l'ensemble

$$V_{c_1,...,c_n} := \{\zeta \in \mathbb{T}^n;\ F_{j,c_j}(\zeta) = 0,\ j = 1, ..., n\}$$

(où F_{j,c_j} désigne le polynôme de Laurent à support $\mathcal{A}_j$ et coefficients précisés c_j) est non vide. Si F_{0,c_0} désigne un polynôme de Laurent de support $\mathcal{A}_0$ et à coefficients précisés c_0, on peut former l'expression

$$\prod_{\underline{\alpha} \in V_{c_1,\dots,c_n}} F_{0,c_0}(\alpha)\,.$$

Il s'agit d'un polynôme symétrique (à coefficients dans $\mathbb{C}(c_0)$) en les solutions de n équations algébriques (à coefficients dans $\mathbb{C}(c_1, ..., c_n)$) et la théorie de Galois nous assure que cette expression est un élément de $\mathbb{C}(c_0, ..., c_n)$. On en déduit que l'ensemble

$$\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)},$$

qui est clairement défini comme le lieu des zéros du numérateur de cette fraction rationnelle, et est donc bien de codimension 1. $\diamondsuit$

Ce que nous venons de faire dans la seconde partie de cette preuve est la construction du résultant creux, lorsque cela s'avérait possible. De cette construction (et par conséquent du théorème de Bernstein, qui assure par exemple dans la situation précédente que $\#V_{c_1,...,c_n} = \mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$), résulte la

Proposition 2.7 *Soient $\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n$, $n+1$ sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^n$ tels que l'ensemble $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ soit de codimension 1 dans $\mathbb{P}^{A_0-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{A_n-1}$. Alors*

$$(c_0, ..., c_n) \mapsto \mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)[c_0, ..., c_n]$$

est une fonction polynomiale homogène de degré $\mathcal{M}(\Delta_0, ..., \widehat{\Delta_j}, ..., \Delta_n)$ en le bloc de variable c_j, et ce pour tout $j = 0, ..., n$.

En conclusion, remarquons que les deux propositions 2.6 et 2.7 montrent qu'il y a une certaine cohérence à poser

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n) \equiv 1$$

lorsque $\overline{\mathcal{U}(\mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n)}$ est de codimension strictement supérieure à 1.

Remarquons aussi que dans le cas de l'élimination pleine, on a le résultat suivant, conséquence de la proposition 2.7.

Proposition 2.8 *Soient $D_1, ..., D_n$, n entiers strictement positifs ; la fonction*

$$(c_1, ..., c_n) \mapsto \mathcal{R}(D_1, ..., D_n)[c_1, ..., c_n]$$

est une fonction polynomiale homogène de degré $D_1 \cdots \widehat{D_j} \cdots D_n$ en le bloc de variables c_j, et ce pour tout $j = 1, ..., n$.

2.5 Remarques prospectives

De fait, étant donné un polyèdre convexe Δ de $\mathbb{R}^n$, à sommets dans $\mathbb{Z}^n$ (d'ailleurs $\mathbb{Z}^n$ peut être remplacé par un quelconque réseau Λ de dimension n), les deux quantités combinatoires intéressantes (parce qu'elles ont une interprétation géométrique) sont les nombres $T(\Delta)$ et $B(\Delta)$ introduits par A. Khovanskii [19] : par définition $T(\Delta)$ est le <u>nombre de points du réseau Λ</u> inclus dans Δ, tandis que

$$B(\Delta) := (-1)^n \text{ card } \{\underline{l} \in \Lambda; \underline{l} \text{ intérieur à } \Delta\}$$

(ici, l'intérieur désigne toujours l'intérieur <u>relatif</u>, sauf si le polyèdre est de dimension 0, auquel cas l'unique point qu'il contient sera considéré comme intérieur). Si Δ est de dimension n, le volume du polyèdre Δ est relié à la fonction T par la formule combinatoire asymptotique suivante :

$$\mathrm{Vol}_n(\Delta) = \lim_{\substack{v \in \mathbb{N}^* \\ v \to +\infty}} \frac{T(v\Delta)}{v^n} \,. \tag{2.23}$$

Étant donnés m polyèdres convexes $\Delta_1, ..., \Delta_m$ de $\mathbb{R}^m$, nous verrons au chapitre 3 comment on peut les considérer comme des diviseurs de Cartier sur une certaine compactification de $\mathbb{T}^n$, convenablement "adaptée" au système de polyèdres $(\Delta_1, ..., \Delta_m)$. Cette compactification pourra même être réalisée comme une variété projective lisse $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ de dimension n (sur le modèle de $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_q}$, etc... Dès lors, l'interprétation géométrique des deux fonctions T et B se lit au travers des deux formules ([19])

$$T(v_1\Delta_1+\ldots+v_m\Delta_m) = \chi(\mathcal{X}, \{v_1\Delta_1+\ldots+v_m\Delta_m\}) = \chi(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{\Delta_1}^{\otimes v_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}_{\Delta_m}^{\otimes v_m}) \,,$$

$$B(v_1\Delta_1+\ldots+v_m\Delta_m) = \chi(\mathcal{X}, -\{v_1\Delta_1+\ldots+v_m\Delta_m\}) = \chi(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{-\Delta_1}^{\otimes v_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}_{-\Delta_m}^{\otimes v_m}) \,,$$

où $\chi(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ désigne la <u>*caractéristique d'Euler-Poincaré*</u> du faisceau cohérent $\mathcal{F}$, soit

$$\chi(\mathcal{X}, \mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{X}=n} (-1)^i \dim H^i(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \,,$$

et $v_1, ..., v_m \in \mathbb{N}$. C'est le <u>théorème de Riemann-Roch</u> qui nous permet, nous le verrons, une fois ces correspondances géométriques établies, d'affirmer que les fonctions

$$(v_1, ..., v_m) \in \mathbb{N}^m \mapsto T(v_1\Delta_1 + \ldots + v_m\Delta_m)$$

et

$$(v_1, ..., v_m) \in \mathbb{N}^m \mapsto B(v_1\Delta_1 + \ldots + v_m\Delta_m)$$

dépendent <u>polynomialement</u> de $(v_1, ..., v_m)$. En particulier, si $m = 1$, on a, pour tout $v \in \mathbb{N}^*$,

$$T(v\Delta) = \mathrm{Vol}_n(\Delta)\, v^n + ...$$

(d'aprés (2.23)), tandis qu'un résultat classique de géométrie algébrique nous dit que

$$\chi(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{v\Delta}) = \frac{(\Delta \bullet \ldots \bullet \Delta)}{n!} v^n + \ldots \,,$$

où $(\Delta \bullet \ldots \bullet \Delta)$ est le degré de self-intersection du diviseur Δ. Nous déduisons donc de cette nouvelle interprétation des choses la formule

$$(\Delta \bullet \ldots \bullet \Delta) = n!\, \mathrm{Vol}_n(\Delta) = \mathcal{M}(\Delta, ..., \Delta) \,.$$

Ceci n'est rien d'autre qu'une reformulation du théorème de Bernstein dans le cas où tous les Δ_j sont égaux. En effet, n polynômes de Laurent $F_1, ..., F_n$ de polyèdre de Newton précisé Δ induisent n diviseurs de Cartier

$$\mathcal{D}_j = \mathrm{div}\,(F_j) + \Delta$$

sur la variété projective $\mathcal{X}$ (on peut pour se repérer penser par exemple à ce qui se passe lors du passage de l'affine au projectif via l'homogénéization, qui, on le verra au chapitre 3, jouera un grand rôle ici). Le degré d'intersection $\mathcal{D}_1 \bullet \ldots \bullet \mathcal{D}_n$ est égal au degré de self-intersection $(\Delta \bullet \ldots \bullet \Delta)$. La généricité au sens de Bernstein équivaut à ce que les diviseurs $\mathcal{D}_1$,..., $\mathcal{D}_n$ ne s'intersectent que dans $\mathbb{T}^n$ (et non à l'infini). On comprend alors pourquoi l'on a dans ce cas la formule

$$\sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{W}(F_1,...,F_n)} \mu(F_1, ..., F_n;; \underline{\alpha}) = (\mathcal{D}_1 \bullet \ldots \bullet \mathcal{D}_n) = \\ = (\Delta \bullet \ldots \bullet \Delta) = n! \, \mathrm{Vol}_n(\Delta) = \mathcal{M}(\Delta, ..., \Delta)\,.$$

Dans le cas $m < n$, on trouve de même que si $F_1, ..., F_m$ sont m polynômes de Laurent à polyèdre de Newton précisé Δ et à coefficients génériques, on a, si $\chi(\ )$ désigne toujours la caractéristique d'Euler-Poincaré,

$$\chi(\mathcal{W}(F_1, ..., F_m)) := \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j-1} \dim(H^j(\mathcal{W}(F_1, ..., F_m), \mathbb{C}) = (-1)^{n-m}\; n! \mathrm{Vol}_n(\Delta)$$

(notons que la généricité implique la lissité de la varitété analytique complexe de dimension $n - m$, donc définie comme ce que l'on appellle une *intersection complète*, $\mathcal{W}(F_1, ..., F_m)$). Le théorème de Bernstein apparait comme un cas particulier de ce résultat (c'est précisément le cas $m = n$).

Chapitre 3

Variétés toriques

3.1 Variété torique (projective) attachée à un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$

Dans cette section, nous présenterons une première approche (naïve) au concept de variété torique. La caractère analytique de cette approche pourrait en autoriser (tout au moins partiellement) l'extension à un cadre permettant le traitement non plus seulement des êtres algébriques que sont les polynômes de Laurent, mais aussi des êtres transcendants que sont les sommes d'exponentielles à fréquences dans $\mathbb{R}^n$, dans la droite ligne de la théorie initiée à une variable par G. Polya et que l'on trouvera présentée par exemple dans [4] ou [3].

Définition 3.1 *Étant donné un sous-ensemble fini (et ordonné) $\mathcal{A} = \{\underline{l}_0, ..., \underline{l}_{A-1}\}$ de $\mathbb{Z}^n$, on appelle variété torique projective $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ attachée au sous-ensemble $\mathcal{A}$ (de cardinal A) l'adhérence dans $\mathbb{P}^{A-1}$ (au sens de la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^{A-1}$) de l'ensemble*

$$\mathcal{X}^0_{\mathcal{A}} := \{(\zeta^{\underline{l}_0} : \ldots : \zeta^{\underline{l}_{A-1}});\ \zeta \in \mathbb{T}^n\}\,.$$

Un cas particulier important :

Si nous supposons que $\underline{l}_1 - \underline{l}_0, ..., \underline{l}_{A-1} - \underline{l}_0$ engendrent (en tant que $\mathbb{Z}$-module) le réseau $\mathbb{Z}^n$, l'application

$$\zeta \in \mathbb{T}^n \mapsto [1 : \zeta^{\underline{l}_1 - \underline{l}_0} : \ldots : \zeta^{\underline{l}_{A-1} - \underline{l}_0}]$$

est une bijection entre $\mathbb{T}^n$ et l'ensemble des points de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{T}^{A-1}$. Si F désigne le morphisme de $\mathbb{C}$-modules

$$\mathbb{C}[T_1, ..., T_{A-1}] \mapsto \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$$

défini par

$$F(T_j) = X^{\underline{l}_j - \underline{l}_0}\,,$$

l'ensemble $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{T}^{A-1}$ est défini comme l'ensemble des points

$$[1 : y_1 : \ldots : y_{A-1}], \quad y_1, ..., y_{A-1} \in \mathbb{T}^{A-1}\,,$$

avec

$$P(y_1, ..., y_{A-1}) = 0 \quad \forall P \in \operatorname{Ker} F\,.$$

Le noyau de F est dans ce cas particulier facile à calculer et on pourra le vérifier en exercice. Un système générateur de ce noyau est donné par les polynômes

$$g_{\underline{a},\underline{b}}(T) = T^{\underline{a}} - T^{\underline{b}}\,,$$

avec

$$\underline{a},\ \underline{b} \in \mathbb{N}^{A-1},\ \underline{a} \neq \underline{b},\ \underline{a} - \underline{b} \in \operatorname{Ker}\Phi\,,$$

où Φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{A-1}$ transformant la base canonique $(e_1, ..., e_{A-1})$ en le système $(\underline{l}_1 - \underline{l}_0, ..., \underline{l}_{A-1} - \underline{l}_0)$. Ainsi, si $B_1 = B_1^+ - B_1^-, ..., B_{A-1-n} = B_{A-1-n}^+ - B_{A-1-n}^-$ ($B_l^+, B_l^- \in \mathbb{N}^{A-1}$, B_l^+ et B_l^- ayant des supports disjoints) sont des éléments de $\operatorname{Ker}\Phi \cap \mathbb{Z}^{A-1}$ tels que

$$\operatorname{Ker}\Phi \cap \mathbb{Z}^{A-1} = \mathbb{Z}B_1 + \ldots + \mathbb{Z}B_{A-1-n}\,,$$

l'ensemble $\mathcal{X}_{\cap A} \cap \mathbb{T}^{A-1}$ (ensemble en bijection avec $\mathbb{T}^n$) est défini en coordonnées inhomogènes $(y_1, ..., y_{A-1})$ dans $\mathbb{T}^{A-1}$ (donc dans $\mathbb{C}^{A-1}$) par les équations

$$\prod_{k=1}^{A-1} y_k^{B_{jk}^+} = \prod_{k=1}^{A-1} y_k^{B_{jk}^-}\,,\ j = 1, ..., A-1-n\,.$$

Dans ce cas particulier la variété $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ (qui est d'ailleurs aussi l'adhérence de $\mathcal{X}_0^{\mathcal{A}}$ relativement à la métrique usuelle de $\mathbb{P}^{A-1}$) est la sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^{A-1}$ définie (ensemblistement) par les équations homogènes

$$y_0^{\sum_{k=1}^{A-1} B_{jk}^-} \prod_{k=1}^{A-1} y_k^{B_j k^+} = y_0^{\sum_{k=1}^{A-1} B_{jk}^+} \prod_{k=1}^{A-1} y_k^{B_j k^-}\,,\ k = 1, ..., A-1-n\,.$$

Dans ce cas particulier, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ se présente (ensemblistement) comme une sous-variété de $\mathbb{P}^{A-1}$ définie par ce que l'on appellera un <u>idéal homogène binomial</u> (c'est à dire engendré par une collection de binômes).

<u>Retour au cas général :</u>

Notons aussi que l'intersection de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ avec l'hyperplan

$$a_0 y_0 + \ldots + a_{A-1} y_{A-1} = 0$$

de $\mathbb{P}^{A-1}$ apparait, dans ce tableau, comme une certaine <u>compactification</u> du sous-ensemble algébrique de $\mathbb{T}^n$ défini comme le lieu des zéros (dans $\mathbb{T}^n$) du polynôme de Laurent

$$F(X) := \sum_{j=0}^{A-1} a_j X^{\underline{l}_j} .$$

<u>Exemples.</u>

• Si $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}(D)$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{A}(D)$ (suivant les notations de la section 1.5), la variété $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ainsi obtenue est l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$, que l'on réalise ainsi plongé dans $\mathbb{P}(S^D(\mathbb{C}^n))$ via le *<u>plongement de Véronèse</u>* ([15], page 178).

• Si $n = \mu + \nu$ (les variables étant notées $x_0, ..., x_{\mu-1}, y_0, ..., y_{\nu-1}$), la variété torique $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ associée au sous-ensemble $\mathcal{A}$ défini comme le support du polynôme

$$F(X) = (\sum_{k=0}^{\mu-1} x_j)(\sum_{l=0}^{\nu-1} y_l)$$

(l'ordre étant par exemple l'ordre lexicographique $x_0y_0, x_0y_1, ..., x_0y_{\nu-1}, x_1y_0, ...$, mais ceci, on le verra plus loin, importe peu) est la réalisation de $\mathbb{P}^{\mu-1} \times \mathbb{P}^{\nu-1}$, considéré comme plongé dans $\mathbb{P}^{\mu+\nu-1}$ via le *<u>plongement de Segre</u>* ([15], page 192).

• Si $w^* = (w_0^*, ..., w_{n-1}^*)$ (où $w_j \in \mathbb{N}^*$ pour $j = 0, ..., n-1$) et si, pour D fixé dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_{w^*,D}$ désigne l'ensemble des points $\underline{l}$ de $\mathbb{Z}^n$ tels que $< w^*, \underline{l} >= D$, on obtient *<u>l'espace projectif à poids</u>* $\mathbb{P}_{w^*}^{n-1}$, défini ensemblistement comme le quotient de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ par la relation de colinéarité pondérée

$$\underline{z} \mathcal{R}_{w^*} \underline{\tilde{z}} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C},\ z_j^{w_j^*} = \lambda \tilde{z}_j^{w_j^*} ,\ j = 0, ..., n-1 .$$

<u>Pourquoi $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ne dépend que de la géométrie affine de $\mathcal{A}$.</u>

De fait, si $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^m$, avec $A = B$, et $\mathcal{L}$ est une transformation affine injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que, si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}(x)_k = \gamma_{k0} + \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} x_l , \quad k = 1, ..., m ,$$

($\gamma_{jk} \in \mathbb{Z}$ pour tout j entre 0 et n, pour tout k entre 1 et n) et que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, alors l'application

$$\mathcal{L}^* :\ \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{T}^n$$

qui à $(s_1, ..., s_m)$ associe $(t_1, ..., t_n)$, où

$$t_j = s_1^{\gamma_{1j}} \dots s_m^{\gamma_{mj}} ,\ j = 1, ..., n ,$$

réalise l'identification entre $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}^0$ et $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^0$ dans $\mathbb{P}^{A-1}$. La variété $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ne dépend donc que de la géométrie affine de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exercice.

On laissera en exercice dans cette section le soin de transposer la construction de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ au cadre où $\mathcal{A} = \{\underline{l}_0, ..., \underline{l}_{A-1}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, en décrivant quelle est l'adhérence dans $\mathbb{C}^A$, pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}^A$, du sous-ensemble

$$\{(1, \zeta^{\underline{l}_1 - \underline{l}_0}, ..., \zeta^{\underline{l}_{A-1} - \underline{l}_0});\ \zeta \in \mathbb{T}^n\}.$$

Cette adhérence se présente-elle comme une sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^A$, comme cela était le cas dans le cas où $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$?

3.2 Variété torique (affine) attachée à un cône

Dans cette section d'obédience plus algébrique (notre référence majeure ici sera le livre introductif de W. Fulton [12]) notre objet de départ est un réseau de points Λ dans un espace vectoriel affine réel, réseau que nous supposerons isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Ce réseau génère un espace vectoriel affine réel

$$\Lambda_{\mathbb{R}} := \{\lambda_1 \underline{l}_1 + \ldots + \lambda_s \underline{l}_s;\ \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{R},\ \underline{l}_1, ..., \underline{l}_s \in \Lambda\}.$$

Cet espace vectoriel affine est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ si Λ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Définition 3.2 *Un cône σ de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est par définition un sous-ensemble de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ tel qu'il existe $\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_s \in \Lambda$, avec*

$$\sigma = \{\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \underline{\xi}_k;\ , \lambda_1, ..., \lambda_s \in [0, +\infty[\}.$$

Le cône σ est dit strict s'il ne contient aucun $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ ou, ce qui revient au même, si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Transformons maintenant tous ces objets par le jeu de la dualité algébrique :
- Le réseau $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ est le réseau dual du réseau Λ.
- Ce réseau dual (noté aussi Λ^*) génère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ (noté $\Lambda^*_{\mathbb{R}}$).
- À un cône σ de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, on peut associer un cône $\check{\sigma}$ de $\Lambda^*_{\mathbb{R}}$, défini par

$$\check{\sigma} := \{w^* \in \Lambda^*_{\mathbb{R}};\ < w^*, \underline{\xi} > \geq 0 \ \ \forall \underline{\xi} \in \sigma\}.$$

Le *principe de reflexivité* en dimension finie nous assure que le dual de Λ^* s'identifie à Λ, celui de $\Lambda^*_{\mathbb{R}}$ à Λ_R, et celui de $\check{\sigma}$ à σ.

Par définition, une <u>face</u> d'un cône σ de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est un sous-ensemble de σ du type

$$\tau = \tau_{w^*} = \{\underline{\xi} \in \sigma;\ < w^*, \underline{\xi} >= 0\}\,,$$

où w^* est un certain élément (non en général unique !) du cône dual $\check{\sigma}$. Toute face de σ génère aussi un cône rationnel, en fait un "sous-cône" du cône σ. La face maximale (pour la relation d'inclusion) d'un cône rationnel est le cône lui-même ($w^* = 0$).

On peut compléter notre dictionnaire concernant les correspondances induites par le principe de dualité en notant que la correspondance

$$\tau \leftrightarrow \check{\sigma} \cap \tau^{\perp}$$

réalise une bijection entre les faces de σ et celles de $\check{\sigma}$. En effet, une face τ^* de $\check{\sigma}$ est un sous-ensemble de $\check{\sigma}$ du type $\check{\sigma} \cap w^{\perp}$, où $w \in \check{\check{\sigma}} = \sigma$; si τ est une face de σ contenant w dans son intérieur relatif (ceci signifie que w est dans le sous-espace affine engendré par τ), on a

$$\check{\sigma} \in w^{\perp} = \check{\sigma} \cap (\check{\tau} \cap w^{\perp}) = \check{\sigma} \cap \tau^{\perp}\,.$$

De fait, cette face τ est unique et donnée par

$$\tau = \sigma \cap (\tau^*)^{\perp}$$

(toujours selon le principe de réflexivité). Le cône minimal de σ au niveau de l'inclusion est donc $\check{\check{\sigma}} \cap \check{\sigma}^{\perp}$, soit $(\check{\sigma})^{\perp}$, soit $\sigma \cap (-\sigma)$. Si σ est un cône strict, ce cône minimal est donc $\{0\}$.

Le lemme suivant (dit <u>lemme de Gordon</u>) sera capital, car il nous permettra d'associer de manière naturelle à un cône σ de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ un semi-groupe de type fini.

Lemme 3.1 *Si σ est un cône de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, alors $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ est un semi-groupe de type fini, disons engendré par $w_1^*, ..., w_t^*$. De plus, dire que σ est un cône strict se lit aussi en disant que*

$$\mathrm{vect}(\check{\sigma} \cap \Lambda) = \mathrm{vect}(\check{\sigma}) := \{\lambda_1 w_1^* + \ldots + \lambda_t w_t^*;\ \lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{R}\}$$

est le $\mathbb{R}$-espace $\Lambda_{\mathbb{R}}^*$ tout entier.

Preuve. Le cône dual $\check{\sigma}$ s'écrit

$$\check{\sigma} = \{\sum_{k=1}^{t^*} \lambda_k \underline{\xi}_k^*;\ \lambda_1, ..., \lambda_{t^*} \in \mathbb{R}\}$$

où les $\underline{\xi}_k^*$, $k = 1, ..., t^*$, peuvent être choisis dans le réseau Λ^*. C'est ici qu'intervient de manière cruciale le fait que le cône σ soit ce que l'on appelle un cône <u>*rationnel*</u>, c'est à dire construit comme s'appuyant sur une collection de points d'un réseau Λ, et non d'une collection finie arbitraire de points d'un espace affine réel de dimension n. Pour se convaincre de ce qu'il est possible de choisir de tels $\underline{\xi}_k$ dans le contexte rationnel où nous nous plaçons), on s'entrainera (dans le cas $\Lambda = \mathbb{Z}^n$) à représenter géométriquement le cône $\check{\sigma}$, l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^*$ étant supposé superposé à la copie $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble

$$K^* = \{\sum_{k=1}^{t^*} \lambda_k \underline{\xi}_k^*;\ \lambda_1, ..., \lambda_{t^*} \in [0,1]\}$$

est un compact de $\Lambda^*_{\mathbb{R}}$ (c'est l'image de $[0,1]^\tau$ par une application continue) ; on a donc

$$\operatorname{card}\{\Lambda^* \cap K^*\} < +\infty$$

(puisque le rśeau est un ensemble discret). Cet ensemble $K^* \cap \Lambda^*$ génère le semi-groupe $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ (que $\check{\sigma} \cap \Lambda$ ensemble ait une structure de semi-groupe est évident) : en effet, si

$$\underline{\xi}^* = \sum_{k=1}^{\tau} \underline{\lambda}_k \xi_k^* \in \check{\sigma} \in \Lambda^* \,,$$

on peut, en écrivant $\lambda_k = \mu_k + \rho_k$, avec $\mu_k \in \mathbb{N}$ et $\rho_k \in [0,1]$, réaliser ξ^* comme

$$\xi^* = \sum_{k=1}^{\tau} \underline{\mu}_k \xi_k^* + \underline{\kappa}^* \,,$$

avec $\underline{\kappa}^* \in K^*$ (notons que les $\underline{\xi}_k^*$ sont aussi dans K^*)
Dire que $\operatorname{vect}(\check{\sigma}) = \Lambda^*_{\mathbb{R}}$ équivaut à ce que que $\tau_0 = \sigma \cap (-\sigma)$ est de dimension 0, puisqu'il résulte de la règle de correspondance des faces $\tau \leftrightarrow \check{\sigma} \cap \tau^\perp$ que $\dim \operatorname{vect}(\tau_0) + \dim(\operatorname{vect}(\check{\sigma})) = \dim \Lambda_{\mathbb{R}}$. Ceci prouve la dernière assertion du lemme de Gordon. $\diamondsuit$

À tout semi-groupe S de type fini, on peut associer une $\mathbb{C}$-algèbre (finiment engendrée) $\mathbb{C}[S]$. Cette algèbre est, en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, engendrée par les symboles χ_u, $u \in S$, la "règle" de multiplication étant

$$\chi_{u_1} * \chi_{u_2} = \chi_{u_1+u_2} \,,$$

en conformité avec la règle d'addition interne dans le semi-groupe.

Définition 3.3 *Suivant le formalisme de la théorie des schémas (voir par exemple* [16]*, chapitre* 2*), on appelle* <u>*variété torique affine*</u> U_σ *attachée au cône strict* σ *le schéma*

$$U_\sigma := \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]) \,.$$

Dans ce formalisme algébrique, les points <u>fermés</u> x de U_σ (ce sont, suivant la théorie des schémas) les idéaux premiers <u>maximaux</u> de $\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\Lambda^*]$) correspondent aux homomorphismes de semi-groupes de $\check{\sigma}\cap\Lambda^*$ dans $\mathbb{C}=\mathbb{T}\cap\{0\}$, équipé de sa structure de semi-groupe multiplicatif. Les symboles χ_u, $u\in\check{\sigma}\cap\Lambda^*$, s'interprètent comme des fonctions régulières sur U_σ (considéré du point de vue ensembliste), via la règle

$$\chi_u(x)=x(u)\,,\ u\in\check{\sigma}\cap\Lambda^*\,.$$

Pour présenter cet objet sous un jour plus concret, et le relier à la notion de variété torique projective introduite dans la section précédente, nous nous donnerons un système de générateurs du semi-groupe $\check{\sigma}\cap\Lambda^*$, système que nous supposerons enrichi de points additionnels pris dans $\check{\sigma}\cap\Lambda^*$, de manière à ce que ce système (que nous noterons $\underline{l}_1,...,\underline{l}_N$) engendre aussi Λ^* en tant que groupe (situation analogue à celle évoquée dans l'étude du cas particulier de la section précédente). Si F désigne l'homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{C}[T_1,...,T_N]\mapsto\mathbb{C}[X_1^{\pm1},...,X_n^{\pm1}]\quad T_j\mapsto X^{\underline{l}_j}\,,$$

alors U_σ se trouve réalisé (du point de vue ensembliste) comme l'adhérence dans $\mathbb{C}^N$ de l'ensemble des points

$$\{(\zeta^{\underline{l}_1},...,\zeta^{\underline{l}_N});\ \zeta\in\mathbb{T}^n\}\,.$$

Il s'agit, on l'a vu dans la section précédente, d'un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^N$ défini par un jeu d'équations binomiales. Comme le tore $\mathbb{T}^n$ se trouve en bijection (via une transformation birationnelle car monomiale) avec l'ensemble

$$\{(\zeta^{\underline{l}_1},...,\zeta^{\underline{l}_N});\ \zeta\in\mathbb{T}^n\}\,,$$

on peut voir du point de vue ensembliste la construction de U_σ comme un moyen de "fermer" le tore ouvert $\mathbb{T}^n$.

Mais le plus important n'est pas tant le fait que U_σ se présente comme la réalisation d'une fermeture du tore ouvert, que celui que le groupe $\mathbb{T}^n$ <u>ait une action</u> sur U_σ. Pour décrire très simplement cette action, la vision algébrique de U_σ est la plus commode. Un point $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)$ de $\mathbb{T}^n$ s'identifie à un morphisme de groupes entre Λ^* (groupe additif) et $\mathbb{C}^*$ (groupe multiplicatif). L'action

$$\mathbb{T}^n\times U_\sigma\mapsto U_\sigma\quad(\zeta,x)\mapsto\zeta\bullet x\in U_\sigma$$

se décrit simplement par

$$[\zeta\bullet x](u)=\zeta(u)x(u)=\prod_{j=1}^n\zeta_j^{u_j}\times x(u)\quad\forall u\in\check{\sigma}\cap\Lambda^*\,.$$

Cette action étend à U_σ l'action naturelle de $\mathbb{T}^n$ sur lui-même (opération de groupe).

Il faut aussi noter ici que U_σ contient un point particulier unique, dit *point distingué*, qui est l'homomorphisme x_σ de $(\check{\sigma} \cap \Lambda^*, +)$ dans $(\mathbb{C}^* \cap \{0\}, \times)$ défini par

$$x_\sigma(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } u \in \sigma^\perp \\ x_\sigma(u) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ce point est l'unique point de U_σ fixe sous l'action de $\mathbb{T}^n$ lorsque $\mathrm{vect}(\sigma) = \Lambda_{\mathrm{R}}$ (dans le cas contraire, il n'existe pas de tel point fixe : en effet, un point x de U_σ est fixe sous l'action de $\mathbb{T}^n$ si et seulement si $x(u) = 0$ pour tout $u \in \check{\sigma} \cap \Lambda^*$ avec $u \neq 0$; or dire que $\sigma^\perp \neq \{0\}$ équivaut à dire précisément que $\mathrm{vect}\,\sigma \neq \Lambda_{\mathrm{R}}$).

Exemples. Si σ est engendré par $e_1, ..., e_k$, $k \leq n$, où $e_1, ..., e_k$ est une partie d'une base $\{e_1, ..., e_n\}$ du réseau Λ, alors

$$\check{\sigma} \cap \Lambda^* = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{N} e_j^* + \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{Z} e_j^*$$

et

$$U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k} .$$

Le cas typique est celui où $k = n$ et ou donc U_σ se présente comme une copie de $\mathbb{C}^n$. Le point distingué est dans ce cas l'origine. Ce sont de telles copies que nous "recollerons" par la suite pour réaliser les variétés toriques projectives définies à la section 3.1.

3.3 Éventails et "collage" de variétés toriques affines

3.3.1 Cônes stricts, faces strictes

Étant donné un cône strict σ de Λ_{R} (toujours supposé *rationnel*, c'est à dire construit, comme à la définition 3.2, à partir de points du réseau Λ), on peut, nous l'avons vu, lui associer une variété algébrique affine qui, dans le langage de la théorie des schémas, est

$$U_\sigma = \mathrm{spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]$$

(schéma associé à un semi-groupe), et qui, plus concrètement, se "visualise" ensemblistement comme l'adhérence dans $\mathbb{C}^N$ de

$$\{(\zeta^{l_1}, ..., \zeta^{l_N});\ \zeta \in \mathbb{T}^n\} ,$$

lorsque $\{\underline{l}_1, ..., \underline{l}_N\}$ est un système de générateurs du semi-groupe $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ qui soit en même temps une base du réseau Λ^* considéré en tant que groupe.

Si τ désigne un cône rationnel strict qui se présente comme une face de σ, on peut lui associer une variété algébrique affine U_τ. Comme on la vu, les "points" de U_τ correspondent aux homomorphismes de semi-groupes de $\check{\tau} \cap \Lambda^*$ dans $\mathbb{C} = \mathbb{T} \cap \{0\}$ (considéré comme semi-groupe multiplicatif). Or si τ est une face de σ et u^* un vecteur de Λ^* appartenant à l'intérieur relatif du cône $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$, on a $\tau = \sigma \cap (u^*)^\perp$. Prenons w^* dans le réseau Λ^* ; dire que w^* est un élément de S_τ revient à dire que

$$< w^*, \underline{\xi} > \geq 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \tau \,.$$

Mais alors, il est clair que si k est un entier positif suffisamment grand, alors

$$<< w^* + ku^*, \underline{\eta} > \geq 0 \quad \forall \underline{\eta} \in \sigma \,,$$

ce qui signifie $w^* + ku^* \in S_\sigma$. Ainsi, l'on a $S_\tau = S_\sigma + (-u^*)\mathbb{N}$. Ainsi tout élément χ_{w^*} de l'algèbre $\mathbb{C}[S_\tau]$ peut-il s'écrire

$$\chi_{w^* - ku^*} = \chi_{w^*} / (\chi_{u^*})^k \,.$$

On dispose ainsi (de $\mathbb{C}[S_\tau]$ dans $C[S_\sigma]$) d'un $\mathbb{C}$ morphisme d'algèbres, puisque

$$\mathbb{C}[S_\tau] = (\mathbb{C}[S_\sigma])_{\chi_{u^*}}$$

(il s'agit là du morphisme de localisation). Ce morphisme induit un morphisme de schémas $U_\sigma \mapsto U_\tau$ et l'on peut considérer U_τ (lorsque τ est une face stricte de σ) comme un ouvert principal du schéma U_σ. Plus moin, nous utiliserons les U_τ pour "souder" divers U_σ entre elles.

3.3.2 Éventails et polyèdres

Nous commencerons par une première définition brute de la notion d'*éventail*, suivie immédiatement après de l'exemple qui pour nous sera fondamental d'un éventail attaché à un polyèdre convexe Δ.

Définition 3.4 *Étant donné un réseau Λ, on appelle éventail toute collection finie de cônes rationnels stricts (ou réduits à $\{0\}$) de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, saturée pour l'opération de "prise de face" et telle que l'intersection de deux cônes quelconques de la collection soit une face de chacun d'eux (ce qui implique automatiquement la saturation via l'opération d'intersection).*

Exemple fondamental : Soit Δ un polyèdre convexe de Λ_{R}, supposé de dimension égale à celle de l'espace affine Λ_{R} ; on associe à un tel polyèdre Δ la relation d'équivalence sur l'espace affine Λ_{R}^* donnée par

$$v_1^* \mathcal{R}_\Delta v_2^* \Longleftrightarrow$$
$$\{\underline{\xi} \in \Delta;\ < v_1^*, \underline{\xi} >= \min_{\underline{\eta} \in \Delta} < v_1^*, \underline{\eta} >\} = \{\underline{\xi} \in \Delta;\ < v_2^*, \underline{\xi} >= \min_{\underline{\eta} \in \Delta} < v_1^*, \underline{\eta} >\}\,.$$

Les adhérences (au sens de la topologie usuelle de l'espace affine Λ_{R}^*) des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}_\Delta$ constituent un éventail relativement au réseau Λ_{R}^*. On remarque d'ailleurs que l'union des cônes de cet éventail (et l'on peut d'ailleurs se contenter uniquement des cônes de dimension maximale, soit $\dim \Lambda_{\mathrm{R}}^*$) est l'espace affine Λ_{R}^* tout entier.

Un autre exemple dans le cas $n = 2$: Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique $\{(1,0),(0,1)\}$, les trois cônes de dimension 2

$$\sigma_0 = \mathbb{R}^+ e_1 + \mathbb{R}^+ e_2\,,\ \sigma_1 = \mathbb{R}^+ e_2 - \mathbb{R}^+(e_1+e_2)\,,\ \sigma_2 = \mathbb{R}^+ e_1 - \mathbb{R}^+(e_1+e_2)\,,$$

induisent la donnée d'un éventail. À titre d'exercice, on construira les trois cônes duaux.

3.3.3 La construction algébrique de la variété torique affine attachée à un éventail

Considérons un éventail constitué, outre $\{0\}$, de cônes stricts de Λ_{R}. Si σ_1 et σ_2 sont deux cônes de l'éventail, on sait que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face (stricte) à la fois de σ_1 et de σ_2, ce qui fait que l'on peut voir le schéma $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ comme un ouvert principal tant de U_{σ_1} que de U_{σ_2}. Dès lors, la construction d'une variété algébrique affine à partir des U_σ, σ décrivant l'éventail, se fait “par collage”, suivant un procédé de géométrie algébrique classique qui se trouve par exemple décrit dans [16], exemple 2.3.5 page 75 et exercice 2.12, page 80. Le recollement de fait à partir du schéma algébrique $\mathcal{W}$, <u>*union disjointe*</u> des schémas U_σ, σ décrivant l'ensemble des cônes de l'éventail. On “colle” selon le processus indiqué dans l'exercice 2.12 de [16], page 80, les deux ouverts U_{σ_1} et U_{σ_2} le long du schéma intersection $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$. La variété algébrique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ ainsi obtenue est appelée <u>*variété torique associée à l'éventail*</u> $\mathcal{F}$.

Pour donner un exemple concret de ce processus de recollement, on vérifiera par exemple que la variété $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ attachée à l'éventail induit par les trois cônes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de $\mathbb{Z}_{\mathrm{R}}^2 = \mathbb{R}^2$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On verra sur cet exemple que le recours aux coordonnées homogènes induit un processus pratique intéressant pour “visualiser” le recollement. Les trois schémas correspondant aux cônes de l'éventail dont les duaux sont de dimension maximale (en l'occurrence ici σ_0, σ_1, σ_2) et que l'on doit recoller aux fins de réaliser la variété torique dans ce cas particulier sont $U_0 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_1, X_2]$, $U_1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_1^{-1}, X_1^{-1}X_2]$, $U_3 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_2^{-1}, X_1X_2^{-1}]$; il s'agit de trois copies de $\mathbb{C}^2$ et le recollement correspond à celui que l'on opère pour coller les trois ouverts de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que sont $V_0 = \{[1 : x_1 : x_2];\, x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2\}$, $V_1 = \{[x_0 : 1 : x_2];\ x_0, x_2 \in \mathbb{C}^2\}$, et enfin $V_2 = \{[x_0 : x_1 : 1];\ x_0, x_1 \in \mathbb{C}^2\}$, réalisant ainsi l'espace projectif de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

De fait, une meilleure compréhension intuitive (et plus analytique) de ce “collage” est celle qu'utilise l'école Russe (et que l'on trouvera par exemple présentée dans [19], dans [2]), ou encore, plus en détail, dans [11]) dans la situation où tous les cônes de l'éventail dont la dimension est maximale (et donc égale à n) sont des cônes <u>simples</u>. Nous devons donc ici préciser quelques nouvelles définitions, entre autres celle de <u>squelette</u> d'un cône rationnel strict.

Définition 3.5 *Étant donné un cône rationnel strict σ de Λ_{R}, Λ étant rapporté à une base $\{e_1, ..., e_n\}$, on appelle <u>squelette</u> du cône σ l'ensemble des points*

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

appartenant à une face de dimension 1 (on dit aussi une “<u>arête</u>” de σ) et tels que $\mathrm{PGCD}(\lambda_1, ..., \Lambda_n) = 1$. Le cône σ est dit <u>simplicial</u> si son squelette est constitué de vecteurs de Λ_{R} linéairement indépendants ; il est dit <u>simple</u> si ce même squelette peut être complété en une base du réseau Λ. Un <u>éventail simplicial</u> est un éventail constitué uniquement, outre le cône $\{0\}$, de cônes simpliciaux, un <u>éventail simple</u> est un éventail constitué uniquement, outre le cône $\{0\}$, de cônes simples.

Considérons un cône simple et de dimension n, dont le squelette est constitué des points

$$\alpha_{j1}e_1 + \ldots + \alpha_{jn}e_n, \quad j = 1, ..., n,$$

du réseau Λ. Si A est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

et B son inverse, on remarque que les n vecteurs colonnes $a_1^*, ..., a_n^*$ de B constituent un système générateur du cône dual $\check{\sigma}$, système qui de plus, puisque le déterminant de la matrice A vaut 1, engendre $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ comme groupe. On peut associer au cône σ la transformation monoidale (et inversible) de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{T}^n$

$$\pi_\sigma : \quad (\zeta_1, ..., \zeta_n) \mapsto \left(\prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_{j1}}, ..., \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_{jn}} \right).$$

Cette application se prolonge de l'ouvert $\mathbb{T}^n$ à l'ouvert

$$\Omega_\sigma := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ \zeta_j \neq 0 \text{ si l'un des } \alpha_{jk},\ k = 1, ..., n, \text{ est strictement négatif}\},$$

en une application que l'on notera encore pour simplifier π_σ, réalisant une transformation monoidale inversible (donc biholomorphe) entre Ω_σ et son image $\pi(\Omega_\sigma)$.

Étant donné un éventail simple $\mathcal{F}$ de Λ_{R} dont les cônes maximaux sont de dimension n, la variété analytique complexe de dimension n que l'on obtient en recollant les diverses cartes locales $(\Omega_\sigma, \pi_\sigma)$ correspondant aux cônes de dimension n (voir [11] pour plus de détails) de l'éventail, est un bon modèle analytique, pourvu que l'on s'en tienne à l'aspect ensembliste, de la variété affine $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ construite suivant le principe de recollement des schémas (présenté au début de ce paragraphe) à partir, elle, de <u>tous</u> les cônes de l'éventail (et non plus seulement ceux de dimension maximale). Ce modèle est d'autant plus intéressant qu'il existe un procédé algorithmique que nous ne décrirons pas ici (on se reportera à [20], ou, pour une présentation moins abstraite, à la suite d'exercices proposée dans [12] pages 47-48) pour "raffiner" un éventail $\mathcal{F}$ en un éventail simple (c'est à dire construire un nouvel éventail, simple cette fois, $\widetilde{\mathcal{F}}$ tel que chaque cône de $\mathcal{F}$ soit une union finie de cônes de $\widetilde{\mathcal{F}}$). Les cônes de dimension maximale de $\widetilde{\mathcal{F}}$ ont bien sûr automatiquement même dimension que les cônes de dimension maximale de $\mathcal{F}$. Si cette dimension maximale vaut n, l'approche analytique décrite ci-dessus fonctionne pour la réalisation non de la variété torique affine correspondant à l'éventail $\mathcal{F}$ (qui elle n'est pas, du point de vue analytique, une variété analytique complexe lisse en général), mais pour celle de la variété affine torique associée à l'éventail raffiné $\widetilde{\mathcal{F}}$. Nous utiliserons beaucoup cette construction par la suite car il est beaucoup plus pratique, surtout lorsqu'il s'agit de mettre en oeuvre des techniques d'inspiration analytique, de travailler sur des êtres géométriques <u>lisses</u> plutôt que sur des êtres <u>singuliers</u>.

3.4 Partionnement en orbites

3.4.1 Le cas de la variété torique affine correspondant à un cône rationnel strict

Soit σ un cône rationnel strict de Λ_{R}. Soit $(w_1^*, ..., w_t^*)$ un système de générateurs de $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$, que l'on supposera aussi engendrer Λ^* en tant que groupe.

Les points du schéma affine U_σ correspondent, on l'a vu, aux homomorphismes de semi-groupes entre $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ (additif) et $\mathbb{C} \cup \{0\}$ (multiplicatif). Un tel homomorphisme x est déterminé par la connaissance des nombres complexes $x(w_1^*),...,x(w_t^*)$. Pour "classer" ces homomorphismes, donc les points de U_σ, nous distinguerons deux cas.

• Si tous les nombres $x(w_j^*)$, $j=1,...,t$, sont non nuls, x peut être prolongé en un homomorphisme de Λ^* (additif) dans $\mathbb{C}^*$ (multiplicatif), soit un élément de

$$\mathcal{O}_{\{0\}} := \mathrm{Hom}(\Lambda^*, \mathbb{C}^*) = \mathrm{Hom}(\{0\}^\perp \cap \Lambda^*, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{T}^n .$$

Le tore $\mathbb{T}^n$ agit de manière naturelle (et transitive) sur le groupe $\mathcal{O}_{\{0\}}$.

• En général, certains $x(w_j^*)$ seulement, $j=1,...,t$ sont non nuls, disons pour fixer les idées $x(w_{j_1}^*),...,x(w_{j_s}^*)$, et l'on peut considérer x comme un homomorphisme de $(\check{\sigma}\cap\Lambda^*)\cap\tau^\perp$ (semi-groupe additif), où τ est une certaine face de $\check{\sigma}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, homomorphisme que l'on peut prolonger de manière unique en un homomorphisme de groupes entre $\tau^\perp\cap\Lambda^*$ et $\mathbb{C}^*$. La face τ correspondant ainsi à x (ou plutôt au ""paquet" de $w_{j_l}^*$, $l=1,...,s$, tels que $x(w_{j_l}^*)\neq 0$), est précisément l'ensemble des points $\underline{\xi}$ de σ tels que

$$\sum_{l=1} < w_{j_l}^*, \underline{\xi} >= 0 .$$

Le groupe

$$\mathcal{O}_\tau := \mathrm{Hom}(\tau^\perp \cap \Lambda^*, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{T}^{n-\dim\tau}$$

est un groupe sur lequel agit de manière naturelle (et transitive) le tore $\mathbb{T}^n$.

En conclusion, le partitionnement de U_σ en

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \text{ face de } \sigma} \mathcal{O}_\tau$$

réalise exactement le partitionnement de U_σ en ses diverses *orbites* sous l'action du groupe $\mathbb{T}^n$ telle qu'elle a été décrite à la fin de la section 3.2. La plus "grosse" orbite est celle qui correspond à la face $\tau=\{0\}$, c'est le tore $\mathbb{T}^n$, la plus "petite", celle qui correspond à la face σ. Lorsque σ est un cône rationnel strict de dimension n, cette dernière orbite est le singleton $\{x_\sigma\}$, où x_σ est le point distingué de U_σ, ce point étant l'unique point de U_σ stable sous l'action du tore.

3.4.2 Partitionnement de la variété torique associée à un éventail

Considérons maintenant un éventail $\mathcal{F}$ et la variété torique correspondante $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Étant donné un cône rationnel strict de l'éventail, l'action du tore $\mathbb{T}^n$ sur le schéma algébrique U_σ est comptatible avec les divers morphismes de schémas

$$i_{\sigma,\tau}: \ U_\tau \mapsto U_\sigma ,$$

lorsque τ se trouve être une face stricte de σ ; en effet, le morphisme $i_{\sigma,\tau}$ dérive du morphisme entre algèbres de type fini

$$\mathbb{C}[\check{\tau} \cap \Lambda^*] \simeq \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]_{\chi_{u^*}} ,$$

le morphisme ci-dessus correspondant à la localisation d'anneaux en χ_{u^*}, où u^* désigne un vecteur du réseau Λ^* appartenant à l'intérieur relatif du cône $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$. Cette compatibilité entre l'action du tore $\mathbb{T}^n$ sur U_σ et les divers morphismes d'inclusion $U_\tau \mapsto U_\sigma$, avec le principe même de la construction de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ et les propriétés caractérisant un éventail, nous autorise à étendre l'action du tore $\mathbb{T}^n$ à la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ subordonnée à l'éventail $\mathcal{F}$. Le partitionnement en orbites de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ induit par cette action est encore

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_\sigma$$

(il s'agit encore d'une union disjointe).

Une orbite de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ sous l'action de $\mathbb{T}^n$ n'est fermée (pour la topologie de Zariski) que lorsqu'elle correspond à l'un des cônes de dimension maximale de l'éventail (comme les orbites réduites à un singleton lorsque l'éventail contient des cônes de dimension n). Dans le cas général, il est important de clarifier ce que sont, ne serait-ce qu'ensemblistement au moins, les adhérences des orbites "ouvertes" $\mathcal{O}_\sigma$, $\sigma \in \mathcal{F}$, du partitionnement de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Cette description est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Si τ désigne un cône de l'éventail $\mathcal{F}$, l'adhérence $V(\tau)$ (pour la topologie de Zariski) de l'orbite $\mathcal{O}_\tau$ dans $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ est l'union (disjointe) des orbites $\mathcal{O}_\sigma$, où σ décrit l'ensemble des cônes de l'éventail admettant τ pour face.*

Preuve. L'idée centrale de la preuve de ce résultat consiste à associer au cône τ un éventail relativement au réseau quotient Λ/Λ_τ, où Λ_τ désigne le sous-réseau de Λ engendré par $\tau \cap \Lambda$. L'espace affine correspondant à ce réseau quotient est l'espace affine quotient $\Lambda_{\mathrm{R},\tau} := \Lambda_{\mathrm{R}}/\mathrm{vect}(\tau)$, et l'éventail $\mathcal{F}_\tau$ que l'on associe à τ, et que l'on appelle <u>*étoile du cône τ*</u> relativement à l'éventail $\mathcal{F}$, est précisément la collection des cônes dans $\Lambda_{\mathrm{R},\tau}$ obtenus en "projetant" (par passage au quotient) sur $\Lambda_{\mathrm{R},\tau}$ tous les cônes de $\mathcal{F}$ admettant τ pour face (en tant que cônes de l'espace Λ_{R}). À cet éventail $\mathcal{F}_\tau$, correspond la construction d'une variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$; il s'agit d'une variété torique construite à partir d'un éventail (en l'occurrence $\mathcal{F}_\tau$) d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension $n - \dim(\tau)$. En particulier, si τ est un cône de dimension 1 de l'éventail $\mathcal{F}$ (ces cônes, dirigés par des vecteurs $\underline{\eta}_j = \eta_{j1}e_1 + \ldots + \eta_{jn}e_n$, où PGCD $(\eta_{j1}, ..., \eta_{jn}) = 1$, $j = 1, ..., s$, $e_1, ..., e_n$ désignant une base du réseau Λ, seront, on le verra, en correspondance avec ce que l'on appellera les <u>*coordonnées homogènes*</u> sur la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$), la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$ est une variété torique de dimension $n - 1$.

Nous allons maintenant voir que cette variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$ se plonge dans $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ comme sous-variété fermée (on peut donc la considérer, du point de vue schématique, comme un sous-schéma de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$) ; de plus, on verra que $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$, une fois ainsi plongée, est, du point de vue ensembliste, l'adhérence pour la topologie de Zariski de l'orbite $\mathcal{O}_\tau$ dans $\mathcal{X}(\mathcal{F})$.

Voyons le premier point. Les variétés toriques affines que l'on est amené à recoller pour construire $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$ sont les schémas

$$U_{\sigma,\tau} := \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap \Lambda^*])\,,$$

où σ décrit l'ensemble des cônes de $\mathcal{F}$ admettant τ comme face. Or tout homomorphisme de semi-groupes entre $\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap \Lambda^*$ (additif) et $\mathbb{C} \cup \{0\}$ (multiplicatif) se prolonge (trivialement par 0) en un homomorphisme de semi-groupes de $\check{\sigma} \cap \Lambda^*$ (additif) dans $\mathbb{C}^* \cup \{0\}$ (multiplicatif). Au niveau des fonctions régulières, l'application

$$\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*] \mapsto \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap \Lambda^*]$$

correspondante est l'application qui préserve le caractère χ_{u^*} si $u^* \in \check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap \Lambda^*$ et le transforme en le caractère nul sinon. Cette application

$$U_{\sigma,\tau} \mapsto U_\sigma$$

(lue donc au niveau de la théorie des schémas) est un plongement fermé (c'est immédiat par construction). De plus, lorsque σ décrit l'ensemble des cônes de $\mathcal{F}$ contenant τ comme face, il y a compatibilité entre ces plongements et l'opération de "prise de face" au niveau des cônes σ. Ceci permet d'affirmer que la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$, obtenue précisément en recollant les $U_{\sigma,\tau}$, lorsque σ décrit l'ensemble des cônes de $\mathcal{F}$ ayant τ pour face, est une sous-variété fermée de celle que l'on obtient en recollant <u>tous</u> les U_σ, $\sigma \in \mathcal{F}$, c'est à dire $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Notre première affirmation est donc ainsi prouvée. Notons que si τ est une face de dimension 1, $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$ est une hypersurface de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Dans la construction de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à partir de l'éventail induit par les trois cônes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de $\mathbb{R}^2$ introduits dans le second exemple de la section 3.3.2, les sous-schémas $\mathcal{X}(\mathcal{F};\sigma_0\cap\sigma_1)$, $\mathcal{X}(\mathcal{F};\sigma_1\cap\sigma_2)$ et $\mathcal{X}(\mathcal{F};\sigma_0\cap\sigma_2)$ correspondent respectivement aux trois hypersurfaces $\{X_2=0\}$, $\{X_0=0\}$, $\{X_1=0\}$, les équations étant ici exprimées en coordonnées homogènes. On notera ici la correspondance entre les coordonnées homogènes et les faces de dimension 1 de l'éventail à partir duquel nous avons réalisé $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans cet exemple.

Il nous reste pour prouver la proposition à vérifier que $\mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)$ (que nous noterons maintenant $V(\tau)$) est bien l'adhérence de $\mathcal{O}_\tau$ pour la topologie de Zariski. En fait, nous allons montrer, pour tout cône τ de $\mathcal{F}$, la formule

$$\mathcal{O}_\tau = V(\tau)\setminus \bigcup_{\substack{\{\sigma\in\mathcal{F};\ \tau \text{ face de } \sigma\}\\ \sigma\neq\tau}} V(\sigma)\,. \tag{3.1}$$

En travaillant dans le réseau quotient Λ_τ, on peut, pour prouver cette dernière formule, supposer que τ est le cône $\{0\}$, auquel cas la formule se réduit à montrer que pour un éventail $\mathcal{F}$ relatif à un réseau n-dimensionnel $\mathcal{F}$,

$$\mathbb{T}^n = \mathcal{X}(\mathcal{F})\setminus \bigcup_{\substack{\sigma\in\mathcal{F}\\ \sigma\neq 0}} \mathcal{X}(\mathcal{F};\tau)\,.$$

On vérifie cette formule immédiatement en prenant l'intersection des deux membres avec $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\Lambda^*]$, où σ est un cône de l'éventail $\mathcal{F}$. On retrouve le partitionnement de la collection des homomorphismes x de semi-groupes entre $\check{\sigma}\cap\Lambda^*$ (additif) et $\mathbb{C}^*\cup\{0\}$ (multiplicatif) suivant la face τ de σ telle que

$$x^{-1}(\mathbb{C}^*) = \check{\sigma}\cap\tau^\perp\cap\Lambda^*$$

(voir la section 3.4.1). Il résulte de la formule (3.1) (par récurrence sur la dimension de σ par exemple), que, pour tout cône σ de $\mathcal{F}$,

$$V(\sigma) = \bigcup_{\{\tau;\ \tau \text{ face de } \sigma\}} \mathcal{O}_\tau\,, \tag{3.2}$$

cette union étant une union disjointe. La densité de $\mathcal{O}_\sigma$ dans $V(\sigma)$ (pour la topologie de Zariski) résulte des formules (3.1) et (3.2) et du fait que $V(\sigma)$ (comme $\mathcal{O}_\sigma$) soit un schéma algébrique de dimension $n-\dim\sigma$ contenant $\mathcal{O}_0\simeq\mathbb{T}^n$. Notons que, si l'on souhaite développer un point de vue plus analytique, il y a aussi densité de l'orbite $\mathcal{O}_\tau$ dans la sous-variété algébrique $V(\tau)$ (pensée juste en termes ensemblistes), cette fois pour la topologie sur $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ héritée de la métrique usuelle sur les cartes U_σ, considérées comme plongées dans des espaces du type $\mathbb{C}^N$ via le choix d'un système générateur du semi-groupe $\check{\sigma}\cap\Lambda^*$ qui soit en même temps un système générateur du réseau Λ^* en tant que groupe. $\diamondsuit$

Exemple. La décomposition de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ induite par l'action du tore $\mathbb{T}^2$ est une décomposition en 7 orbites. Le tore $\mathbb{T}^2$ lui même est l'orbite $\mathcal{O}_{\{0\}}$. Les trois points fixes $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$ correspondent aux points distingués $x_{\check{\sigma}_0}$, $x_{\check{\sigma}_1}$ et $x_{\check{\sigma}_2}$. Enfin, les trois orbites $\{X_0 = 0,\ X_1X_2 \neq 0\}$, $\{X_1 = 0,\ X_0X_2 \neq 0\}$ et $\{X_2 = 0,\ X_0X_1 \neq 0\}$ correspondent aux trois faces de dimension 1 de l'éventail, soit $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma_0 \cap \sigma_2$ et $\sigma_0 \cap \sigma_1$. Les trois hypersurfaces $\{X_0 = 0\}$, $\{X_1 = 0\}$, $\{X_2 = 0\}$ sont les sous-variétés algébriques $V(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, $V(\sigma_0 \cap \sigma_2)$ et $V(\sigma_0 \cap \sigma_1)$.

3.5 Diviseurs sur une variété torique

3.5.1 Diviseurs de Weil sur une variété torique

Un *diviseur de Weil* sur une variété algébrique $\mathcal{X}$ est par définition une combinaison linéaire formelle finie

$$E = \sum \gamma_j [E_j]\,,\ \gamma_j \in \mathbb{Z}\,,$$

où les E_j sont des hypersurfaces irréductibles de $\mathcal{X}$. C'est aussi ce que l'on appelle un $n-1$-cycle si n désigne la dimension de la variété algébrique. Une fonction rationnelle sur $\mathcal{X}$ détermine un diviseur de Weil

$$[\mathrm{div}\, F] = \sum_{E \text{ hypersurface irréductible de } \mathcal{X}} \mathrm{ordre}_E\,(F)\;[E]\,,$$

où $\mathrm{ordre}_E(F)$ désigne l'ordre de la fonction rationnelle F le long de E (si $\{e = 0\}$ est une équation locale pour E au voisinage d'un point régulier x, cet ordre désigne l'exposant $q \in \mathbb{Z}$ tel que $F(x) = [e(x)]^q g(x)$, avec g copremier avec e dans l'anneau $\mathcal{O}_x(\mathcal{X})$ des germes de fonctions régulières au point x). Le *groupe de Chow* $A_{n-1}(\mathcal{X})$ est par définition le quotient du groupe additif des $n-1$-cycles sur $\mathcal{X}$ par le sous-groupe engendré par les cycles du type $[\mathrm{div}\,(F)]$, où F est une fonction rationnelle sur $\mathcal{X}$.

On peut définir de la même manière les groupes de Chow d'ordre inférieur,

$$A_{n-2}(\mathcal{X}), ..., A_0(\mathcal{X})\,.$$

Le groupe $A_k(\mathcal{X})$ est obtenu en quotientant le groupe des k-cycles algébriques, c'est à dire des combinaisons linéaires formelles finies

$$E^{[k]} = \sum \gamma_j [E_j^{[k]}]\,,\ \gamma_j \in \mathbb{Z},$$

où les $E_j^{[k]}$ sont des sous-variétés algébriques irréductibles de $\mathcal{X}$ de dimension k par le sous-groupe engendré par les k-cycles $[\mathrm{div}_{\mathcal{Y}}\, F]$, où F est une fonction rationnelle sur une sous-variété $\mathcal{Y}$ irréductible de dimension $k+1$ de $\mathcal{X}$, le diviseur de Weil $[\mathrm{div}_{\mathcal{Y}} F]$ étant calculé selon la formule

$$[\mathrm{div}_{\mathcal{Y}} F] = \sum_{E \text{ hypersurface irréductible de } \mathcal{Y}} \mathrm{ordre}_E(F)\,[E]\,.$$

Les diviseurs de Weil qui retiendront plus particulièrement notre attention dans le cas particulier des variétés toriques sont les *diviseurs de Weil* $\mathbb{T}$*-invariants*, c'est à dire ceux que préserve l'action du tore sur la variété torique. Nous avons le résultat important suivant :

Proposition 3.2 *Étant donné un réseau de dimension n, Λ, un éventail $\mathcal{F}$ dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$ dont les cônes ne sont pas tous inclus dans un sous-espace propre de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (ce qui revient à dire que les cônes $\tau_1, ..., \tau_s$ de dimension 1 de l'éventail $\mathcal{F}$ engendrent comme espace affine l'espace $\Lambda_{\mathbb{R}}$) et la variété torique associée $\mathcal{X}(\mathcal{F})$, le groupe $A_k(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$, $k=0,...,n-1$ est engendré par les classes des $[V(\tau)]$, où τ décrit l'ensemble des cônes de dimension $n-k$ de l'éventail $\mathcal{F}$. En particulier, les classes des diviseurs de Weil $[V(\tau_1)], ..., [V(\tau_s)]$, où $\tau_1, ..., \tau_s$ sont les cônes de dimension 1 de l'éventail, constituent un système de générateurs du groupe $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$.*

Preuve. On fait dans un premier temps la preuve dans le cas $k = n-1$. On sait que

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \mathbb{T}^n \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s} V(\tau_j)\right),$$

l'union des deux ensembles ci-dessus étant une union disjointe. De la définition même des groupes de Chow à l'ordre $n-1$ sur une variété algébrique de dimension n, résulte que l'on a la suite de morphismes de groupes

$$A_{n-1}(\bigcup_{j=1}^{s} V(\tau_j)) \overset{\iota}{\mapsto} A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}) \overset{\rho}{\mapsto} A_{n-1}(\mathbb{T}^n)\,,$$

où ι désigne le morphisme naturel d'extension (les cycles d'une sous-variété $\mathcal{Y}$ sont interprétés comme cycles de la variété ambiante) et ρ le morphisme de "restriction" (on ne conserve du cycle que les composantes dont le support est inclus dans le complémentaire de $\mathcal{Y}$). Mais, comme le groupe de Chow d'ordre $n-1$ de $\mathbb{T}^n$ est réduit à 0 (car tout $n-1$-cycle sur $\mathbb{T}^n$ est de la forme $[\mathrm{div}\, F]$, avec F fraction rationnelle en $X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}$), on a la demi suite exacte

$$A_{n-1}(\bigcup_{j=1}^{s} V(\tau_j)) = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{Z}[V(\tau_j)] \mapsto A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})) \mapsto 0\,.$$

Il résulte de ceci que toute classe de $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ admet un représentant $\mathbb{T}$-invariant. Le groupe $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ se lit donc comme le quotient du groupe additif des diviseurs de Weil $\mathbb{T}$-invariants par le sous-groupe engendré par les $[\operatorname{div} F]$, où F est une fonction rationnelle sur $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ qui est $\mathbb{T}$-invariante. Une telle fonction rationnelle F est induite, à une constante multiplicative près, par un caractère χ_{u^*}, $u^* \in \Lambda^*$. Or le calcul de $[\operatorname{div} \chi_{u^*}]$ est facile car il suffit de remarquer que l'ordre de χ_{u^*} le long de $V(\tau_j)$ est

$$\text{ordre}_{V(\tau_j)}\,(\chi_{u^*}) = < u^*, \eta_j > ,$$

où η_j est le vecteur de Λ dirigeant le cône τ_j et dont le PGCD des coordonnées vaut 1. On a donc

$$[\operatorname{div} \chi_{u^*}] = \sum_{j=1}^{s} < u^*, \eta_j > [V(\tau_j)]\,.$$

Si

$$\psi_{\mathcal{F}} :\ \Lambda^* \mapsto \mathbb{Z}V[\tau_1] + \ldots + \mathbb{Z}V[\tau_s]$$

est l'application définie par

$$\psi_{\mathcal{F}}(u^*) := \sum_{j=1}^{s} < u^*, \eta_j > [V(\tau_j)]\,,$$

il résulte de ce qui précède que la suite

$$0 \overset{\psi_{\mathcal{F}}}{\mapsto} \mathbb{Z}V[\tau_1] + \ldots + \mathbb{Z}V[\tau_s] \overset{\rho}{\mapsto} A_{n-1}(\mathcal{X}) \mapsto 0$$

est exacte. On peut d'ailleurs aussi ajouter que la suite

$$0 \mapsto \Lambda^* \overset{\varphi_{\mathcal{F}}}{\mapsto} \mathbb{Z}^s \overset{\theta}{\mapsto} A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})) \mapsto 0\,,$$

où

$$\varphi_{\mathcal{F}}(u^*) = (< u^*, \eta_j >)_{j=1}^{s}$$

et

$$\theta(m_1, ..., m_s) = \text{classe du cycle } m_1[V(\tau_1)] + \ldots + m_s[V(\tau_s)]$$

est elle aussi une suite exacte. Ceci nous donne donc la description de $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ comme le quotient du groupe additif $\mathbb{Z}^s$ par le sous-groupe $\operatorname{Im} \varphi_{\mathcal{F}}(\Lambda^*)$, sous-groupe de rang n. Ainsi $A_{n-1}(\mathcal{X})$ est-il le quotient d'un groupe libre de rang s par un sous-groupe de rang n, où s désigne le nombre de cônes de dimension 1 dans l'éventail à partir duquel a été construite la variété torique.

Le cas k quelconque se traite ensuite par induction. Si l'on note $\mathcal{X}_i$ la sous-variété algébrique

$$\mathcal{X}_i := \bigcup_{\substack{\tau\in\mathcal{F}\\ \dim\tau=n-i}} V(\tau)\,,$$

on a, comme dans le cas $i = n-1$,

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i-1} \cup \bigcup_{\substack{\tau\in\mathcal{F}\\ \dim\tau=n-i}} \mathcal{O}_\tau$$

(c'est une conséquence de la formule 3.2). D'où, pour $k = 0, ..., n-1$, pour $i = 1, ..., n$, les suites

$$A_k(\mathcal{X}_{i-1}) \overset{\iota}{\mapsto} A_k(\mathcal{X}_i) \overset{\rho}{\mapsto} \bigoplus_{\substack{\tau\in\mathcal{F}\\ \dim\tau=n-i}} A_k(\mathcal{O}_\tau) \mapsto 0\,.$$

Chaque orbite $\mathcal{O}_\tau$, avec $\dim\tau = n-i$ étant en fait $\mathbb{T}^i$, on a $A_i[\mathcal{O}_\tau] = \mathbb{Z}\mathbb{T}^i$ et $A_k[\mathcal{O}_\tau] = 0$ si $k \neq i$. La restriction de $A_k(\mathcal{X}_i)$ à $A_k(\mathcal{O}_\tau)$, avec τ cône de dimension $n-i$, transforme $[V(\tau)]$ en $[\mathcal{O}_\tau]$. On montre ainsi par récurrence sur la dimension que les classes des $V(\tau)$, avec $\dim\tau = n-k$, engendrent $A_k(\mathcal{X})$, ce qui achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

3.5.2 Coordonnées homogènes sur une variété torique

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le groupe de Chow $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ d'une variété torique attachée à un éventail de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ dont les cônes de dimension 1 engendrent l'espace $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est engendré par les classes des diviseurs de Weil

$$[V(\tau_1)], ..., [V(\tau_s)]\,,$$

où $\tau_1, ..., \tau_s$ sont précisément ces faces de dimension 1 (ou encore les "arêtes" de l'éventail).

Considérons donc un tel éventail $\mathcal{F}$, et associons lui l'algèbre polynomiale $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ (il faut penser que chaque variable x_j, $j = 1, ..., s$, est ici en correspondance avec une face de dimension 1 de $\mathcal{F}$. Sur cette algèbre, nous allons introduire une $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ graduation en décidant que le "degré" du monôme $x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}$ sera par définition

$$\deg_{\mathcal{X}}[x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}] := \text{classe du cycle } k_1[V(\tau_1)]+\ldots+k_s[V(\tau_s)]\,,\quad k_1, ..., k_s \in \mathbb{N}\,.$$

Cette graduation se prolonge aussi aux mônômes de Laurent (on prend les k_j dans $\mathbb{Z}$ et non plus dans $\mathbb{N}$) et l'on peut ainsi introduire la notion de $\mathcal{X}$-homogénéité. Un polynôme en s variables sera dit <u>$\mathcal{X}$-homogène de poids m</u>,

$m \in \mathbb{Z}$, si et seulement si tous les monômes qui le composent sont de $\mathcal{X}$-degré égal à m. L'algèbre $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$, équipée de cette $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$-graduation, sera l'*anneau de coordonnées homogènes* associé à la variété torique, et son intérêt majeur, on s'en doute, sera de pouvoir transposer autant que faire se peut au cadre des variétés toriques l'outil de calcul puissant qu'est le recours aux coordonnées homogènes lorsque l'on travaille dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cette notion importante d'anneau de coordonnées homogènes associé à une variété torique se trouve présenté dans [8]. On pourra aussi consulter la présentation résumée dans [7], section 2.

Nous utiliserons beaucoup par la suite le recours à de telles coordonnées homogènes, mais d'ores et déjà, on peut bien vérifier ici, sur l'exemple de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ utilisé maintes fois, que ces coordonnées homogènes correspondent à celles que l'on attend dans le cas projectif. Si $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ et e_i^*, $i = 1, ..., n$ est le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\Lambda_{\mathbb{R}}^*$, le caractère $\chi_{e_i^*}$ correspond naturellement à la variable "affine" X_i, si l'on a en tête de travailler, comme nous le ferons dans la section suivante, avec des polynômes de Laurent sur le tore. Ce caractère $\chi_{e_i^*}$ induit le diviseur de Weil

$$[\operatorname{div} \chi_{e_i^*}] = \sum_{j=1}^{s} < e_i^*, \eta_j > \ [V(\tau_j)]$$

sur la variété $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Si

$$\eta_j = (\eta_{j1}, ..., \eta_{jn}),\ \mathrm{PGCD}(\eta_{j1}, ..., \eta_{jn}) = 1$$

est l'expression de η_j dans la base canonique de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, les formules de passage des coordonnées inhomogènes $X_1, ..., X_n$ aux coordonnées homogènes $x_1, ..., x_s$ sont donc

$$X_i = \prod_{j=1}^{s} x_j^{\eta_{ji}}, \quad i = 1, ..., n\,. \tag{3.3}$$

Dans le cas de $\mathbb{P}^2$ de $\mathbb{C}$, on trouve bien, si x_0 correspond à $\sigma_1 \cap \sigma_2$, x_1 à $\sigma_0 \cap \sigma_2$ et x_2 à $\sigma_0 \cap \sigma_1$, les formules

$$X_1 = x_1/x_0, \quad X_2 = x_2/x_0\,.$$

Ce sont les formules correspondant à l'homogénéisation classique dans le cas de la dimension 2.

3.5.3 Diviseurs de Cartier sur une variété torique

Un *diviseur de Cartier* sur une variété algébrique $\mathcal{X}$ est par définition la donnée d'une collection (U, f), U décrivant une collection d'ouverts affines de $\mathcal{X}$ dont l'union recouvre $\mathcal{X}$, f une fonction régulière sur U, dite *équation locale* du diviseur sur U, de manière à ce que, si $U \cap U' \neq \emptyset$, $f_U/f_{U'}$ soit un inversible dans $\mathcal{O}(U \cap U')$. Un diviseur de Cartier D induit un fibré en droites $L(D)$ sur $\mathcal{X}$. Les diviseurs de Cartier forment un groupe additif ; on peut d'autre part associer à tout diviseur de Cartier un fibré en droites. Le groupe des fibrés en droites (l'opération étant le produit tensoriel de fibrés) à isomorphisme près est le *groupe de Picard* $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{X})$ de $\mathcal{X}$, et le morphisme

$$D \mapsto L(D)$$

a pour noyau le sous-groupe des diviseurs de Cartier du type $\mathrm{div}(F)$, où F est une fonction régulière définie globalement sur $\mathcal{X}$.

Dans le cas particulier des variétés toriques, nous pouvons préciser une autre notion, celle de *$\mathbb{T}$-diviseur de Cartier*. Un $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier est par définition un diviseur de Cartier invariant sous l'action du tore. Lorsque $\mathcal{X} = U_\sigma$, un tel diviseur de Cartier est de la forme $\mathrm{div}\,(\chi_{u^*})$, où u^* est un élément de Λ^*, ceci signifiant que χ_{u^*} donne précisément l'équation locale du diviseur de Cartier dans les cartes de U_σ. Remarquons qu'une autre équation locale est $\{\chi_{\tilde{u}^*} = 0\}$, où $\tilde{u}^* - u^* \in \sigma^\perp \cap \Lambda^*$. À un diviseur de Cartier $\mathbb{T}$-invariant D sur U_σ correspond donc sans ambigüité un élément

$$u^*(\sigma; D) \in \frac{\Lambda^*}{\sigma^\perp \cap \Lambda^*}\,.$$

Nous admettrons la proposition suivante, permettant de caractériser les $\mathbb{T}$-diviseurs de Cartier sur $\mathcal{X}(\mathcal{F})$.

Proposition 3.3 *Soit $\mathcal{F}$ un éventail de Λ_{R} dont les cônes de dimension* 1 *engendrent Λ_{R}. Une liste d'éléments $u^*(\sigma)$, $u^*(\sigma) \in \Lambda^*/(\sigma^\perp \cap \Lambda^*)$, $\sigma \in \mathcal{F}$, induit un $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ si et seulement si les données $u^*(\sigma)$ sont telles que les fonctions*

$$v \mapsto < u^*(\sigma), v >, \quad v \in \sigma$$

se recollent de manière à constituer une fonction continue et affine par morceaux sur l'union des cônes de l'éventail $\mathcal{F}$. Ce diviseur de Cartier est défini dans U_σ comme $D_\sigma = \mathrm{div}\,(\chi_{-u^*(\sigma)})$, ce qui signifie précisément que le caractère $\chi_{-u^*(\sigma)}$ correspond à l'équation locale au point générique de U_σ.

Exemple fondamental. Supposons que $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m$ soient m sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^n$ et $\Delta_1, ..., \Delta_m$ les enveloppes convexes de ces sous-ensembles. Soit

$$\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_m$$

la somme de Minkowski des Δ_j, $j = 1, ..., m$ et $\mathcal{F}$ un éventail qui soit une version raffinée de l'éventail associé à Δ dans l'exemple qualifié de "fondamental" à la section 3.3.2. Pour chaque $j = 1, ..., m$, La fonction

$$v \mapsto \min_{u^* \in \Delta_j} < u^*, v >$$

induit une fonction continue et affine par morceaux sur l'union des cônes constituant l'éventail $\mathcal{F}$. Il en résultera qu'une telle application induira un diviseur de Cartier E_j, $j = 1, ..., m$, sur la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Si F est un polynôme de Laurent de support l'ensemble $\mathcal{A}_j = \{\underline{l}^*_{j,0}, ..., \underline{l}^*_{j,A_j-1}\}$,

$$F_j(X_1, ..., X_n) = \sum_{k=0}^{A_j-1} c_{j,k} X^{\underline{l}_{j,k}} \,,$$

et si $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ désigne l'anneau de coordonnées homogènes attaché à $\mathcal{X}(\mathcal{F})$, l'homogénéisé de F relativement à la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ sera le polynôme obtenu en chassant les déominateurs dans le polynôme de Laurent en $x_1, ..., x_s$

$$G_j(x_1, ..., x_s) = F\left(\prod_{i=1}^{s} x_i^{\eta_{i1}}, \ldots, \prod_{i=1}^{s} x_i^{\eta_{in}}\right),$$

soit le polynôme

$$\widetilde{F}(x_1, ..., x_s) = \sum_{k=0}^{A_j-1} c_{j,k} \prod_{i=1}^{s} x_i^{<\underline{l}^*_{j,k}, \eta_i> - \min\limits_{\underline{\xi}^* \in \Delta_j} <\xi^*, \eta_i>} \,.$$

Comme on le voit immédiatement, le diviseur de Weil attaché au diviseur de Cartier E_j est

$$-\sum_{i=1}^{s} \min_{\underline{\xi}^* \in \Delta_j} < \xi^*, \eta_i > [V(\tau_i)] \,.$$

De plus, le polynôme de Laurent F_j induit un diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ qui sera exactement

$$D_F := \operatorname{div} F_j + E_j \,.$$

Ce diviseur de Cartier est <u>*effectif*</u>, au sens où le diviseur de Weil qui lui est naturellement attaché s'écrit

$$\begin{aligned} [D_F] &= \sum_{E \text{ hypersurface irréductible de } \mathcal{X}(\mathcal{F})} \text{ordre}_E(\text{équation locale de } D_F) \\ &= \sum_{j=1}^{s} \gamma_j [V(\tau_j)] \,, \ \gamma_j \in \mathbb{N} \,. \end{aligned}$$

On peut penser $F(x_1, ..., x_s)$ comme une équation locale de ce diviseur (en coordonnées homogènes) sur la variété torique.

Remarque. Notons que le $\mathbb{T}$-diviseur de Weil $[D]$ induit (selon le procédé décrit ci-dessus) par le $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier D défini par la donnée d'une collection $\{u^*(D; \sigma);\ \sigma \in \mathcal{F}\}$ telle que les fonctions

$$v \mapsto < u^*(D; \sigma), v > , \quad v \in \sigma$$

se recollent en une fonction $\psi = \psi_D$ est

$$[D] = - \sum \psi_D(\eta_j) \, [V(\tau_j)] \, .$$

3.5.4 Idéal irrelevant attaché à une variété torique

Soit Λ un réseau de dimension n, $\mathcal{F}$ un éventail de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ dont les cônes de dimension 1, $\tau_1, ..., \tau_s$, engendrent $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (comme espace affine) et soit $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ l'anneau de coordonnées homogènes associé à la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$.

À chaque cône σ de l'éventail $\mathcal{F}$, on associe le diviseur de Weil $[D_\sigma]$ défini par

$$[D_\sigma] = \sum_{\{j \in \{1, ..., s\};\ \tau_j \text{ non face de } \sigma\}} [V(\tau_j)] \, .$$

À un tel diviseur de Weil correspond naturellement (voir la correspondance entre les faces de dimension 1 de $\mathcal{F}$ et les coordonnées homogènes) le monôme $x^{[\sigma]}$ de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ défini par

$$x^{[\sigma]} := \prod_{\{j \in \{1, ..., s\};\ \tau_j \text{ non face de } \sigma\}} x_j \, .$$

Définition 3.6 *On appelle idéal irrelevant attaché à la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$, les données étant comme ci-dessus, l'idéal monomial de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ (anneau de coordonnées homogènes attaché à $\mathcal{X}(\mathcal{F})$, chaque coordonnée x_j, $j = 1, ..., s$, étant en correspondance avec une arête de l'éventail $\mathcal{F}$) engendré par les monômes $x^{[\sigma]}$, lorsque σ décrit la famille de tous les cônes de l'éventail, ou encore, ce qui est suffisant pour disposer d'un système générateur, la famille de tous les cônes de dimension maximale de $\mathcal{F}$.*

Exemple. Dans notre exemple familier qu'est $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (construit à partir de l'éventail induit par les trois cônes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$), les trois monômes associés à ces trois faces sont respectivement x_0 (cette variable correspondant à l'arête $\sigma_1 \cap \sigma_2$), x_1 (variable en correspondance avec l'arête $\sigma_0 \cap \sigma_2$) et enfin x_2

(variable attachée cette fois à l'arête $\sigma_0 \cap \sigma_1$). L'idéal irrelevant est donc dans ce cas l'idéal (x_0, x_1, x_2) de l'anneau $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Ceci est la situation générale en dimension quelconque lorsque l'éventail est celui qui induit la construction de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

On peut à ce stade se poser la question de savoir si la "présentation" géométrique classique de $\mathbb{P}^n$ comme le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$, c'est à dire de $\mathbb{C}^{n+1}$ privé précisément du lieu des zéros de l'idéal irrelevant, par la relation $\mathcal{R}$ de colinéarité

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}}{\mathcal{R}} \tag{3.4}$$

ne serait pas transposable au cadre plus général des variétés toriques.

À la place de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ dans (3.4), il serait naturel d'imaginer que l'on ait

$$\mathbb{C}^s \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\mathrm{irr}})\},$$

où $\mathcal{Z}(I^{\mathrm{irr}})$ désigne la variété des zéros de l'idéal irrelevant de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Mais il faut aussi préciser ce que devient dans le cas général la relation de colinéarité. C'est encore une fois l'action du tore sur la variété $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ qui va nous aider à éclaircir ce point. Comme on l'a vu, le groupe de Chow $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ (où $n = \dim \Lambda$) est un groupe additif de type fini de rang $s-n$. De la suite exacte

$$0 \mapsto \Lambda^* \overset{\varphi_{\mathcal{F}}}{\mapsto} \mathbb{Z}^s \overset{\theta}{\mapsto} A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})) \mapsto 0$$

introduite dans la section 3.5.1, on déduit en utilisant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{C}^*)$ la nouvelle suite exacte

$$1 \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})), \mathbb{T}) \mapsto \mathbb{T}^s \mapsto \mathrm{Hom}_{Z}(\Lambda^*, \mathbb{T}) \simeq \mathbb{T}^n \mapsto 0\,.$$

Le groupe $G_{\mathcal{F}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})), \mathbb{T})$ agit donc naturellement sur $\mathbb{C}^s$ via

$$g \bullet (\xi_1, ..., \xi_s) = (g([V(\tau_1)])\, \xi_1, ..., g([V(\tau_s)])\, \xi_s) \in \mathbb{C}^s\,. \tag{3.5}$$

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le résultat attendu, résultat qui nous permet de transposer au cadre des variétés toriques simpliciales la présentation géométrique classique de l'espace projectif.

Théorème 3.1 *Soit* Λ *un réseau,* $\mathcal{F}$ *un éventail simplicial de* $\Lambda_{\mathbb{R}}$ *dont les cônes de dimension* 1, $\tau_1, ..., \tau_s$*, engendrent* $\Lambda_{\mathbb{R}}$ *(en tant qu'espace affine). L'ouvert affine* $\mathbb{C}^s \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\mathrm{irr}}(\mathcal{F}))\}$ *est stable sous l'action du groupe* $G_{\mathcal{F}} :=$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})), \mathbb{T})$ *et l'on a*

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) \simeq \frac{\mathbb{C}^s \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\mathrm{irr}}(\mathcal{F}))\}}{G_{\mathcal{F}}}\,,$$

ce qui signifie que $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ se trouve réalisée comme le <u>quotient géométrique</u> de l'ouvert affine $\mathbb{C}^s \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\rm irr}(\mathcal{F}))\}$ par l'action du groupe $G_{\mathcal{F}}$.

Preuve. Le fait que l'action de $G_{\mathcal{F}}$ préserve l'ouvert affine $\mathbb{C}^s \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\rm irr}(\mathcal{F}))\}$ résulte simplement de ce que cet ouvert affine est une union d'hyperplans de coordonnées et de la manière (3.5) dont agit $G_{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{C}^s$.

Examinons maintenant comment le groupe $G_{\mathcal{F}}$ agit sur le schéma que constitue l'ouvert affine

$$V_\sigma := \{\xi \in \mathbb{C}^s;\ x^{[\sigma]} \neq 0\}\,.$$

On a

$$V_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, ..., x_s]_{(x^{[\sigma]})}\,,$$

où $\mathbb{C}[x_1, ..x_s]_{(x^{[\sigma]})}$ désigne la localisation de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]$ en l'idéal principal $(x^{[\sigma]})$. Cet anneau de coordonnées admet aussi une filtration par $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ et les monômes de degré 0 de cette algèbre sont les monômes du type

$$x_1^{<u^*,\eta_1>} \dots x_s^{<u^*,\eta_s>}\,, \quad u^* \in \Lambda^*$$

avec de plus

$$< u^*, \eta_j > \geq 0$$

si τ_j est une face de σ. Cette dernière clause signifie en fait $u^* \in \check{\sigma} \cap \Lambda^*$, ce qui implique que la composante de degré 0 de l'anneau des coordonnées du schéma V_σ puisse eţre identifiée à l'algèbre de semi-groupes $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]$. Le groupe $G_{\mathcal{F}}$ agit sur V_σ et son action induit une action sur l'anneau des coordonnées homogènes de V_σ. Les parties "homogènes" de degré k, $k \in A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$, de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]_{(x^{[\sigma]})}$ sont les sous-espaces propres sont l'action de $G_{\mathcal{F}}$ (la valeur propre correspondant à la partie de degré $k \in A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]_{(x^{[\sigma]})}$ étant précisément k). Les invariants de $G_{\mathcal{F}}$ dans l'action de ce groupe sur $\mathbb{C}[x_1, ..., x_s]_{(x^{[\sigma]})}$ sont donc les éléments de $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]$ et le <u>*quotient catégoriel*</u> $V_\sigma/\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ est $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]$. Ceci signifie qu'il existe une application π_σ $G_{\mathcal{F}}$-équivariante de V_σ dans Spec $[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]$, l'action de $G_{\mathcal{F}}$ sur sur Spec $[\check{\sigma}\cap\Lambda^*]$ étant triviale, telle que π_σ ait la propriété d'universalité (c'est précisément ceci que l'on entend en disant que (V_σ, π_σ) réalise $\operatorname{Spec} \check{\sigma} \cap \Lambda^*$ comme <u>*quotient catégoriel*</u> de V_σ sous l'action de $G_{\mathcal{F}}$).

La compatibilité de ces identifications avec l'opération de "prise de face" (voir [8], lemme 2.3 pour plus de détails, mais il s'agit ici en fait des mêmes remarques que celles qui ont été faites dans la section 3.3.1) suffit à affirmer que les diverses identifications

$$V_\sigma/G_{\mathcal{F}} \simeq U_\sigma := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \Lambda^*]\,, \quad \sigma \in \mathcal{F}\,,$$

au sens quotients catégoriels génèrent une identification

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_s] \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\rm irr}(\mathcal{F}))\}}{G_{\mathcal{F}}} \simeq \mathcal{X}(\mathcal{F}).$$

Ceci signifie, une fois de plus, qu'il existe une application $\tilde{\pi}_\sigma$ $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$-équivariante

$$\tilde{\pi}_\sigma : \ \mathbb{C}[x_1, ..., x_s] \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\rm irr}(\mathcal{F}))\} \mapsto \mathcal{X}(\mathcal{F})$$

(l'action de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ à droite étant triviale), ayant la propriété d'universalité.

Dire que $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ s'identifie au *quotient géométrique*

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_s] \setminus \{\mathcal{Z}(I^{\rm irr}(\mathcal{F}))\}}{G_{\mathcal{F}}},$$

c'est dire en plus de ce qui précède, que les fibres de $\tilde{\pi}_\sigma$ coïncident avec les $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$-orbites. Il suffit en fait de prouver ce résultat au niveau des applications π_σ ; le résultat pour $\tilde{\pi}_\sigma$ en résultera via les règles de compatibilité avec les opérations de "prise de face". On se contente de montrer que les $G_{\mathcal{F}}$ orbites de V_σ sous l'action de $G_{\mathcal{F}}$ sont fermées (pour la topologie de Zariski) dans V_σ, et ce pour tout cône σ de $\mathcal{F}$. Pour ce faire, on montre en fait ici que l'orbite d'un point $\underline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_s) \in V_\sigma$, où $\sigma \in \mathcal{F}$ est

$$O(G_{\mathcal{F}};\ \underline{\xi}) = \{\underline{\tilde{\xi}} \in V_\sigma;\ \prod_{j=1}^s \tilde{\xi}_j^{<u^*, \eta_j>} = \prod_{j=1}^s \xi_j^{<u^*, \eta_j>}\,, \quad \forall u^* \in \check{\sigma} \cap \Lambda^*\}\,. \tag{3.6}$$

Que l'orbite de $\underline{\xi}$ soit contenue dans le sous-ensemble figurant au membre de droite de (3.6) est évident puisque ce dernier ensemble est clairement saturé sous l'action de $G_{\mathcal{F}}$. Le fait que le cône σ soit simplicial implique que les vecteurs $\eta_{i_1}(\sigma), ..., \eta_{i_{q(\sigma)}}(\sigma)$ dirigeant le squelette de σ sont des vecteurs linéairement indépendants. Si $l \in \{1, ..., q(\sigma)\}$, il existe toujours un vecteur v_l^* de Λ^* tel que

$$< v_l^*, \eta_{i_l}(\sigma) > > 0 \quad \text{et} \quad < v_l^*, \eta_{i_{l'}}(\sigma) >= 0\,, \quad \forall l' \in \{1, ..., q(\sigma)\},\ l' \neq l\,.$$

On déduit de cela que, si $\underline{\tilde{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_s) \in V_\sigma$ est tel que

$$\prod_{j=1}^s \tilde{\xi}_j^{<u^*, \eta_j>} = \prod_{j=1}^s \xi_j{}^{<u^*, \eta_j>}\,, \quad \forall u^* \in \check{\sigma} \cap \Lambda^*\,,$$

alors la liste des positions des zéros dans la suite $(\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_s)$ est exactement la même que dans la suite $(\xi_1, ..., \xi_s)$. Si $A(\xi)$ désigne le sous-ensemble de

$\{1, ..., s\}$ correspondant aux indices de ces zéros (notons que ce sous-ensemble $A(\xi)$ est inclus dans le sous-ensemble des indices correspondant aux faces de dimension 1 du cône σ), on dispose donc d'une application

$$g_{\underline{\tilde{\xi}},\underline{\xi}} : \ \mathbb{Z}^{\{1,...,s\}\setminus A(\underline{\xi})} \mapsto \mathbb{C}^*$$

définie par

$$g_{\underline{\tilde{\xi}},\underline{\xi}}(j) = \frac{\tilde{\xi}_j}{\xi_j} \, , \ j \in \{1, ..., s\}, \ j \notin A(\xi) \, .$$

Soit l'application

$$i_{A(\xi)} : \ \Lambda^* \mapsto \mathbb{Z}^{\{1,...,s\}\setminus A(\xi)}$$

qui à $u^* \in \Lambda^*$ associe

$$(< u^*, \eta_j >)_{j \in \{1,...,s\}\setminus A(\xi)} \, .$$

Le groupe $A_{n-1}(U_\sigma)$ est le quotient de $\mathbb{Z}^{\{1,...,s\}\setminus A(\xi)}$ par le noyau de $i_{A(\xi)}$. D'autre part, le fait que le cône σ soit simplicial implique que le noyau $\operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$ de $i_{A(\xi)}$ soit engendré (en tant que semi-groupe) par le semi-groupe $\check{\sigma} \cap \operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$: on choisit en effet une fois encore un vecteur v^*_ξ dans Λ^* (en fait dans $\check{\sigma} \cap \operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$) tel que

$$\begin{gathered} < v^*, \eta_j > \, > 0 \, , \quad \tau_j \text{ face de } \sigma, \ j \notin A(\xi) \, , \\ < v^*, \eta_j >= 0 \, , \quad j \in A(\xi) \, ; \end{gathered}$$

tout élément u^* de $\operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$ s'écrit

$$u^* = (u^* + N v^*) - N v^*$$

avec N entier très grand (assez pour que $u^* + Nv^*$ soit dans $\check{\sigma} \cap \operatorname{Ker} i_{A(\sigma)}$), d'où l'affirmation que $\operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$ est bien engendré par $\check{\sigma} \cap \operatorname{Ker} i_{A(\xi)}$. Ceci permet d'associer à $g_{\underline{\tilde{\xi}},\underline{\xi}}$ une application de $\theta(\mathbb{Z}^{\{1,...,s\}\setminus A(\xi)}) \subset A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$, où

$$\theta(l) = \text{classe dans } A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F})) \text{ de } \sum_{j \notin A(\xi)} l_j [V(\tau_j)] \, ,$$

dans $\mathbb{C}^*$ (on pose $\tilde{g}_{\underline{\tilde{\xi}},\underline{\xi}}(\theta(l)) = g_{\underline{\tilde{\xi}},\underline{\xi}}(l)$ pour tout $l \in \mathbb{Z}^{\{1,...,s\}\setminus A(\xi)}$). Cette application se prolonge en un homomorphisme de $A_{n-1}(\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ dans $\mathbb{C}^*$. On construit bien ainsi un élément g du groupe $G_\mathcal{F}$ tel que $\underline{\tilde{\xi}} = g \bullet \underline{\xi}$ (comme on le vérifie aisément). Ceci achève la preuve du théorème. $\diamondsuit$

3.6 Compacité et retour au théorème de Bernstein

Considérons tout d'abord un éventail simple $\mathcal{F}$ de cônes de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, où Λ est un réseau de dimension n. Nous avons la proposition importante suivante

Proposition 3.4 *Si l'union des cônes de l'éventail $\mathcal{F}$ est égale à $\Lambda_{\mathbb{R}}$, la variété analytique complexe de dimension n (c'est en fait une variété algébrique lisse, le mot variété étant vraiment à prendre ici dans son sens "manifold") est une variété compacte (pour la topologie induite par la métrique usuelle sur les cartes associées aux cônes de dimension maximale).*

Preuve. La preuve que nous donnons ici nous a été suggérée par August Tsikh. Désignons par $\sigma^{(I)}$, $I = 1, ..., M$, la liste des cônes de dimension maximale (ici $n = \dim \Lambda$) de l'éventail $\mathcal{F}$. Supposons que le squelette du cône $\sigma^{(I)}$ soit constitué des vecteurs $(\alpha_1^{(I)}, ..., \alpha_n^{(I)})$, où

$$\alpha_j^{(I)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(I)} e_k \,, \quad j = 1, ..., n \,,$$

$e_1, ..., e_n$, désignant la base canonique du réseau Λ. À chaque cône $\sigma^{(I)}$, $I = 1, ..., M$, est attachée une copie de $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une transformation monoidale

$$\pi_{\sigma^{(I)}} = \pi^{(I)} : \ (\zeta_1, ..., \zeta_n) \mapsto \Big(\prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{\alpha_{j1}^{(I)}}, ..., \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{\alpha_{jn}^{(I)}} \Big) = \underline{\zeta}^{C_I}$$

(en abrégé), définie sur un ouvert $\Omega^{(I)}$ de cette copie de $\mathbb{C}^n$, comme cela a été vu à la fin de la section 3.3.3. Ainsi, l'on peut attacher à chaque cône $\sigma^{(I)}$ de dimension maximale un système de coordonnées locales sur la variété torique. Notons que l'inverse de la matrice C_I est une matrice dont les lignes constituent un système générateur du cône dual $\check{\sigma}^{(I)}$. Nous noterons $t_{I,1}, ..., t_{I,n}$ les coordonnées locales sur $\pi(\Omega^{(I)})$; notons que

$$\underline{t}_I = \underline{\zeta}^{C_I^{-1}}$$

Ce que nous pouvons démontrer est que

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \bigcup_{I=1}^{M} \{|t_{I,1}| \leq 1, ..., |t_{I,n}| \leq 1\} \,.$$

En effet, prenons un point x de $\pi^{(I_0)}(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F})$ représenté en coordonnées locales par $t_{I_0} = (t_{I_0,1}, ..., t_{I_0,n})$ et considérons le point $\underline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$ de $\mathbb{R}^n$

défini par

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} := C_{I_0} \begin{pmatrix} \log|t_{I_0,1}| \\ \vdots \\ \log|t_{I_0,n}| \end{pmatrix} .$$

Puisque l'union des cônes $\sigma^{(I)}$, $I = 1, ..., M$, est l'espace affine $\Lambda_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ tout entier, il existe un indice $J = J(\underline{\xi})$ tel que le point $-\underline{\xi}$ soit dans le cône $\sigma^{(J)}$. Mais alors on a, si

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} := C_J^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} ,$$

nécessairement $\eta_1 \leq 0, ..., \eta_n \leq 0$. En prenant les exponentielles, on voit que l'on a $|e^{\eta_j}| < 1$, $j = 1, ..., n$. Ceci démontre en fait que le point x est un point du polydisque

$$\{|t_{J,1}| < 1, ..., |t_{J,n}| < 1\} .$$

Nous venons donc en fait de démontrer que

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \overline{\bigcup_{I=1}^{M} \pi^{(I)}(\mathbb{T}^n)} = \bigcup_{I=1}^{M} \{|t_{I,1}| \leq 1, ..., |t_{I,n}| \leq 1\} . \tag{3.7}$$

Cette "présentation" commode de la variété torique (tout au moins du point de vue ensembliste) en permet d'en déduire immédiatement la compacité. $\diamondsuit$

Remarque. *Cette démonstration s'adapterait au cas général, où l'on se doit de "recoller" les variétés affines $U^{(I)}$ correspondant aux cônes de dimension maximale pour réaliser la variété torique. Rappelons que la variété $U^{(I)}$ se trouve définie comme*

$$U^{(I)} := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma}^{(I)} \cap \Lambda^*] ,$$

la différence majeure ici étant qu'il faille introduire un système engendrant le cône $\check{\sigma}^{(I)}$ tout en engendrant Λ^* comme groupe ; le squelette ne suffit plus et il nous faut cette fois un système $\underline{l}_{I,1}, ..., \underline{l}_{I,n}, \underline{l}_{I,n+1}, ..., \underline{l}_{I,N_I}$, où les n premiers vecteurs engendrent le cône $\sigma^{(I)}$ et les $N - n$ autres sont des vecteurs de $\sigma^{(I)} \cap \Lambda^*$ choisis de manière à ce que le système complet engendre le réseau Λ^* comme groupe. Les "polydisques" qu'il faut alors recoller pour réaliser la variété torique sont à relever sur les variétés algébriques de dimension n définies par les divers idéaux binomiaux correspondant aux cônes $\sigma^{(I)}$. L'idéal binomial associé à $\sigma^{(I)}$ est celui qui correspond au noyau du $\mathbb{C}$-homomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}[t_1, ..., t_{N_I}] \mapsto \mathbb{C}[\zeta_1^{\pm 1}, ..., \zeta_n^{\pm 1}] : \ t_j \overset{\rho_I}{\mapsto} \underline{\zeta}^{l_{I,j}} .$$

Dans la représentation (3.7) (*toujours valable*) *il faut interpréter le polydisque*

$$\{|t_{I,1}| \leq 1, ..., |t_{I,n}| \leq 1\}$$

comme "tracé" sur la variété algébrique (*cette fois en général singulière*) *définie comme la variété des zéros de l'idéal binomial* $\mathrm{Ker}\,\rho_I$. *On trouvera dans la section* 2.4 *de* [12] *une preuve plus algébrique de la compacité* (*au sens de la topologie usuelle*) *d'une variété torique construite à partir d'un éventail dont l'union des cônes recouvre tout l'espace affine* $\Lambda_{\mathbb{R}}$.

Nous sommes maintenant en mesure, pour conclure ce chapitre, de compléter la preuve du théorème de Bernstein 1.2. (jusqu'alors incomplète). Nous reprendrons ici les notations utilisées dans l'énoncé de ce théorème (section 1.6).

Soient $\tau_1, ..., \tau_s$, les faces de dimension 1 de l'éventail $\mathcal{F}$ associé au polyèdre $\Delta := \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$. Ces faces sont en fait (ceci se voit immédiatement si l'on reprend la définition même de l'éventail $\mathcal{F}$, voir l'exemple fondamental de la section 3.3.2) dirigées par les vecteurs orthogonaux $\eta_1^*, ..., \eta_s^*$ aux facettes du polyèdre Δ.

Si $F_1, ..., F_n$ sont n polynômes de Laurent de supports respectifs $\mathcal{A}_1$,...,$\mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_j = \Delta_j \cap \mathbb{Z}^n$, l'hypothèse faite concernant la non nullité des semi-résultants

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_1^{\eta_i^*}, ..., \mathcal{A}_n^{\eta_i^*})$$

lorsque les coefficients des F_j sont spécifiés équivaut au fait que les diviseurs effectifs

$$\mathrm{div}\,(F_j) + E(\Delta_j)\,,\ j = 1, ..., n\,,$$

(diviseurs de Cartier sur la variété torique $\mathcal{X}(\mathcal{F})$) ne s'intersectent qu'en des points de $\mathbb{T}^n = \mathcal{O}_{\{0\}}$.

Considérons maintenant, pour chaque $j = 1, ..., n$, une collection $H_{j,0}, ..., H_{j,n}$ de polynômes de Laurent de support Δ_j, tel que $(H_{j,1}, ..., H_{j,n})$ soit $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$-générique au sens de Bernstein et que de plus

$$\{\underline{\zeta} \in \mathbb{T}^n;\ H_{j,l}(\underline{\zeta}) = 0\,,\ l = 0, ..., n\} = \emptyset\,.$$

On a alors, d'après la proposition 2.2, l'existence de constantes strictement positives c_j et C_j telles que

$$c_j \exp\Big[H_{\Delta_j}(\mathrm{Re}\,z)\Big] \leq \Big(\sum_{l=0}^{n} |H_{j,l}(e^{z_1}, ..., e^{z_n})|^2\Big)^{1/2} \leq C_j \exp\Big[H_{\Delta_j}(\mathrm{Re}\,z)\Big]\,, \quad z \in \mathbb{C}^n\,.$$

La fonction

$$\underline{\zeta} \in \mathbb{T}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(\zeta_1, ..., \zeta_n)|^2}{\sum\limits_{l=0}^{n} |H_{j,l}(\zeta_1, ..., \zeta_n)|^2}$$

est une fonction continue sur $\mathbb{T}^n$. Cette fonction, exprimée en coordonnées homogènes relatives à une variété torique simpliciale associée à un éventail de $\mathcal{F}$, induit sur $\mathcal{X}(\widetilde{\mathcal{F}})$ (de part sa 0-homogénéité liée à sa définition même) une fonction continue sur la variété lisse compacte $\mathcal{X}(\widetilde{\mathcal{F}})$ (la compacité vient de la proposition 3.4) ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, à savoir les zéros communs des F_j, $j = 1, ..., n$, tous dans $\mathbb{T}^n \simeq \mathcal{O}_{\{0\}}$. Il existe donc des constantes $\gamma > 0$ et $R > 0$ telles que

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n, \quad \|\underline{z}\| \geq R \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{z_1}, ..., e^{z_n})|^2}{\sum\limits_{l=0}^{n} |H_{j,l}(e^{z_1}, ..., e^{z_n})|^2} \geq \gamma\,.$$

On en déduit l'existence d'une constante $\tilde{\gamma}$ telle que

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n, \quad \|\underline{z}\| \geq R \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{z_1}, ..., e^{z_n})|}{\exp\left[H_{\Delta_j}(\mathrm{Re}\,\underline{z})\right]} \geq \tilde{\gamma}\,.$$

Un argument de perturbation montre alors que le nombre de zéros communs à $(F_1, ..., F_n)$ dans $\mathbb{T}^n$ reste invariant par perturbation des coefficients. Ce nombre vaut dont $\mathcal{M}(\Delta_1, ..., \Delta_n)$, où $\mathcal{M}$ désigne le volume mixte de Minkowski. Ceci parachève la preuve du théorème de Bernstein 1.2. $\diamondsuit$

Chapitre 4

Résidus et Propreté

4.1 Résidu local d'une $(n, 0)$-forme méromorphe

Dans cette section, notre cadre sera celui d'une variété analytique complexe lisse $\mathcal{X}$ de dimension n, sur laquelle x désignera un point.

Si $\mathcal{X}$ est de dimension 1 et si

$$\omega = r(t)dt$$

est une $(1,0)$ forme méromorphe au voisinage de x ($t = t(\zeta)$ étant la coordonnée locale), il est bien connu que l'obstruction à ce que cette forme soit exacte dans un disque complexe épointé $\varphi(D(0,\epsilon)) \setminus \{x\}$ (φ étant une application holomorphe injective de $D(0,\epsilon)$ dans $\mathcal{X}$, avec ϵ arbitrairement petit et $\varphi(0) = x$) est matérialisée par

$$\mathrm{Res}_x \left[r(t)dt \right] = \mathrm{Res}_0 \left[[\varphi^* r](\zeta) \varphi^*(d\zeta) \right] = \mathrm{Res}_0 \left[r(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta \right].$$

De fait, c'est le *morphisme résidu* qui réalise l'identification entre le groupe de cohomologie

$$H^1(\varphi(D(0,\epsilon)) \setminus \{x\})$$

et le groupe $\mathbb{C}$.

Si maintenant nous nous plaçons dans le cadre dans le cadre de la dimension n, trois notions géométriques de résidu se présentent naturellement :
• celle de *résidu local de Grothendieck*, utilisée dans la suite de ce cours ;
• celle de *résidu de Leray* ;
• celle de *résidu de Poincaré*.

4.1.1 Résidu local au sens de Grothendieck

Pour présenter la notion de *résidu local au sens de Grothendieck*, nous introduirons n diviseurs de Cartier effectifs au voisinage de x, diviseurs dont les équations locales au voisinage de x sont $f_1, ..., f_n$ (les coordonnées locales sur $\mathcal{X}$ au voisinage de x seront $t_1 = t_1(\zeta_1, ..., \zeta_n)$,..., $t_n = t_n(\zeta_1, ..., \zeta_n)$). Il est important ici de souligner que notre point de vue sera un point de vue fonctionnel (donc plus "analytique") et non un point de vue ensembliste (donc plus "géométrique") où nous aurions plutôt compris les diviseurs sur $\mathcal{X}$ (toujours au voisinage de x) comme des diviseurs de Weil. Une forme $(n, 0)$ *méromorphe* dans un polydisque $\varphi(D(0, \epsilon_1) \times \cdots \times D(0, \epsilon_n))$ (φ injective et $\varphi(\underline{0}) = x$) et *de lieu polaire* inclus dans l'union des supports des diviseurs de Cartier $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., n$ sera par définition une forme

$$\omega = \frac{r(t)}{f_1^{k_1+1}(t) \dots f_n^{k_n+1}(t)} dt_1 \wedge \cdots dt_n \, ,$$

où r est une fonction holomorphe au voisinage de x et $k_1, ..., k_n$, désignent des entiers positifs ou nuls. Si les diviseurs $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., n$ sont tels qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x dans $\mathcal{X}$ dans lequel leur seul point commun est x (et sur lequel les f_j et r sont des fonctions bien définies et holomorphes), on définit le *résidu local* de ω (relativement aux diviseurs $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., n$) comme

$$\mathrm{Res}_x \omega = \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} := \frac{1}{(2i\pi)^n} \lim_{\vec{\epsilon} \to \vec{0}} \int_{\Gamma_f(\vec{\epsilon})} \frac{r(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n}{f_1(t)^{k_1+1} \cdots f_n(t)^{k_n+1}} \quad (4.1)$$

où le cycle $\Gamma_f(\vec{\epsilon})$ est le cycle

$$\{|f_1| = \epsilon_1, ..., |f_n| = \epsilon_n\}$$

orienté de manière à ce que la forme $d\,(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d\,(\arg f_n)$ soit positive et que $\vec{\epsilon}$ soit choisi (ce qui est possible via le recours au théorème de Sard) tel que le support de ce cycle soit une variété analytique réelle lisse de dimension réelle $2n - k$. De fait, la formule de Stokes nous assure que l'intégrale

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \lim_{\vec{\epsilon} \to \vec{0}} \int_{\Gamma_f(\vec{\epsilon})} \frac{r(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n}{f_1(t)^{k_1+1} \cdots f_n(t)^{k_n+1}}$$

ne dépend que de manière fictive de $\vec{\epsilon}$. Une moyennisation de l'expression

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_f\left(\eta_1^{\frac{1}{2(k_1+1)}}, ..., \eta_n^{\frac{1}{2(k_n+1)}}\right)} \frac{r(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n}{f_1(t)^{k_1+1} \cdots f_n(t)^{k_n+1}}$$

sur le simplexe

$$\{\epsilon_1 > 0, ..., \epsilon_n > 0,\, \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = \eta\}$$

nous donne l'autre représentation (parfois plus commode)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \lim_{\eta \to 0_+} \frac{1}{\eta^n} \int\limits_{\sum_{j=1}^n |f_j|^{2(k_j+1)} = \eta} r\Big(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{f_j}^{k_j+1} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n d\overline{f_l}^{k_l+1}\Big) \wedge dt \\
&= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{< s^{(\underline{k},\eta)}, f^{\underline{k}+\underline{1}} > = 1} r\Big(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} s_j^{(\underline{k},\eta)} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n ds_l^{(\underline{k},\eta)}\Big) \wedge dt\,, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

où

$$dt = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n\,,$$

$$s_j^{(\underline{k},\eta)} = \frac{1}{\eta} \frac{\overline{f_j}^{k_j+1}}{\sum_{l=1}^n |f_l|^{2(k_l+1)}}$$

et

$$< s^{(\underline{k},\eta)}, f^{\underline{k}+\underline{l}} >= \sum_{l=1}^n s_l^{(\underline{k},\eta)} f_l^{k_l+1}\,.$$

Mieux : en utilisant l'argument qui nous a permis de passer de la formule (2.2) à la formule (2.7), nous voyons que nous pouvons écrire le résidu de Grothendieck de la forme ω comme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int\limits_{\partial V_x} r\Big(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} s_j \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n ds_l\Big) \wedge dt\,,
\end{aligned}$$

où $V_x \subset\subset \mathcal{V}_x$ est un voisinage ouvert relativement compact à bord C^1 par morceaux de x dans $\mathcal{X}$ et $s = (s_1, ..., s_n)$ désigne un vecteur de fonctions C^1 au voisinage de ∂V_x et telles que

$$< s, f^{\underline{k}+\underline{1}} > := \sum_{l=1}^n s_l f_l^{k_l+1} \equiv 1$$

au voisinage de ∂V_x.

Notons ici que la forme ω induit, compte tenu des hypothèses, un élément $[\omega]$ du groupe de cohomologie

$$H^{n-1}(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}, \Omega^n)\,,$$

où Ω^n désigne le faisceau des n-formes holomorphes. En effet, les ouverts $\mathcal{V}_x \setminus |\mathcal{D}_j|$, $j = 1, ..., n$, forment par hypothèses un recouvrement $\mathcal{U}$ du voisinage épointé $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$ et l'on peut donc considérer ω comme un cocycle (au sens de Cech) dans $C^{n-1}(\mathcal{U}, \Omega^n)$.

Pour comprendre la signification cohomologique de l'objet que nous venons d'introduire, il est important de rappeler ici brièvement le *théorème de Dolbeault* sur une variété analytique complexe ; il intervient ici dans un cadre semi-local (nous l'utiliserons ici dans $\mathcal{V}_x \setminus \{x\}$) mais on le verra plus loin entrer en jeu dans le cadre global (appliqué à $\mathbb{P}^n$ ou à une variété torique attachée à un éventail simple, ou, au pire, simplicial, la variété n'étant plus une variété lisse au sens “manifold” mais ce que l'on appelle une “orbifold”). Notons par $\mathcal{Y}$ la variété (ici $\mathcal{Y} = \mathcal{V}_x \setminus \{x\}$). D'après le lemme de Poincaré (si Δ est un polydisque de $\mathbb{C}^n$ et p un entier positif, alors les groupes de cohomologie $H^{p,q}(\Delta)$ sont nuls pour $q \geq 1$, on trouvera une preuve de ce résultat essentiel dans [15], page 25), on a, pour tout $p \geq 0$, pour tout $q \geq 1$, les suites exactes

$$0 \mapsto \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{(p,q)} \overset{i}{\mapsto} \mathcal{A}^{(p,q)} \overset{\overline{\partial}}{\mapsto} \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{(p,q+1)} \mapsto 0 \tag{4.3}$$

et

$$0 \mapsto \Omega^p \overset{i}{\mapsto} \mathcal{A}^{(p,0)} \overset{\overline{\partial}}{\mapsto} \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{(p,1)} \mapsto 0\,, \tag{4.4}$$

où, outre le faisceau Ω^p des $(p,0)$ formes holomorphes sur $\mathcal{Y}$, on a introduit les faisceaux $\mathcal{A}^{(p,q)}$ des (p,q)-formes et $\mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{(p,q)}$ des (p,q)-formes $\overline{\partial}$-fermées, l'injection i désignant l'injection associée à l'inclusion ensembliste naturelle. On peut définir (voir par exemple [15], pages 38 et suivantes) les groupes de cohomologie $H^q(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ relatifs à l'un de ces faisceaux. On peut aussi définir les groupes de cohomologie du complexe de Dolbeault, c'est à dire les groupes

$$H_{\overline{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{Y}) := \frac{H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{(p,q)})}{\overline{\partial} H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{A}^{(p,q-1)})}\,,\ p \geq 0,\ q \geq 1\,.$$

Le théorème d'isomorphisme de Dolbeault s'énonce alors comme suit :

Théorème 4.1 (isomorphisme de Dolbeault) *Soit $\mathcal{Y}$ une variété analytique complexe de dimension n et p, q deux entiers entre 1 et n. Alors on a l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H^q(\mathcal{Y}, \Omega^p)$ et $H_{\overline{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{Y})$.*

Preuve. On utilise le fait qu'étant donnée une suite exacte de faisceaux

$$0 \mapsto \mathcal{E} \mapsto \mathcal{F} \mapsto \mathcal{G} \mapsto 0\,,$$

on peut fabriquer la longue suite de cohomologie

$$\begin{aligned}&0 \mapsto H^0(\mathcal{Y},\mathcal{E}) \mapsto H^0(\mathcal{Y},\mathcal{F}) \mapsto H^0(\mathcal{Y},\mathcal{G}) \mapsto \\ &\mapsto H^1(\mathcal{Y},\mathcal{E}) \mapsto H^1(\mathcal{Y},\mathcal{F}) \mapsto H^1(\mathcal{Y},\mathcal{G}) \mapsto ...\end{aligned}$$

(voir par exemple [15], page 40). On utilise également l'observation immédiate qui conduit à remarquer que pour tout $p>0$, pour tout couple (r,s) d'entiers entre 0 et n, $H^p(\mathcal{Y},\mathcal{A}^{(r,s)})=0$ (pour la preuve de ce résultat de platitude, voir [15]). Il résulte de ces observations qu'en appliquant le principe de la longue suite de cohomologie à chacune des suites exactes (4.3) ou (4.4), on trouve

$$\begin{aligned}&H^q(\mathcal{Y},\Omega^p) \simeq H^{q-1}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}^{p,1}_{\overline{\partial}}) \simeq H^{q-2}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}^{p,2}_{\overline{\partial}}) \simeq ... \\ &\simeq H^1(\mathcal{Y},\mathcal{Z}^{(p,q-1)}_{\overline{\partial}} \simeq \frac{H^0(\mathcal{Y},\mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}})}{\overline{\partial}H^0(\mathcal{Y},\mathcal{A}^{p,q-1})} = H^{(p,q)}_{\overline{\partial}}(\mathcal{Y})\,.\end{aligned}$$

Ceci prouve donc le théorème de Dolbeault. ♢

Revenons au cadre semi local où $\mathcal{Y}=\mathcal{V}_x\setminus\{x\}$. On sait, d'après le théorème d'isomorphisme, que

$$H^{n-1}(\mathcal{V}_x\setminus\{x\},\Omega^n) \simeq H^{(n,n-1)}_{\overline{\partial}}(\mathcal{V}_x\setminus\{x\})\,.$$

Comme $d=\overline{\partial}$ sur les formes de type $(n,n-1)$, il y a une flèche naturelle du groupe $H^{(n,n-1)}_{\overline{\partial}}(\mathcal{V}_x\setminus\{x\})$ dans le groupe $H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{V}_x\setminus\{x\})$ qui ici s'identifie à $\mathbb{C}$. Le résidu de Grothendieck matérialise la composée de cette flèche (qui ici s'exprime comme l'intégration sur la frontière $2n-1$ dimensionelle d'un ouvert V_x à frontière lisse, contenant x, et d'adhérence incluse dans $\mathcal{V}_x$) avec l'isomorphisme de Dolbeault introduit précédemment. On peut noter d'ailleurs ici que le résidu local de Grothendieck apparait ici, sous l'angle géométrique, comme un calcul de trace : le groupe d'homologie $H_{2n-1}(\mathcal{V}_x\setminus\{x\},\mathbb{R})$ est engendré par un élément $\dot\gamma$ et l'on peut voir le résidu de Grothendieck comme

$$\mathrm{Res}_x\,[\omega] = \int_\gamma \eta_{[\omega]}\,,$$

où γ est un représentant de $\dot\gamma$ et $\eta_{[\omega]}$ un représentant de l'image de $[\omega]$ via l'isomorphisme de Dolbeault.

Dès lors, la forme $(n,n-1)$ (et fermée) que nous avons fait apparaitre dans la formule (4.2), à savoir

$$\eta_{[\omega]} := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{r\Big(\sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j-1}\overline{f_j}^{k_j+1} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^n d\overline{f_l}^{k_l+1}\Big)\wedge dt}{\sum\limits_{l=1}^n |f_l|^{2(k_l+1)}}$$

est un représentant de l'image par l'isomorphisme de Dolbeault de l'élément $[\omega]$ de $H^n(\mathcal{V}_x\setminus\{x\},\Omega^n)$ induit par la forme ω. Il existe bien sûr bien d'autres représentants : si par exemple $\rho_1,\ldots,\rho_n$, sont des fonctions C^1 réelles et ne s'annulant pas dans $\mathcal{V}_x$, un autre représentant de Dolbeault de la même classe $[\omega]$ est donné par

$$\eta_{[\omega];\rho} := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{r\Big(\sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j-1}\rho_j\overline{f_j}^{k_j+1} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^n d[\rho_l\overline{f_l}^{k_l+1}]\Big)\wedge dt}{\sum\limits_{l=1}^n \rho_l^2|f_l|^{2(k_l+1)}}\,.$$

Cette remarque nous sera utile lorsque l'on essaiera de "globaliser" cette notion locale et que nos diviseurs de Cartier seront couplés avec des métriques.

D'autres formules combinatoires permettent la réalisation d'autres représentants de l'image de $[\omega]$ via l'isomorphisme de Dolbeault. Parmi elles, on retiendra la formule suivante :

Lemme 4.1 *Soit $\omega = rdt/(f_1^{k_1+1}\ldots f_n^{k_n+1})$ une forme méromorphe dans un voisinage $\mathcal{V}_x$ de $x\in\mathcal{X}$ et de lieu polaire inclus dans l'union des supports des diviseurs de Cartier effectifs $\mathcal{D}_j$ (d'équation locale f_j dans $\mathcal{V}_x$), supports s'intersectant uniquement au point x. Un autre représentant de l'image de $[\omega]$ via l'isomorphisme de Dolbeault est donné par*

$$\tilde\eta_{[\omega]} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+|k|-1)!}{(2i\pi)^n k_1!\ldots k_n!} \frac{r\Big(\prod\limits_{l=1}^n \overline{f_l}^{k_l}\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j-1}\overline{f_j} \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^n d\overline{f_l}\Big)\wedge dt}{\Big(\sum\limits_{l=1}^n |f_l|^2\Big)^{n+|k|}}\,, \quad (4.5)$$

où $|k| = k_1+\ldots+k_n$. Plus généralement, on peut écrire

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} rdt_1\wedge\cdots\wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1},\ldots,f_n^{k_n+1}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+|k|-1)!}{(2i\pi)^n\, k_1!\cdots k_n!} \int\limits_{\partial V_x} r s_1^{k_1}\cdots s_n^{k_n}\Big(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} s_j \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^n ds_l\Big)\wedge dt, \quad (4.6)$$

où $V_x \subset\subset \mathcal{V}_x$ est un voisinage ouvert relativement compact à bord C^1 par morceaux de x dans $\mathcal{X}$, et $s=(s_1,...,s_n)$ désigne un vecteur de fonctions C^1 au voisinage de ∂V_x et telles que

$$< s, f >:= \sum_{l=1}^{n} s_l f_l \equiv 1$$

au voisinage de ∂V_x.

Preuve. Si λ est un nombre complexe de partie réelle strictement positive et si $\tau > 0$, on a la formule suivante (dont on laissera ici la vérification en exercice) :

$$\lambda \int_{E(\tau)} \frac{d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n}{\left(\eta_1^{\frac{1}{k_1+1}} + \cdots + \eta_n^{\frac{1}{k_n+1}}\right)^{n+|k|-\lambda}} = \frac{(k_1+1)!\ldots(k_n+1)!}{(n+|k|-1)!} \tau^{\lambda},$$

où l'on a noté $E(\tau)$ le simplexe réel n-dimensionnel

$$E(\tau) := \{\underline{\eta} \in \mathbb{R}^n;\ \eta_1 > 0, ..., \eta_n > 0,\ \sum_{l=1}^{n} \eta_l^{\frac{1}{k_l+1}} \le \tau\}$$

Si l'on pose

$$\theta(\eta_1,...,\eta_n) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_f(\eta_1^{\frac{1}{2(k_1+1)}},...,\eta_n^{\frac{1}{2(k_n+1)}})} \frac{r dt}{f_1^{k_1+1}\ldots f_n^{k_n+1}},$$

on peut donc écrire, si τ est assez petit, si λ est un nombre complexe de partie réelle strictement positive,

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} = \lambda \frac{(n+|k|-1)!\ \tau^{-\lambda}}{(k_1+1)!\ldots(k_n+1)!} \int_{E(\tau)} \frac{\theta(\eta_1,...,\eta_n) d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n}{\left(\eta_1^{\frac{1}{k_1+1}} + \cdots + \eta_n^{\frac{1}{k_n+1}}\right)^{n+|k|-\lambda}}.$$

Si l'on fixe λ ayant une très grande partie réelle, l'utilisation des théorèmes de Sard, Fubini et Lebesgue (convergence dominée) nous permet d'affirmer (formellement, on effectue le changement de variables $\eta_j = |f_j|^{2(k_j+1)}$, $j = 1,...,n$)

$$\int_{E(\tau)} \frac{\theta(\eta_1,...,\eta_n) d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n}{\left(\eta_1^{\frac{1}{k_1+1}} + \cdots + \eta_n^{\frac{1}{k_n+1}}\right)^{n+|k|-\lambda}} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(k_1+1)\ldots(k_n+1)}{(2i\pi)^n} \int\limits_{|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2 \le \tau} \frac{r \overline{f_1}^{k_1} \ldots \overline{f_n}^{k_n} \bigwedge_{l=1}^{n} d\overline{f_l} \wedge dt}{\left(\sum_{l=1}^{n} |f_l|^2\right)^{n+|k|-\lambda}}.$$

On conclut donc à la formule

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, \ldots, f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+|k|-1)!\,\tau^{-\lambda}}{(2i\pi)^n\,k_1!\ldots k_n!} \int\limits_{|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2\leq\tau} \frac{r\overline{f_1}^{k_1}\ldots\overline{f_n}^{k_n}\bigwedge\limits_{l=1}^{n} d\overline{f_l}\wedge dt}{\Big(\sum\limits_{l=1}^{n}|f_l|^2\Big)^{n+|k|-\lambda}}\,.$$

C'est grâce à la formule de Stokes que l'on transforme enfin cette dernière intégrale volumique lorsque τ est assez petit et tel que le cycle $\{|f_1|^2+\ldots+|f_n|^2=\tau\}$ soit régulier en tout point (le théorème de Sard une fois encore nous assure qu'il suffit de choisir τ hors d'un ensemble exceptionnel de mesure de Lebesgue nulle). On obtient, après cette transformation

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, \ldots, f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+|k|-1)!\,\tau^{-\lambda}}{(2i\pi)^n\,k_1!\ldots k_n!} \times$$

$$\times \int\limits_{|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2=\tau} \frac{r\overline{f_1}^{k_1}\ldots\overline{f_n}^{k_n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{f_j}\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} d\overline{f_l}\Big)\wedge dt}{\Big(\sum\limits_{l=1}^{n}|f_l|^2\Big)^{n+|k|-\lambda}}\,.$$

Cette fois, faire tendre λ vers 0 devient licite (comme conséquence du principe du prolongement analytique) et l'on obtient

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, \ldots, f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+|k|-1)!}{(2i\pi)^n\,k_1!\ldots k_n!} \times$$

$$\times \int\limits_{|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2=\tau} \frac{r\overline{f_1}^{k_1}\ldots\overline{f_n}^{k_n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{f_j}\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} d\overline{f_l}\Big)\wedge dt}{\Big(\sum\limits_{l=1}^{n}|f_l|^2\Big)^{n+|k|}}\,.$$

On remarque que la forme

$$\frac{r\overline{f_1}^{k_1}\ldots\overline{f_n}^{k_n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{f_j}\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} d\overline{f_l}\Big)\wedge dt}{\Big(\sum\limits_{l=1}^{n}|f_l|^2\Big)^{n+|k|}}$$

est une $(n, n-1)$ forme $\overline{\partial}$-fermée (donc aussi d-fermée) et que l'on peut donc remplacer dans l'intégrale ci-dessus le cycle d'intégration $\{|f_1|^2+\ldots+|f_n|^2 = \tau\}$ par ∂V_x, où $V_x \subset\subset \mathcal{V}_x$ désigne n'importe quel voisinage ouvert relativement compact de x à frontière C^1 par morceaux, ce qui prouve bien la première affirmation du lemme. Quand à la seconde, elle résulte de l'utilisation d'un argument tout à fait identique à celui qui nous permettait de passer de la formule (2.2) à la formule (2.7) dans la section 2.1. $\diamondsuit$

4.1.2 Résidu local de Grothendieck et développement de Taylor

Si x est un point d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n et $\mathcal{D}_1$,...,$\mathcal{D}_n$ sont n diviseurs s'intersectant en x de manière <u>*transverse*</u> (ce qui signifie qu'étant données des équations locales $f_1, ..., f_n$, on a $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n(x) \neq 0$), alors $f_1, ..., f_n$ peuvent être utilisées comme des coordonnées locales sur $\mathcal{X}$ au voisinage de x. Nous avons alors le lemme intéressant suivant

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses ci-dessus, le développement de Taylor d'une fonction r définie et holomorphe sur un voisinage de x suivant les fonctions coordonnées locales $f_1, ..., f_n$ est précisément donné par*

$$r = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^n} \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n} . \tag{4.7}$$

Si r est un polynôme de Laurent en les fonctions $f_1, ..., f_n$, le résidu en x de la forme rdt est exactement le coefficient de $(f_1...f_n)^{-1}$ dans ce développement.

Preuve. On se ramène immédiatement (en utilisant une carte locale et un changement de variables) au cas de $\mathbb{C}^n$, x devenant l'origine, et les f_j les fonctions coordonnées. Il est immédiat de constater que

$$\mathrm{Res}_0 \begin{bmatrix} \zeta_1^{l_1} \cdots \zeta_n^{l_n} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ \zeta_1^{k_1+1}, ..., \zeta_n^{k_n+1} \end{bmatrix} = 0$$

sauf si $k_1 = l_1, ..., k_n = l_n$, ce qui prouve bien la formule (4.7) ainsi que la seconde affirmation du lemme. $\diamondsuit$

Compte tenu de ce lemme, il est tout à fait naturel de penser que le calcul des symboles

$$k_1! \ldots k_n! \, \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix}, \quad \underline{k} \in \mathbb{N}^n$$

(ce sont les évaluations des dérivées partielles successives au point x lorsque les f_j sont assimilables à un système de coordonnées locales) se plie à la règle de Leibnitz. C'est en effet le cas, comme le montre la proposition capitale suivante, proposition qui deviendra vite le moteur de tout le calcul de résidus à plusieurs variables.

Proposition 4.1 *Supposons qu'outre $f_1, ..., f_n$, on dispose d'un second jeu de fonctions holomorphes $g_1, ..., g_n$ telles que les diviseurs correspondant s'intersectent aussi uniquement au point x (lorsqu'on les regarde dans un voisinage $\mathcal{V}_x$ assez petit) ; supposons aussi qu'il existe une matrice $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ de fonctions holomorphes au voisinage de x telle que*

$$g_j = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} f_l\,, \quad j = 1, ..., n\,.$$

On désigne par $\mathbf{R}_{f,g}$ le $\mathcal{O}_x$ module à gauche engendré par les opérateurs

$$r \in \mathcal{O}_x \mapsto \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix}$$

et

$$r \in \mathcal{O}_x \mapsto \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ g_1^{k_1+1}, ..., g_n^{k_n+1} \end{bmatrix}$$

et l'on note σ_f et σ_g les deux homomorphismes de $\mathcal{O}_x$ modules de $\mathcal{O}_x[X_1, ..., X_n]$ dans $\mathbf{R}_{f,g}$ définis respectivement par

$$\sigma_f(X^{\underline{k}}) := k_1! \dots k_n! \left\{ r \mapsto \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix} \right\}$$
$$\sigma_g(X^{\underline{k}}) := k_1! \dots k_n! \left\{ r \mapsto \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ g_1^{k_1+1}, ..., g_n^{k_n+1} \end{bmatrix} \right\}, .$$

On a alors, pour tout élément $P \in \mathcal{O}_x[X_1, ..., X_n]$, la formule

$$\sigma_f(P) = \mathrm{detA}\ \sigma_{\mathrm{g}}(\mathrm{X} \mapsto \mathrm{P}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}(\mathrm{X}))\,. \tag{4.8}$$

Remarque. *Cette hiérarchie de formules, introduite par Kytmanov* [21] (*voir aussi* [6]) *nous permet d'exprimer*

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1^{k_1+1}, ..., f_n^{k_n+1} \end{bmatrix}$$

à partir des

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ g_1^{l_1+1}, ..., g_n^{l_n+1} \end{bmatrix}, \quad |l| = |k|\,.$$

De plus, on remarque que les identités obtenues ne font pas apparaitre, contrairement à ce que l'on aurait pu craindre, de "dénominateurs" : la division par $k_1! \dots k_n!$ qui était attendue s'avère de fait être fictive, ce qui laisse bien sûr augurer que le calcul des résidus multi-variables pourra être développé dans un cadre algébrique plus large, affranchi en particulier de la contrainte liée au cadre complexe que représentait la caractéristique zéro.

Preuve. Elle résulte du lemme 4.1. Si $s = (s_1, ..., s_n)$ est un choix de fonctions de classe C^1 sur le frontière de V_x (V_x voisinage relativement compact de x, à bord C^1 par morceaux, avec V_x assez petit), on a

$$< \underline{s}, \underline{g} >=< \underline{s}, A\underline{f} >=< {}^t A\underline{s}, \underline{f} > \ .$$

En écrivant la formule (4.6) avec s remplaçé par ${}^t A\underline{s}$, puis en utilisant cette même formule (4.6), mais cette fois avec $\underline{s}$, mais $\underline{g}$ à la place de $\underline{f}$) on obtient (4.8) pour le monôme $X^{\underline{k}}$. La formule générale (4.8) en résulte par linéarité. $\diamondsuit$

Application importante : <u>la loi de transformation</u>.

La formule

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1, ..., f_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r \det A dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ g_1^1, ..., f_n^n \end{bmatrix}$$

est connue sous le nom de <u>*loi de transformation*</u> et permet de trivialiser le calcul résiduel. En effet, le Nullstellensatz version locale nous assure, si $t_1, ..., t_n$ sont des coordonnées locales au voisinage de x, qu'il existe des entiers $N_1, ..., N_n$ positifs et une matrice $B = [b_{jl}]_{1 \le j,l \le n}$ de fonctions holomorphes au voisinage de x telles que

$$t_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^n b_{jk} f_k \ , \ j = 1, ..., n \, .$$

On a donc, suivant la loi de transformation et le lemme 4.2,

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} r dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \\ f_1, ..., f_n \end{bmatrix} = \frac{1}{N_1! \dots N_n!} \Big[\frac{d^{N_1 + \dots + N_n}}{dt_1^{N_1} \dots dt_n^{N_n}} \Big] [r \det B](x) \, . \tag{4.9}$$

Il ne faut cependant pas se leurrer ici : l'expression même du Nullstellensatz effectif est, du point de vue pratique, une opération <u>coûteuse</u> ; le calcul résiduel aura parfois vocation à permettre une résolution plus économique de ce problème ; ce serait donc en général un cercle vicieux que de prétendre utiliser le recours à la solution du Nullstellensatz pour calculer des symboles résiduels !

Bibliographie

[1] L.A. Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Translations of Mathematical Monographs, 58, American Math. Soc, 1983.

[2] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables, tome* II, Éditions MIR, Moscou, 1986.

[3] R. Bellman, K. L. Cooke, *Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations*, American Mathematical Society, 1959. - (Memoirs of the American Mathematical Society ; 35).

[4] C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex analysis and special topics in harmonic analysis*, Springer-Verlag, 1995.

[5] D. Bernstein, The number of roots of a system of equations, Funct. Anal. Appl. 9 (1975), no. 2, pp. 183-185.

[6] J. Y. Boyer, M. Hickel, Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus, Bull. Soc. Math. France 125 (1997), 315–335.

[7] E. Cattani, A. Dickenstein, A global view of residues in the torus, J. of pure and applied algebra, 117-118 (1997), 119-144.

[8] D. A. Cox, The homogeneous coordinate ring of a toric variety, J. Algebraic geometry 4 (1995), 17-50.

[9] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 185, Springer, 1998.

[10] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Collection Méthodes, Hermann, 1968.

[11] F. Ehlers, Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, Math. Ann. 218 (1975), no. 2, 127-156.

[12] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, 1992.

[13] O. A. Gel'fond, Combinatorial coefficients and the mixed volume of polytopes, Functional Analysis and its Applications, 30, 3 (1996), pp. 207–208.

[14] O. A. Gel'fond, A. G. Khovanskii, Newtonian polyedrons and Grothendieck Residues, Doklady Mathematics, 54, 2 (1996), 298–300.

[15] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

[16] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[17] B. Huber, B. Sturmfels, A polyedral method for solving polynomial systems, Mathematics of computation 64, 212 (1995), pp. 1541–1555.

[18] B. Ja. Kazanorvskii, On the zeroes of exponential sums, Soviet. math. Doklady 23 (1981), pp. 347–351.

[19] A. G. Khovanskii, Newton polyedra and toroidal varieties, Functional Analysis and its Applications 11 (1977), pp. 289–296.

[20] G. Kempf, D. Mumford, B. Saint-Donnat, F. Knudsen, *Toroidal embeddings*, Lect. Notes in Math. 339, Springer, 1973.

[21] A. M. Kytmanov, A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications, Siberian Math. J. 169 (1988), 495–499.

[22] J. P. Lafon, *Algèbre commutative*, Hermann, Enseignement des Sciences.

[23] S. Lang, *Algebra*, 3rd edition, Addison-Wesley.

[24] M. Lejeune-Jalabert, Liaison et résidu, Lecture Notes in Math. 961, 1982, pp. 233–240.

[25] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1992.

[26] P. Pedersen, B. Sturmfelds, Product formulas for resultants and Chow forms, Math. Z. 214 (1993), pp. 377–396.

[27] P. Pedersen, B. Sturmfels, Mixed monomial bases, Progress in Mathematics 143, 1996, pp. 307–315.

[28] A. Sard, the measure of the critical values of differential maps, Bull. Amer. Math. Soc 48 (1942), pp. 883-890.

[29] J. P. Serre, *Algèbre locale et multiplicité*, Lecture Notes 11, Springer, 1965.

[30] B. Sturmfels, Sparse elimination theory, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Cortona, 1991, Cambridge University Press, 1993.

[31] B. Sturmfels, Combinatorics of the sparse resultant, preliminary draft, 1992.

[32] A. Tsikh, *Multidimensional Residues and Their Applications*, Translations of Mathematical Monographs, 103, American Math. Soc, 1992.

[33] H. Zhang, Sur certains calculs de résidus pour des systèmes de polynômes de Laurent interprétés dans le cadre des variétés toriques, *Thèse Université Bordeaux I*, 1996.

[34] H. Zhang, Calculs de résidus toriques, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 327 (1998), no. 7, 639–644.