UE MAT401

Devoir Surveillé 1, Lundi 24 Avril 2006

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Question de cours : *Enoncer la règle de Cauchy permettant de décider du comportement d'une série à termes positifs $[u_n]_{n\geq 0}$ par comparaison avec les séries géométriques ; cette règle permet-elle de lever tous les doutes ? Si la réponse est non, justifiez le par un exemple pertinent.*

Le critère de Cauchy permet de décider du comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq 0}$ en fonction de l'examen de la quantité

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = r \ :$$

si $r < 1$, la série converge, si $r > 1$, elle diverge (le terme général ne tend pas vers zéro). Le cas $r = 1$ reste un cas où la règle de Cauchy ne permet pas de lever le doute : par exemple, la série $[n^{-a}]_{n\geq 1}$, où $a \in \mathbb{R}$, converge si $a > 1$, diverge si $a \leq 1$ (critère de Riemann) ; or pour cette série, on a précisément $r = 1$.

Exercice 1.

Montrer que la série $[u_n]_{n\geq 1}$ de terme général

$$u_n = (-1)^n\Big(\frac{\log n}{n}\Big) + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

est convergente ; cette série est elle absolument convergente ?

La série de terme général

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = n^{-3/2}$$

converge d'après le critère de Riemann car $3/2 > 1$.

La fonction

$$x \longmapsto \frac{\log x}{x}$$

est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = -\frac{\log x - 1}{x^2}$$

négative sur $[e, +\infty[$. La suite de terme général

$$\frac{\log n}{n}$$

est donc décroissante à partir de $n = 3 \geq \exp(1) = e$; cette suite tend d'ailleurs vers 0 par valeurs positives lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère des séries alternées s'applique donc à la série de terme général

$$w_n = (-1)^n \Big(\frac{\log n}{n}\Big)$$

qui est donc une série convergente.

Comme $u_n = v_n + w_n$, la série $[u_n]_{n\geq 1}$ est convergente comme somme de deux séries convegentes.

On a

$$|u_n| = \frac{\log n}{n} \times \Big|1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\log n}\Big| \,;$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\log n} = 0\,,$$

on a

$$|u_n| \simeq \frac{\log n}{n}\,;$$

or

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

pour $n \geq 3 \geq e$; comme la série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ est divergente (critère de Riemann), la règle de comparaison pour les séries à termes positifs assure que la série $[|u_n|]_{n\geq 1}$ l'est aussi. La série $[u_n]_{n\geq 1}$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 2.

a. *On considère le chemin paramétré*

$$\gamma\ : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)\,.$$

Pourquoi le support de γ est-il inclus dans le demi-plan supérieur $\{y \geq 0\}$? Calculez les extrémités de γ et montrez que ce sont les seuls points du support de γ situés sur l'axe $\{y = 0\}$; dessinez sommairement le support de γ.

Comme $\cos t \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de coordonnées $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ (pour $t \in [0, 2\pi]$) est toujours d'ordonnée $y \geq 0$. Le support de γ, défini comme

$$\{(t - \sin t, 1 - \cos t)\,;\, t \in [0, 2\pi]\}$$

est donc bien inclus dans le demi-plan $\{y \geq 0\}$. L'origine de γ est le point $\gamma(0) = (0, 0)$ et l'extrémité de γ est le point $\gamma(2\pi) = (2\pi, 0)$. Ce sont deux points de l'axe $\{y = 0\}$. Si $y(t) = 1 - \cos t = 0$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a

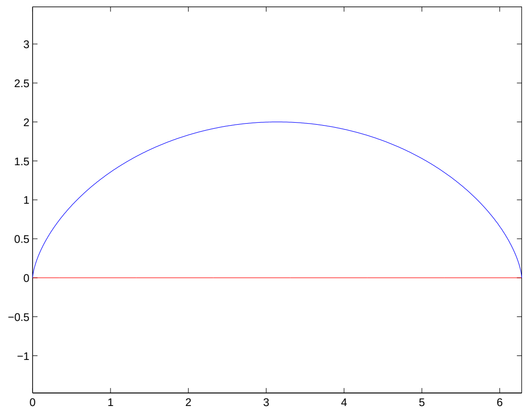

Figure 1: Le support de γ

nécessairement $t = 0$ ou $t = 2\pi$. Les extrémités de γ sont donc les seuls points du support de γ situés sur l'axe $\{y = 0\}$.

Comme la fonction

$$t \longmapsto t - \sin t$$

est croissante sur $[0, 2\pi]$ (de dérivée $t \longmapsto 1 - \cos t \geq 0$) et que $t \longmapsto 1 - \cos t$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$ (la dérivée est $t \longmapsto \sin t$), le support de γ se représente sommairement comme le tracé supérieur sur la figure ci-dessous ; c'est une arche de cycloide (courbe parcourue par un point marqué sur un cercle roulant sans glisser sur une droite, ici l'axe $y = 0$, le cercle étant le cercle de rayon 1 initialement centré en $(0, 1)$, le point marqué étant le point $(0, 0)$ de ce cercle en position initiale).

b. *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_\gamma (2 - y)dx + (1 - y)dy\,.$$

On a, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned} x(t) = t - \sin t &\implies dx = (1 - \cos t)\, dt \\ y(t) = 1 - \cos t &\implies dy = \sin t\, dt\,. \end{aligned}$$

Comme t varie de 0 à 2π (pour la première arche du point $(0, 0)$ au point $(2\pi, 0)$), on a

$$\begin{aligned} &\int_\gamma (2 - y)dx + (1 - y)dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(1 - \cos^2 t) + \sin t \cos t]\, dt = \pi\,. \end{aligned}$$

c. *On considère le domaine borné D du plan défini par*

$$D = \{(t - \sin t, y) \,:\, t \in [0, 2\pi]\,,\, 0 \leq y \leq 1 - \cos t\}\,.$$

Dessinez sommairement D et calculer la surface de ce domaine en utilisant la formule de Green-Riemann (que l'on rappellera) et le calcul effectué au **b**.

Le dessin du domaine D se déduit de celui fait au **(a)** (on trace juste, comme cela a été fait, l'axe des y qui limite le domaine D inférieurement tandis que le support de γ le limite, lui, supérieurement). Le domaine D est le domaine limité inférieurement par l'axe des x, supérieurement par le support de γ comme sur la figure précédente.

L'intégrale sur le segment horizontal γ_0 joignant l'origine à $(0, 2\pi)$ de

$$(2 - y)dx + (1 - y)dy$$

vaut

$$\int_{\gamma_0} (2 - y)dx + (1 - y)dy = 2\int_{\gamma_0} dx = 4\pi\,.$$

La surface du domaine D (compris entre l'axe $\{y = 0\}$ et le support de γ) vaut

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\gamma_0} - \int_{\gamma}\Big)((2 - y)dx + (1 - y)dy)\\ &= -\iint_D \frac{\partial(2 - y)}{\partial y}\, dxdy = \text{surface}\,(D)\end{aligned}$$

d'après la formule de Green-Riemann que l'on rappelle ici : l'intégrale sur un lacet simple Γ orienté dans le sens trigonométrique de $Pdx + Qdy$ vaut

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy\,,$$

où D désigne le domaine enserré par le support du lacet Γ. Cette formule s'applique ici avec comme Γ le lacet obtenu en "concaténant" γ_0 et le chemin $\check{\gamma}$ correspondant à γ pris en sens inverse ($\check{\gamma}(t) = \gamma(2\pi - t)\,,\, t \in [0, 2\pi]$). La surface du domaine D vaut donc

$$4\pi - \pi = 3\pi\,.$$

Exercice 3.

Soit p un nombre réel strictement plus grand que 1.

a. *Montrer que, pour tout $x > 0$,*

$$\int_0^x \cos(t^p)\, dt = \frac{1}{p}\int_0^{x^p} \frac{\cos u}{u^{1-\frac{1}{p}}}\, du\,; \qquad (*)$$

quel critère permet d'affirmer directement (sans utiliser la formule (*)) que l'intégrale figurant au second membre de (*) est une intégrale convergente (lorsque x est un nombre strictement positif fixé) ?

On effectue dans l'intégrale convergente

$$\int_0^x \cos(t^p)\,dt$$

le changement de variables $t^p = u$, soit $t = u^{1/p}$. La formule de changement de variables dans les intégrales impropres donne immédiatement la formule $(*)$ (en effet, on a formellement $dt = \frac{1}{p}u^{1/p-1}\,du$ si $t = u^{1/p}$ et u varie entre 0 et x^p si t varie entre 0 et x).

C'est le critère de Riemann (assurant la convergence de

$$\int_0^X \frac{du}{u^a}$$

lorsque $X = x^p$ est une quantité finie et $a < 1$) qui s'applique ici puisque

$$\frac{|\cos u|}{u^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{u^{1-\frac{1}{p}}}$$

et que $1 - 1/p < 1$.

b. *Montrer que la suite numérique $(a_n)_{n\geq 0}$ de terme général*

$$a_n = \int_{\frac{(2n+1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+3)\pi}{2}} \frac{|\cos u|}{u^{1-\frac{1}{p}}}\,du\,,\ n \geq 0\,,$$

est une suite décroissante de nombres positifs (on pensera à un changement de variable permettant d'exprimer a_n comme une intégrale sur $[\pi/2, 3\pi/2]$) ; quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers l'infini ?

On effectue le changement de variables

$$u = n\pi + v$$

dans l'intégrale définissant a_n. On obtient *via* la formule de changement de variables

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\cos(v+n\pi)|}{(v+n\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\,dv \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\cos v|}{(v+n\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\,dv \end{aligned}$$

Or, pour tout $v \in [\pi/2, 3\pi/2]$, pour tout $n \geq 1$, on a

$$v + n\pi \geq v + (n-1)\pi\,,$$

et par conséquent

$$\frac{|\cos v|}{(v+n\pi)^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{|\cos v|}{(v+(n-1)\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\,.$$

La monotonie de prise d'intégrale assure donc que $a_n \leq a_{n-1}$ pour $n \geq 1$, donc que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs. De plus, si $n \geq 1$, on a

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos v|\, dv\,,$$

ce qui montre (lemme des gendarmes) que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ car $1 - 1/p > 0$.

c. *Déduire de ce qui précède et d'un critère de convergence des séries numériques de signe quelconque (que vous énoncerez) que l'intégrale impropre*

$$\int_0^\infty \cos(t^p)\, dt$$

est une intégrale impropre semi-convergente.

Si x est un nombre réel donné, on appelle $n(x)$ le plus grand entier tel que $(2n+3)\pi/2 \leq x^p$. On écrit alors (toujours grâce à la formule de changement de variables utilisée au **(a)**) pour $x \geq (\pi/2)^{1/p}$,

$$\int_{(\pi/2)^{1/p}}^{x} \cos(t^p)\, dt = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n(x)} (-1)^k a_k + \frac{1}{p}\int_{(2n(x)+3)\pi/2}^{x^p} \frac{\cos u}{u^{1-\frac{1}{p}}}\, du$$

(en effet $\cos(v + k\pi) = (-1)^k \cos v$). On constate que

$$\Big| \int_{(2n(x)+3)\pi/2}^{x^p} \frac{\cos u}{u^{1-\frac{1}{p}}}\, du \Big| \leq \int_{(2n(x)+3)\pi/2}^{(2n(x)+5)\pi/2} \frac{|\cos u|}{u^{1-\frac{1}{p}}}\, du = a_{n(x)+1}\,.$$

Si x tend vers $+\infty$, il en est de même de $n(x)$. Le critère des séries alternées[1] assure la convergence de la série $[(-1)^k a_k]_{k\geq 1}$ et le fait que la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ tende vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ montrent que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{(\pi/2)^{1/p}}^{x} \cos(t^p)\, dt = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k\,.$$

[1] Si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini, la série $[(-1)^k u_k]_{k\geq 0}$ converge.

Ceci prouve la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{(\pi/2)^{1/p}}^{\infty} \cos(t^p)\, dt$$

donc de

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^p)\, dt$$

car il n'y a aucun problème de convergence en la borne 0.

d. *Montrer que l'intégrale impropre*

$$\int_0^{\infty} |\cos(t^p)|\, dt$$

diverge, ce qui signifie que la fonction $t \longmapsto \cos(t^p)$ *n'est pas intégrable sur* $[0, +\infty[$.
[**Indication :** *on essayera de minorer par le terme général d'une série* <u>*divergente*</u> *le nombre* a_n *introduit au* **b**]

Pour $n \geq 1$, on peut minorer a_n par

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\cos v|}{(v + n\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\, dv \\ &\geq \frac{1}{(n\pi)^{1-\frac{1}{p}}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos v|\, dv\,. \end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la série $[n^{-(1-1/p)}]_{n\geq 1}$ est divergente (c'est une série du type $[n^{-a}]_{n\geq 1}$ avec $a \leq 1$) ; c'est donc aussi le cas de la série $[a_n]_{n\geq 0}$ d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Comme, pour $x \geq (\pi/2)^{1/p}$,

$$\int_{(\pi/2)^{1/p}}^{x} |\cos(t^p)|\, dt = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n(x)} a_k + \frac{1}{p} \int_{(2n(x)+3)\pi/2}^{x^p} \frac{|\cos u|}{u^{1-\frac{1}{p}}}\, du \geq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n(x)} a_k\,,$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{(\pi/2)^{1/p}}^{x} |\cos(t^p)|\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty\,.$$

Ceci prouve bien la divergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} |\cos t^p|\, dt\,.$$