COURS MIAS 301
Devoir Surveillé 4, Jeudi 19 Décembre 2002, 1h 20 mn

TEXTE (*en italiques*) **+ CORRIGÉ (en roman)**

ALGÈBRE

Exercice I. *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales*

$$t \in \mathbb{R} \to a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \,, \quad a_k \in \mathbb{R} \,, \; 0 \leq k \leq 2$$

(avec les opérations d'addition $P_1 + P_2 \; : t \to P_1(t) + P_2(t)$ si $P_1, P_2 \in E$ et de multiplication externe $\lambda \bullet P \; : t \to \lambda\, P(t)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$) et, sur ce $\mathbb{R}$-espace, la forme quadratique

$$P \to \mathcal{Q}(P) := \int_0^1 P^2(t)\, dt \,.$$

a. *Montrer que $\mathcal{Q}$ est une forme définie positive sur E ; quelle est la matrice de la forme polaire de $\mathcal{Q}$ dans la base $\mathcal{B}$ de E définie par*

$$\mathcal{B} := \{t \to 1 \,,\, t \to t \,,\, t \to t^2\} \;?$$

Comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue positive est positive, on a bien

$$\forall\, P \in E \,,\; \mathcal{Q}(P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0 \,,$$

ce qui implique bien que $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique positive.
Il faut maintenant montrer que la forme est définie. Si $\mathcal{Q}(P) = 0$ et $P(t_0) \neq 0$, il existe un intervalle $[t_0, t_0 + \epsilon]$ ou $[t_0 - \epsilon, t_0]$ avec $\epsilon > 0$, contenu dans $[0,1]$, et sur lequel $P^2(t) \geq P^2(t_0)/2$ (par continuité de $t \to P^2(t)$ en $t = t_0$) ; on aurait donc, comme $I_{[a,b]}(f) \leq I_{[a,b]}(g)$ si $f \leq g$,

$$\int_0^1 P^2(t) dt \geq \epsilon \frac{P^2(t_0)}{2} > 0 \,,$$

ce qui est en contradiction avec $\mathcal{Q}(P) = 0$; donc $\mathcal{Q}(P) = 0 \Longrightarrow P = 0$, ce qui prouve que la forme $\mathcal{Q}$ est bien définie.

On a, si $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(P) &= \int_0^1 \Big[a_0^2 + a_1^2 t^2 + a_2^2 t^4 + 2(a_0 a_1 t + a_1 a_2 t^3 + a_0 a_2 t^2)\Big]\, dt \\ &= a_0^2 + \frac{a_1^2}{3} + \frac{a_2^2}{5} + 2\Big(\frac{a_0 a_1}{2} + \frac{a_1 a_2}{4} + \frac{a_0 a_2}{3}\Big) \,. \end{aligned}$$

La matrice de la forme polaire Θ de $\mathcal{Q}$ dans la base $\mathcal{B}$ (on dit aussi, comme dans le cours, la matrice de $\mathcal{Q}$ dans la base $\mathcal{B}$) est donc

$$\mathbf{M}_{\Theta,\mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

b. *Soit D le $\mathbb{R}$-endomorphisme de E dans lui-même défini par $D[P] = P'$; écrire la matrice $M_{D,\mathcal{B}}$ de D dans la base $\mathcal{B}$, puis exprimer en fonction de $M_{D,\mathcal{B}}$ et de $\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}$ la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'adjoint D^* de D (relativement au produit scalaire induit par $\mathcal{Q}$) [on ne cherchera pas à inverser la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}$].*

On a

$$\begin{aligned} D(t \to 1) &= t \to 0 \\ D(t \to t) &= t \to 1 \\ D(t \to t^2) &= t \to 2t\,, \end{aligned}$$

et par conséquent la matrice de D dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M_{D,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la matrice de l'adjoint, on doit utiliser le fait que cet endomorphisme D^* est défini par

$$\Theta(D(\vec{V}), \vec{W}) = \Theta(\vec{V}, D^*(\vec{W}))\,, \qquad (*)$$

où Θ est la forme polaire de $\mathcal{Q}$; si A est la matrice (inconnue) de D^* dans la base $\mathcal{B}$, on a donc, en écrivant matriciellement (*)

$$\begin{aligned} &(y_1, y_2, y_3) \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (y_1, y_2, y_3) \bullet {}^tA \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice $A = M_{D^*,\mathcal{B}}$ s'obtient donc en écrivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tA \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix},$$

soit

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}^{-1} . $$

On a donc la formule

$$ {}^tA = \mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} \bullet M_{D,\mathcal{B}} \bullet \Big[\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}\Big]^{-1} , $$

soit, en transposant,

$$ A = {}^t\Big[\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}\Big]^{-1} \bullet {}^tM_{D,\mathcal{B}} \bullet {}^t\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \Big[\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}\Big]^{-1} \bullet {}^tM_{D,\mathcal{B}} \bullet \mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} $$

puisque $\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}$ est symétrique.

c. *Construire une base orthonormée (relativement au produit scalaire induit par $\mathcal{Q}$) $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\vec{v}_j$ étant, pour $j = 0, 1, 2$, une fonction polynomiale de degré j. Quelle relation simple y a-t-il entre les matrices de D et D^* écrites dans cette nouvelle base $\widetilde{\mathcal{B}}$?*

On peut prendre pour $\vec{v}_0$ la fonction $t \to 1$; posons

$$ \vec{w}_1 = [t \to t] - \Theta(t \to t, \vec{v}_0)\vec{v}_0 , $$

c'est-à-dire

$$ \vec{w}_1 \ : t \to t - \int_0^1 u du = t - \frac{1}{2} ; $$

on a $\Theta(\vec{v}_0, \vec{w}_1) = 0$; comme

$$ \mathcal{Q}(t \to t - 1/2) = \int_0^1 (t - 1/2)^2 \, dt = \frac{1}{12} , $$

on peut donc prendre

$$ \vec{v}_1 = 2\sqrt{3}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) $$

pour obtenir un vecteur orthogonal à $\vec{v}_0$, tel que $\mathcal{Q}(\vec{v}_1) = 1$, et correspondant à une fonction polynômiale de degré 1.

Posons maintenant

$$ \vec{w}_2 = [t \to t^2] - \Theta(t \to t^2, \vec{v}_0)\vec{v}_0 - \Theta(t \to t^2, \vec{v}_1) ; $$

on a

$$ \vec{w}_2 \ : t \to t^2 - \frac{1}{3} - 2\sqrt{3}\Big(\int_0^1 u^2(u - 1/2) \, du\Big) \, \vec{v}_1 , $$

soit

$$\vec{w}_2 \ : t \to t^2 - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{12} \times 2\sqrt{3}\Big(t - \frac{1}{2}\Big)\,,$$

soit

$$\vec{w}_2 \ : t \to t^2 - t + \frac{1}{6}\,.$$

Or

$$\mathcal{Q}(\vec{w}_2) = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\, dt = \frac{1}{180}\,;$$

on peut donc prendre comme troisième vecteur

$$\vec{v}_2 \ : t \to 3\sqrt{20}\Big(t^2 - t + \frac{1}{6}\Big)\,;$$

le système $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est orthonormé relativement à la forme Θ.

D'après le cours, les matrices de D et D^* dans cette base orthonormée sont transposées l'une de l'autre.

ANALYSE

Exercice 1.

a. *On suppose que $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est une série entière de rayon de convergence R strictement positif telle que, si S, S', S'' désignent respectivement la somme de la série entière, celle de la série dérivée, celle de la série dérivée deux fois, dans le disque ouvert de convergence $D(0,R)$, on ait*

$$\forall z \in D(0,R)\,, \quad (1 - z^2)S''(z) - 2zS'(z) + S(z) = 0\,. \qquad (*)$$

Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+2} pour $n \geq 2$, ainsi que des relations entre a_0 et a_2 d'une part, a_1 et a_3 d'autre part.

Supposons que $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ soit une telle série entière. On sait que, pour z dans $D(0,R)$,

$$S''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, a_{n+2} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n z^{n-2}$$

et que

$$z\, S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n\,,$$

d'où il résulte que la relation (*) équivaut à la suite de relations

$$\forall n \geq 2\,,\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + a_n = 0\,,$$

soit

$$a_{n+2} = a_n \frac{n(n+1)-1}{(n+1)(n+2)}\,, \quad \forall n \geq 2\,,$$

combinée avec les deux "conditions initiales"

$$2a_2 + a_0 = 6a_3 + a_1 = 0\,.$$

b. *Montrer qu'il existe une unique série entière* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *solution du problème (*) posé au* **(a)**, *avec de plus* $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ *; quel est le rayon de convergence de cette série entière ?*

On voit que si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est solution du problème, alors, pour $k \geq 1$, on a

$$a_{2(k+1)} = a_{2k} \frac{2k(2k+1)-1}{(2k+1)(2k+2)}$$

et que, toujours pour $k \geq 1$,

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+1} \frac{(2k+1)(2k+2)-1}{(2k+2)(2k+3)}\,. \tag{††}$$

Si $a_1 = 0$, on a aussi $a_3 = -a_1/6 = 0$ et tous les a_{2k+1} sont nuls pour $k \geq 0$ à cause de (††). Les a_{2k}, $k \geq 0$ se calculent de proche en proche ; on a $a_2 = -a_0/2$, puis ensuite, on utilise les relations (†). La série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ solution de problème une fois imposées les conditions $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ est donc bien unique.

Comme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{2(k+1)}|}{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k(2k+1)-1}{(2k+1)(2k+2)} = 1\,,$$

la série $[a_{2k} z^{2k}]_{k\geq 0}$ ainsi construite a, d'après la règle de d'Alembert, un rayon de convergence égal à 1.

Exercice 2.

a. *Montrer que la fonction*

$$t \in]-1,1[\setminus\{0\} \to -\frac{\log(1-t)}{t}$$

se prolonge en une fonction de classe C^∞ *dans* $]-1,1[$ *(que l'on notera de la même manière).*

On sait que, dans $]-1,1[$, la fonction

$$t \to -\log(1-t)$$

s'exprime comme la somme de la série primitive de la série $[z^n]_{n\geq 0}$, puisque cette dernière série, de rayon de convergence 1, a pour somme

$$S\ : z \to \frac{1}{1-z}$$

dans $D(0,1)$ et que la dérivée sur $]-1,1[$ de $t \to -\log(1-t)$ est précisément $t \to \frac{1}{1-t} = S(t)$. On a donc

$$\forall\, t \in]-1,1[\,,\ -\log(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\,;$$

on a donc :

$$\forall\, t \in]-1,1[\setminus\{0\}\,,\ -\frac{\log(1-t)}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k+1}\,.$$

Comme la série entière $[t^k/(k+1)]_{k\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1, la fonction somme

$$t \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k+1}$$

est une fonction C^∞ sur $]-1,1[$ (d'après le cours). Cette fonction prolonge donc bien à $]-1,1[$ la fonction

$$t \to -\frac{\log(1-t)}{t}\,.$$

b. *Montrer que pour tout* $t \in]-1,1[$,

$$-\int_0^t \frac{\log(1-u)}{u}\,du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k^2}\,.$$

Comme la série $[t^{k-1}/k]_{k\geq 1}$ converge normalement sur tout intervalle fermé inclus dans $]-1,1[$, la convergence est uniforme sur un tel intervalle et l'on peut affirmer (intervertion du symbole d'intégration et du symbole de sommation sous l'hypothèse de convergence normale) que, si $t \in]-1,1[$,

$$\int_0^t \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k}\Big)\,du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\int_0^t u^{k-1}\,du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k^2}\,.$$

On a donc bien la formule voulue.

c. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $[z^k/k^2]_{k\geq 1}$ *? Comment se comporte cette série entière en un point du cercle de convergence ?*

La règle de d'Alembert nous dit immédiatement que le rayon de convergence de la série $[z^k/k^2]_{k\geq 1}$ vaut 1. Si $|z| = 1$ la série numérique $[z^k/k^2]_{k\geq 1}$ est absolument convergence car son terme général est de module $1/k^2$ et que la série de Riemann $[1/k^2]_{k\geq 1}$ est convergente. La série $[z^k/k^2]$ est donc convergente pour tout z appartenant au cercle de convergence (ici le cercle de centre 0 et de rayon 1).

d. *Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\forall v \in]0,\epsilon]\,, \quad |\log v| \leq \frac{1}{\sqrt{v}}\,.$$

En déduire que la suite numérique

$$\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\log(1-u)}{u}\,du\right)_{n\geq 1}$$

est une suite de Cauchy, donc convergente.

Si v tend vers 0 par valeurs positives, on sait que $|\log v|\,\sqrt{v}$ tend vers 0 (la fonction puissance imposant sa limite au logarithme). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall\, v \in]0,\epsilon]\,,\ |\log v|\,\sqrt{v} \leq 1\,.$$

Si $q > p \geq \max(2, 1/\epsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{1-\frac{1}{p}} \frac{\log(1-u)}{u}\,du - \int_0^{1-\frac{1}{q}} \frac{\log(1-u)}{u}\,du\right| &= \left|\int_{1-1/p}^{1-1/q} \frac{\log(1-u)}{u}\,du\right| \\
&= \left|\int_{1/q}^{1/p} \frac{\log v}{1-v}\,dv\right| \\
&\leq \int_{1/q}^{1/p} \frac{|\log v|}{1-v}\,dv \\
&\leq \int_{1/q}^{1/p} \frac{1}{\sqrt{v}\,(1-v)}\,dv \\
&\leq \int_{1/q}^{1/p} \frac{1}{\sqrt{v}\,(1-v)}\,dv \\
&\leq 2\int_{1/q}^{1/p} \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv \\
&\leq 4\left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}}\right);
\end{aligned}$$

cette dernière expression peut être rendue arbitrairement petite si p est assez grand, ce qui montre que la suite

$$\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\log(1-u)}{u}\,du\right)_{n\geq 1}$$

est bien de Cauchy, donc convergente (d'après le critère de Cauchy pour les suites numériques).

e. *Prouver la formule*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = - \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\log(1-u)}{u}\, du \right).$$

Comme la série entière $[z^k/k^2]_{k \geq 1}$ converge au point $z = 1$ du cercle de convergence, la convergence de cette série entière est uniforme sur $[0, 1]$ (c'est le critère d'Abel pour les séries entières). La somme de cette série entière (dans $[0, 1[$) se prolonge donc en une fonction continue sur $[0, 1]$, de valeur en $t = 1$ la quantité

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(valeur de la somme de cette série entière en $z = 1$). Comme

$$S(1 - 1/n) = - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\log(1-u)}{u}\, du$$

d'après le **(b)**, on a donc bien

$$\lim_{n \to \infty} S(1 - 1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ce qui est la formule voulue.