COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 1, Jeudi 17 Octobre 2002

Durée: 1 heure 20 mn

TEXTE (*en italiques*) + CORRIGÉ (en roman)

ALGÈBRE

Question de cours. *Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton (pour un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie). La condition "T trigonalisable" est-elle indispensable ?*

Si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et si P_T désigne le polynôme caractéristique de T, alors $P_T[T]$ (c'est l'opérateur obtenu à partir de P_T en substituant T à X, Id_E à 1 et l'opération de composition à celle de multiplication) est l'endomorphisme nul. La condition "T trigonalisable" utile dans la preuve n'est de fait pas indispensable.

Exercice 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et T un $\mathbb{R}$-endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E est :*

$$M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e sont cinq nombres réels. Calculer le polynôme caractéristique de T.

Pour calculer P_T, on peut utiliser la matrice de T par exemple dans la base $\mathcal{B}$; on a donc

$$\begin{aligned} P_T(X) &= \begin{vmatrix} a-X & 0 & e \\ 0 & b-X & 0 \\ d & 0 & c-X \end{vmatrix} = (a-X)(b-X)(c-X) - ed(b-X) \\ &= (b-X)(X^2 - (a+c)X + ac - ed) \end{aligned}$$

(d'après les règles de calcul du déterminant).

Que vaut (en fonction de a, b, c) la somme des termes diagonaux de la matrice de T dans une autre base de E ?

Si $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 3}$ est la matrice de T dans une base quelconque, le polynôme caractéristique de T s'écrit

$$P_T(X) = -X^3 + (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})X^2 + \cdots$$

Comme ce polynôme s'écrit aussi

$$P_T(X) = -X^3 + (a+b+c)X^2 + (ed - ac - ab - bc)X + b(ac - ed)\,,$$

la somme $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ des termes diagonaux de A vaut $a+b+c$ (c'est la trace de T, dont on sait qu'elle ne dépend que de l'opérateur T).

À quelle condition (sur a, b, c, d, e) l'endomorphisme T est-il trigonalisable ?

Le fait que T soit trigonalisable équivaut à ce que le polynôme P_T ait toutes ses racines réelles ; comme b est déjà dans $\mathbb{R}$ (et est une racine de P_T), il faut et il suffit que le trinôme

$$X^2 - (a+c)X + ac - ed$$

ait ses deux racines (distinctes ou confondues) réelles ; ceci est vrai si et seulement si

$$(a+c)^2 - 4(ac - ed) = (a-c)^2 - 4ed \geq 0\,.$$

Déterminer trois nombres α, β, γ tels que

$$T^3 = \alpha T^2 + \beta T + \gamma \mathrm{Id}_E$$

(T^k désigne le composé de T avec lui-même k fois).

D'après Cayley-Hamilton

$$(b\mathrm{Id}_E - T) \circ (T^2 - (a+c)T + (ac - ed)\mathrm{Id}_E) = 0\,,$$

soit

$$T^3 = (a+b+c)T^2 + (ed - ac - ab - bc)T + b(ac - ed)\mathrm{Id}_E\,;$$

on peut donc choisir $\alpha = a+b+c$, $\beta = ed - ac - ab - bc$, $\gamma = b(ac - ed)$.

Exercice 2. *Soit T le $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Construire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure.

On remarque que le vecteur $(0,1,0)$ est propre (associé à la valeur propre 2) et que le vecteur $(1,0,1)$ est dans le noyau de T (donc est un vecteur propre associé à la valeur propre 0). On prend donc comme base par exemple

$$\vec{e}_1 := (0,1,0)\,,\ \vec{e}_2 := (1,0,1)\,,\ \vec{e}_3 = (1,0,0)\ ;$$

on a

$$T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\,.$$

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice de T est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \;;$$

en fait, on pourrait (en travaillant un peu plus, mais on ne le demandait pas ici) trouver une base dans laquelle la matrice de T serait diagonale (puisque P_T a trois racines distinctes $2, 0, -2$).

ANALYSE

Soient a, x, y trois paramètres réels ; on considère la série à termes positifs $[u_n(a,x,y)]_{n\geq 2}$ de terme général

$$u_n(a,x,y) = \frac{a^n}{(\log n)^x\, n^y}$$

(comme dans le cours, $\log$ *désigne ici la fonction logarithme népérien).*

1. *Quelle est la nature de la série $[u_n(a,x,y)]_{n\geq 2}$ lorsque $a < 1$? lorsque $a > 1$?*

On utilise le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}(a,x,y)}{u_n(a,x,y)} = a \times \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^y \times \Big(\frac{\log n}{\log(n+1)}\Big)^x$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1$$

et que les fonctions $t \to t^x = e^{x \log t}$ et $t \to t^y = e^{y \log t}$ sont continues sur $]0, +\infty[$ (donc en $t = 1$), on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(a,x,y)}{u_n(a,x,y)} = a.$$

D'après le critère de d'Alembert, si $a < 1$, la série à termes positifs $[u_n(a,x,y)]_{n\geq 2}$ converge, tandis que si $a > 1$, elle diverge.

On suppose maintenant que $a = 1$.

2. *Quelle est la nature de la série $[u_n(1,x,y)]_{n\geq 2}$ lorsque $y > 1$? lorsque $y < 1$?*

• On suppose $y > 1$; on a donc, pour un certain $\epsilon > 0$, $y > 1 + \epsilon|x|$; pour n assez grand, on a

$$(\log n)^{-x} = e^{-x \log n} \leq (\log n)^{|x|} \leq n^{\epsilon|x|/2}$$

(car une fonction puissance impose en $+\infty$ sa limite à toute fonction puissance du logarithme) ; on a donc, puisque $y > 1 + \epsilon|x|$, que pour n assez grand

$$u_n(1, x, y) \leq n^{\epsilon|x|/2} n^{-y} \leq n^{\epsilon|x|/2} n^{-1-\epsilon|x|} \leq n^{-1-\epsilon|x|/2} \ ;$$

on majore donc le terme général de la série $[u_n(1, x, y)]$ par celui d'une série de Riemann $[n^{-1-\eta}]_{n \geq 1}$ avec $\eta > 0$, donc convergente ; le critère de comparaison permet d'affirmer que dans ce cas la série $[u_n(1, x, y)]_{n \geq 2}$ est convergente.

• On suppose $y < 1$; on a donc, pour un certain $\epsilon > 0$, $y < 1 - \epsilon|x|$; pour n assez grand, on a

$$(\log n)^{-x} = e^{-x \log n} \geq (\log n)^{-|x|} \geq n^{-\epsilon|x|/2}$$

(car une fonction puissance impose en $+\infty$ sa limite à toute fonction puissance du logarithme) ; on a donc, puisque $y < 1 - \epsilon|x|$, que pour n assez grand

$$u_n(1, x, y) \geq n^{-\epsilon|x|/2} n^{-y} \geq n^{-\epsilon|x|/2} n^{-1+\epsilon|x|} \geq n^{-1+\epsilon|x|/2} \ ;$$

on minore donc le terme général de la série $[u_n(1, x, y)]$ par celui d'une série de Riemann $[n^{-1+\eta}]_{n \geq 1}$ avec $\eta > 0$, donc divergente ; le critère de comparaison permet d'affirmer que dans ce cas la série $[u_n(1, x, y)]_{n \geq 2}$ est divergente.

3. *Quelle est la nature de la série de terme général*

$$v_n := \log(\log(n+1)) - \log(\log(n)) \ ?$$

Donner aussi la valeur en fonction de n de la n-ème somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *de cette série.*

Cette série est une série "télescopique" ; on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} v_k &= (\log(\log 3) - \log(\log 2)) + (\log(\log 4) - \log(\log 3)) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \log(\log(n+1)) - \log(\log(n)) \\ &= \log(\log(n+1)) - \log(\log 2)) \ ; \end{aligned}$$

comme

$$\lim_{n \to \infty} \log(\log(n+1)) = +\infty \,,$$

la série $[v_n]_{n\geq 2}$ est divergente.

4. *En utilisant le fait que pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\log\Big[\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big] = \log\Big[1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\Big],$$

montrer que

$$v_n \sim u_n(1,1,1)$$

au voisinage de l'infini.

Au voisinage de $t = 0$, $\log(1+t) \sim t$; donc

$$\log\Big[1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\Big] = \log\Big[1 + \frac{1}{n\log n}(1+\epsilon_n)\Big]$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$; en réutilisant $\log(1+t) \sim t$ au voisinage de $t = 0$, il vient donc

$$\log\Big[1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\Big] = \log\Big[1 + \frac{1}{n\log n}(1+\epsilon_n)\Big] \sim \frac{1}{n\log n}$$

lorsque n tend vers l'infini ; comme

$$v_n = \log\Big[\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big],$$

on a $v_n \sim u_n(1,1,1)$ au voisinage de l'infini.

5. *Quelle est la nature de la série $[u_n(1,1,1)]_{n\geq 2}$? Donner un équivalent simple de la somme partielle*

$$S_n := \sum_{k=2}^{n} u_k(1,1,1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Les deux séries $[u_n(1,1,1)]_{n\geq 2}$ et $[v_n]_{n\geq 2}$ sont de même nature (puisque les termes généraux sont équivalents). La série $[v_n]_{n\geq 2}$ étant divergente, la série $[u_n(1,1,1)]_{n\geq 2}$ l'est aussi. Le théorème du cours assure aussi que, lorsque n tend vers l'infini

$$\sum_{k=2}^{n} u_k(1,1,1) \sim \sum_{k=2}^{n} v_k = \log(\log(n+1)) - \log 2\,;$$

on a donc

$$S_n \sim \log(\log n))$$

lorsque n tend vers $+\infty$.