ANNÉE : 2004-2005 SESSION DE SEPTEMBRE 2005
PARCOURS : MAA, MAI, MAP
UE : MAT401
Épreuve : MAT401EX (Analyse 3 : suites-séries)
Date : 3 Septembre 2005
Heure : 8h30-11h30
Durée : 3 heures
Documents : non autorisés
Épreuve de M. Yger

Exercice 1 (séries entières)

a. *Question de cours* **:** *quelle est la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ dont la somme (dans son disque ouvert de convergence) est égale à la fonction $z \longmapsto \exp(z)$?*
La série entière $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme dans son disque ouvert de convergence (ici $\mathbb{C}$) est précisément la fonction $z \longmapsto \exp(z)$.

b. *Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\exp(n) \geq \frac{n^n}{n!} \qquad (*)$$

(avec la convention $0^0 = 0! = 1$).
On a, du fait du résultat rappelé au **(a)** :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

En particulier, si $z = n$,

$$\exp(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = \frac{n^n}{n!} + \sum_{k\neq n} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{z^n}{n!}$$

car une somme de nombres positifs est positive (on a adopté les conventions indiquées pour justifier $0^k/0! = 1 = \exp(0)$).

c. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} &\leq n\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n\frac{n^n}{n!}\\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^k}{k!} &\leq \frac{n^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k = (n+1)\frac{n^n}{n!}\,;\end{aligned}$$

Déduire de ces deux inégalités que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\exp(n) \leq (2n+1)\frac{n^n}{n!} \qquad (**)$$

(on pourra admettre ce résultat pour faire la question suivante, même si l'on n'a pas pu établir les deux inégalités qui le précèdent).

Si $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a $n/l \geq 1$ pour tout entier l entre $k+1$ et $n-1$; on a donc, pour un tel k,

$$\frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \times \frac{n}{k+1} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \,;$$

en additionnant pour les valeurs de k entre 0 et $n-1$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \leq n \times \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n\frac{n^n}{n!} \,.$$

Ceci prouve la première inégalité exigée.
On a aussi, pour tout entier $k \geq n$,

$$\frac{n^k}{k!} = \frac{n^n}{n!} \times \frac{n^{k-n}}{(n+1) \times \cdots \times k} \leq \frac{n^n}{n!} \times \frac{n^{k-n}}{(n+1)^{k-n}} \,;$$

en ajoutant pour toutes les valeurs de k entre 0 et $+\infty$, il vient donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-n} &= \frac{n^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k} \\ &= \frac{n^n}{n!} \times \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} \\ &= (n+1)\frac{n^n}{n!} \,. \end{aligned}$$

Ceci prouve la seconde inégalité exigée.
En combinant les deux inégalités obtenues et en utilisant le développement en série de $\exp(n)$ rappelé au **(a)**, il vient, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \leq n\frac{n^n}{n!} + (n+1)\frac{n^n}{n!} = (2n+1)\frac{n^n}{n!} \,;$$

on constate que cette inégalité reste valable pour $n = 0$.

d. *Question de cours : rappeler la règle de Cauchy permettant le calcul explicite du rayon de convergence d'une série entière ; la règle de d'Alembert* *(que l'on rappellera également) pour une série entière $[a_nX^n]_{n\geq 0}$ (avec $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) permet-elle d'obtenir une valeur exacte de ce rayon de convergence ou simplement un encadrement ?*

La règle de Cauchy stipule que le rayon de convergence R de la série entière $[a_nX^n]_{n\geq 0}$ vaut

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}\,.$$

La règle de d'Alembert pour une série entière $[a_nX^n]_{n\geq 0}$ (où tous les a_n sont nnon nuls) fournit simplement pour le rayon de convergence R de cette même série l'encadrement :

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \leq R \leq \frac{1}{\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}\ ;$$

elle ne fournit pas en général (sauf si la suite numérique $(|a_{n+1}|/|a_n|)_{n\geq 0}$ converge vers l, auquel cas $R = 1/l$) de valeur exacte du rayon de convergence R (au contraire de la règle de Cauchy qui elle donne une valeur exacte de R).

e. *En utilisant la règle de Cauchy (rappelée au* **(d)***), le "lemme des gendarmes" et les inégalités (*) et (**) établies respectivement au* **(b)** *et au* **(c)***, montrer que le rayon de convergence R de la série entière*

$$\Big[\frac{n^n}{n!}X^n\Big]_{n\geq 0}$$

vaut $R = 1/e$.

On a d'après les inégalités (*) et (**) l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\exp(n)}{(2n+1)} \leq \frac{n^n}{n!} \leq \exp(n)\,,$$

d'où, en prenant les racines n-ièmes,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{e}{(2n+1)^{1/n}} \leq \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^{1/n} \leq e\,;$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ et en appliquant la classique règle des gendarmes (en effet

$$(2n+1)^{1/n} = \exp\Big(\frac{\log(2n+1)}{n}\Big) \to e^0 = 1$$

lorsque n tend vers $+\infty$), on constate que

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^{1/n} = e\,.$$

D'après la règle de Cauchy rappelée au **(d)**, le rayon de convergence de la série en question vaut bien $R = 1/e$.

Exercice 2 (intégrales généralisées)

a. *Montrer que, pour tout nombre réel x, l'intégrale*

$$I_x = \int_0^1 \frac{e^{-ixu} \log u \; du}{1+u^2}$$

est convergente.

La fonction sous l'intégrale est définie (et continue) sur $]0,1]$ et il s'agit donc d'un problème de convergence d'intégrale sur cet intervalle semi-ouvert. On a, pour $u \in]0,1]$,

$$\Big|\frac{e^{-ixu} \log u \; du}{1+u^2}\Big| = \frac{|\log u|}{1+u^2}.$$

Au voisinage de $u = 0$ (à droite), on a

$$|\log u| \leq u^{-1/2}$$

puisque

$$\lim_{u \to 0, u>0} (|\log u| \times \sqrt{u}) = 0$$

(les fonctions puissances imposent leur limite au logarithme) ; d'autre part, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}(1+u^2)}$$

converge d'après la règle des équivalents car le seul problème est en $u = 0$ et que

$$\frac{1}{\sqrt{u}(1+u^2)} \sim \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2}$$

au voisinage de $u = 0$ (à droite) est intégrable au voisinage de 0 à droite (règle de Riemann). Par la règle de comparaison, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{|\log u| \, du}{1+u^2}$$

est donc aussi convergente. L'intégrale généralisée proposée est donc convergente sur $]0,1]$ car absolument convergente (c'est un théorème du cours).

b. *Vérifier, pour tout nombre réel u et pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, l'identité*

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k u^{2k} + (-1)^{N+1} \frac{u^{2N+2}}{1+u^2}.$$

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'identité remarquable bien connue

$$1-(-u^2)^{N+1} = (1-(-u^2)) \times \Big(\sum_{k=0}^{N} (-u^2)^k\Big) \ ;$$

en divisant par $1+u^2$, on obtient exactement l'identité voulue.

c. *En utilisant le développement de* $u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$ *proposé au* **(b)**, *montrer*

$$I_0 = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \, .$$

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \log u \times \Big(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k u^{2k} + (-1)^{N+1} \frac{u^{2N+2}}{1+u^2}\Big)\, du \\ &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^1 (\log u)\, u^{2k}\, du + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{(\log u) \times u^{2N+2}\, du}{1+u^2} \end{aligned}$$

(on applique le développement établi au (b) –après avoir remarqué en répétant l'argument utilisé pour prouver la convergence de I_x au **(a)**– que toutes les intégrales impliquées

$$\int_0^1 (\log u)\, u^{2k}\, du \, , \ k = 0, ..., N \, , \ \text{et} \ \int_0^1 \frac{(\log u) u^{2N+2}\, du}{1+u^2}$$

étaient toutes absolument convergentes, donc convergentes, sur $]0,1]$).
D'autre part, on a la majoration

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^1 \frac{(\log u) \times u^{2N+2}\, du}{1+u^2} \Big| &\leq \int_0^1 |\log u|\, u^{2N+2}\, du \\ &\leq C \int_0^1 u^{2N+1}\, du \\ &\leq C \Big[\frac{u^{2N+2}}{2N+2}\Big]_0^1 = \frac{C}{2N+2} \, , \end{aligned}$$

où C désigne le maximum sur $[0,1]$ de la fonction continue

$$u \in]0,1] \longmapsto u |\log u|$$

prolongée par 0 en $u = 0$. On conclut donc que

$$\lim_{N \to +\infty} \Big((-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{(\log u) \times u^{2N+2}\, du}{1+u^2}\Big) = 0$$

et par conséquent

$$I_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 (\log u)\, u^{2k}\, du\,.$$

Il reste à calculer chaque intégrale

$$\int_0^1 (\log u)\, u^{2k}\, du\,,\ k = 0, ..., N,$$

ce que l'on fait par parties en remarquant que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\log u)\, u^{2k}\, du &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 (\log u) u^{2k}\, du \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\Big[(\log u) \times \frac{u^{2k+1}}{2k+1} \Big]_\epsilon^1 - \frac{1}{2k+1} \int_\epsilon^1 u^{2k+1} \frac{du}{u} \right) \\
&= -\frac{1}{(2k+1)} \int_0^1 u^{2k}\, du = -\frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

(on dérive le logarithme et l'on intègre $u \longmapsto u^{2k}$); on obtient en ajoutant la formule voulue pour I_0.

Exercice 3 (analyse complexe)

a. *Soit P et Q deux polynômes à coefficients complexes de degrés respectifs p et q, avec $p \leq q - 2$; on note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les zéros (complexes) distincts de Q (certains pouvant être des zéros multiples) ; montrer que si $R > \max_{1 \leq j \leq r} |\alpha_j|$, l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\,,$$

où γ_R désigne le chemin paramétré

$$t \in [0, 1] \longmapsto Re^{2i\pi t}\,,$$

est nulle (on expliquera pourquoi elle est indépendante de R, puis l'on fera tendre R vers l'infini pour la calculer en en majorant son module).

La fonction

$$z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les zéros α_1,...,α_r du polynôme Q. Si $R > \max_j |\alpha_j|$, le théorème des résidus permet d'affirmer que

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Res}_{\alpha_j} \Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \Big)\,;$$

on constate que le second membre ne dépend pas de R. Écrivons

$$P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_p\,;$$

Si R est assez grand et si z est un point du cercle de rayon R, on peut majorer en utilisant l'inégalité triangulaire $|A \pm B| \le |A| + |B|$ la quantité $|P(z)|$ par

$$|P(z)| \le |a_0| R^p + \sum_{k=1}^{p} |a_k| R^{q-k} = |a_0| R^p \Big(1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{|a_k|}{|a_0|} R^{-k}\Big) \le 2|a_0| R^p\,;$$

écrivons aussi

$$Q(z) = b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots + b_q\,;$$

toujours pour R assez grand, on a, toujours grâce à l'inégalité triangulaire $|A \pm B| > ||A| - |B||$, que pour tout nombre complexe z de module R,

$$|Q(z)| \ge |b_0| R^q - \sum_{k=1}^{q} |b_k| R^{q-k} = |b_0| R^q \Big(1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{|b_k|}{|b_0|} R^{-k}\Big) \ge \frac{|b_0| R^q}{2}\,.$$

Ceci nous permet de majorer le module de l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

lorsque R est assez grand par

$$\Big|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\Big| \le 2\pi R \frac{\max_{|z|=R} |P(z)|}{\min_{|z|=R} |P(z)|} \le 2\pi R \times \frac{2|a_0| R^p}{(|b_0|/2) R^q} = \frac{8\pi |a_0|}{|b_0|} R^{p+1-q}\,.$$

Comme $p \le q-2$, le terme majorant tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini ; comme l'intégrale curviligne ne dépend pas de R et que son module tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini, elle est nulle.

b. *On suppose de plus que les zéros de Q sont tous des zéros simples (on a donc dans ce cas $r = q$) ; montrer que l'on a*

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} = 0\,. \qquad (\dagger)$$

Si α est un zéro simple de Q, le résidu en α de la forme $P(z)dz/Q(z)$ vaut, d'après un résultat du cours,

$$\mathrm{Res}_\alpha\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\Big) = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\,;$$

si Q n'a que des zéros simples (auquel cas $r = \deg Q = q$), on a donc

$$\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}_{\alpha_j}\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\Big) = \sum_{j=1}^{q} \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{P(z)\,dz}{Q(z)}$$

si $R > \max|\alpha_j|$ d'après le théorème des résidus. On conclut en utilisant le résultat du **(a)** que

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} = 0\,.$$

c. *Quelle formule (en termes de résidus) remplace la formule (†) dans le cas où l'on ne fait plus l'hypothèse de simplicité concernant les zéros de Q ?*

Si certains zéros de Q sont des zéros multiples, il faut remplacer la formule (†) par la relation

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Res}_{\alpha_j}\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\Big) = 0$$

qui, elle, est toujours valable (elle résulte du théorème des résidus et de la nullité de l'intégrale curviligne du **(a)**).

Exercice 4 (suites de fonctions et séries de Fourier)

a. *Soit x un nombre réel et $f_x : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ la fonction périodique de période 2π définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$ par :*

$$f_x(t) := \exp(ixt)\,.$$

Vérifier que, pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe $c_k(f_x)$ de la fonction 2π-périodique f_x vaut

$$c_k(f_x) = \mathrm{sinc}\,(\pi(x-k))\,,$$

où la fonction sinc *est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par*

$$\mathrm{sinc}\,(t) = \frac{\sin t}{t} \ \text{si } t \neq 0 \quad , \quad \mathrm{sinc}\,(0) = 1\,.$$

On a, par définition du coefficient de Fourier complexe d'indice k de la fonction 2π-périodique f_x, pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{x\}$,

$$\begin{aligned} c_k(f_x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_x(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-k)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{it(x-k)}}{i(x-k)}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(\pi(x-t))}{\pi(x-t)}\,; \end{aligned}$$

pour $k = x$, on a

$$c_k(f_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1\,.$$

On a donc bien dans tous les cas

$$c_k(f_x) = \operatorname{sinc}(\pi(x-k))$$

pour tout indice $k \in \mathbb{Z}$.

b. *En précisant bien le résultat du cours que vous utilisez, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=-n}^{k=n} [\operatorname{sinc}(\pi(x-k))]^2 \Big) = 1\,.$$

D'après la formule de Plancherel (l'énergie d'un signal est égale à l'énergie de son spectre puisque la transformation de Fourier préserve – comme toute transformation physique raisonnable – l'énergie), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{k=N} |c_k(f_x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_x(t)|^2\, dt = 1\,.$$

c. *Question de cours : énoncer le théorème de Dirichlet (relatif au comportement des séries de Fourier) en en précisant bien hypothèses et conclusion.*

Voici l'énoncé du théorème de Dirichlet tel qu'il est donné dans le cours : si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, x un point de $\mathbb{R}$ où f admet une dérivée à gauche et à droite, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f) e^{ikt} = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))\,,$$

où $f(t^-)$ (resp. $f(t^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f au point t.

d. *On suppose $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que la suite de fonctions (sur $\mathbb{R}$)*

$$\Big(t \longmapsto \sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k))\ \exp(ikt)\Big)_{n\geq 0}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π-périodique que l'on précisera; la convergence est-elle uniforme sur $[-\pi, \pi]$?

On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k)) \ \exp(ikt) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f_x) e^{ikt} .$$

La fonction f_x est 2π-périodique et définie par $f_x(t) = e^{ixt}$ sur $[-\pi, \pi[$; elle est donc C^∞ sur tout intervalle $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ de $\mathbb{R}$ et le théorème de Dirichlet rappelé au **(c)** permet d'affirmer

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi + 2\pi \mathbb{Z}\} , \ \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k)) \ \exp(ikt)\Big) = f_x(t) = e^{ixt} .$$

Si $t \in -\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, la fonction f_x admet (par construction même de f_x) comme limite à gauche en t le nombre $f_x(t^-) = \exp(i\pi x))$ et comme limite à droite en ce même point le nombre $f_x(t^+) = \exp(-i\pi x)$. Vu la définition de f_x sur $[-\pi, \pi[$, il y a une dérivée à gauche $(ixe^{i\pi x})$ et une dérivée à droite $(ixe^{-i\pi x})$ en un tel point t et le théorème de Dirichlet rappelé au **(c)** s'applique encore, pour donner, pour un tel point t,

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k)) \ \exp(ikt)\Big) = \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2} = \cos(\pi x) .$$

La suite de fonctions

$$\Big(t \longmapsto \sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k)) \ \exp(ikt)\Big)_{n\geq 0}$$

converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction 2π-périodique g_x définie par

$$g_x(t) = f_x(t)$$

si $t \notin -\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $g_x(t) = \cos(\pi x)$ sinon. Si $x \notin \mathbb{Z}$ (comme c'est le cas dans cette question), $e^{-ix\pi} \neq e^{ix\pi}$, ce qui implique que la fonction g_x n'est pas continue aux points de $-\pi + 2\pi\mathbb{Z}$; elle n'est en particulier pas continue sur $[-\pi, \pi]$. La convergence de la suite de fonctions

$$\Big(t \longmapsto \sum_{k=-n}^{k=n} \operatorname{sinc}(\pi(x-k)) \ \exp(ikt)\Big)_{n\geq 0}$$

ne saurait donc dans ce cas être uniforme sur $[-\pi, \pi]$ (car il s'agit d'une suite de fonctions continues et que la continuité est préservée par prise de limite uniforme).

e. *Montrer que la suite de fonctions (sur $\mathbb{R}$)*

$$\Big(x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sinc}(\pi(x-k))}{k}\Big)_{n\geq 1}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On utilisera pour ce faire le critère de Cauchy uniforme – que l'on rappellera – et l'inégalité suivante (que l'on établira) : pour tout couple d'entiers (p,q) dans $\mathbb{N}^*$ tels que $p<q$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{k=q} \frac{\operatorname{sinc}(\pi(x-k))}{k}\Big| \leq \sqrt{\sum_{k=p+1}^{q}\frac{1}{k^2}}$$

(penser pour établir cette inégalité à exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_j a_j b_j \leq \Big(\sum_j a_j^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_j b_j^2\Big)^{1/2}$$

si $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ sont des réels positifs, et le résultat établi au **(b)***).*

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a, pour tout couple d'entiers positifs (p,q) avec $p<q$,

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{k=q} \frac{\operatorname{sinc}(\pi(x-k))}{k}\Big| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |\operatorname{sinc}(\pi(x-t))|\times\frac{1}{k}\,;$$

si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (rappelée dans l'énoncé) en prenant $a_j = |\operatorname{sinc}(\pi(x-j))|$ et $b_j = 1/j$, $j\in\{p+1,\dots,q\}$, on a donc

$$\sum_{k=p+1}^{q} |\operatorname{sinc}(\pi(x-t))|\times\frac{1}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=p+1}^{q}|\operatorname{sinc}(\pi(x-k))|^2}\times\sqrt{\sum_{k=p+1}^{q}\frac{1}{k^2}}\,.$$

Mais on a, d'une part

$$\sum_{k=p+1}^{q}|\operatorname{sinc}(\pi(x-k))|^2 \leq \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=-N}^{N}|\operatorname{sinc}(\pi(x-k))|^2\Big) = 1$$

d'après le résultat établi au **(b)**, d'autre part

$$\sum_{k=p+1}^{q}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

et

$$\lim_{p\to+\infty}\Big(\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big) = 0 \qquad (\dagger\dagger)$$

comme reste d'une série numérique convergente (critère de Riemann). En combinant les diverses inégalités que l'on vient d'obtenir avec (††), on constate le fait suivant : étant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que si (p, q) sont deux entiers positifs avec $q > p \geq N$, on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \Big|\sum_{k=p+1}^{k=q} \frac{\mathrm{sinc}\,(\pi(x-k))}{k}\Big| \leq \sqrt{\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}} \leq \epsilon\,.$$

C'est exactement là le jeu d'hypothèses du critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$ pour la suite de fonctions

$$\Big(x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{sinc}\,(\pi(x-k))}{k}\Big)_{n\geq 1}\ ;$$

en appliquant alors ce critère de Cauchy uniforme, on conclut que cette suite de fonctions converge bien uniformément sur $\mathbb{R}$.