COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 4, Jeudi 18 Décembre 2003

Durée : 1 h20

Texte (*en italiques* et corrigé (en roman)

ALGÈBRE

Question de cours.

Donner un exemple de forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ n'ayant aucun vecteur isotrope. Est-il possible qu'une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel n'ait aucun vecteur isotrope ?

La forme hermitienne

$$H(z_1, ..., z_n) := |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

sur $\mathbb{C}^n$ n'a aucun vecteur isotrope car $H(z) = 0$ implique $z_1 = \cdots = z_n = 0$. Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$; si la forme est de rang strictement inférieur à n, Q admet des vecteurs isotropes ; si Q est de rang n et si $n \geq 2$, il existe une base de E dans laquelle

$$Q(z_1\vec{e}_1 + \cdots + z_n\vec{e}_n) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \, ;$$

le vecteur $e_1 + ie_2$ est isotrope. Si $n = 1$ et si Q est non nulle, il n'y a aucun vecteur isotrope. En conclusion, le seul cas où une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel n'admet aucun vecteur isotrope est le cas où l'espace vectoriel est de dimension 1 et la forme Q non nulle ; dans ce cas, tout vecteur non nul est non-isotrope. Dès que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension au moins 2 (finie ou non), toute forme quadratique admet au moins un vecteur isotrope.

Exercice.

Soit E_N le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N.

a. *Montrer que l'application $E_N \times E_N \to \mathbb{R}$ qui à (P, Q) associe*

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire sur E_N ; on notera par la suite

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \langle P \, , \, Q\rangle$$

La bilinéarité de l'application est évidente (par linéarité de l'intégrale). Comme l'intégrale d'une fonction positive est positive, on a

$$\int_{-1}^{1} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0 \quad \forall P \in E_N \, ;$$

de plus, si l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction continue positive est nulle, la fonction est identiquement nulle ; donc

$$\int_{-1}^{1} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \implies P = 0 \, ,$$

ce qui montre que la forme est définie ; c'est donc un produit scalaire.

b. *On suppose que $N \geq 2$ et l'on considère dans E_N le sous-espace F_N défini par*

$$F_N := \{P \in E_N \, ; \, P(1) = P(-1) = 0\} \, ;$$

quelle est la dimension de F_N ? Quelle est la dimension de l'orthogonal de F_N dans E_N (relativement au produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$ défini au **(a)***) ?*

L'application

$$P \to (P(1), P(-1))$$

est une application linéaire surjective de E_N dans $\mathbb{R}^2$; le noyau F_N est donc, d'après le théorème dur rang, de dimension $\dim E_N - 2 = N+1-2 = N-1$. L'orthogonal de F_N dans E_N est de dimension 2 (d'après le théorème de Pythagore, on doit avoir en effet $E_N = F_N + F_N^{\perp}$).

c. *On note T l'opérateur de E_N dans lui-même défini par $T(P) = P'$ et T^* son adjoint (toujours relativement au produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$) ; montrer que pour tout $P \in F_N$, on a*

$$T^*(P) = P - P' \, .$$

On a, par intégration par parties, si P et Q sont dans E_N,

$$\int_{-1}^{1} Q'(t)P(t)e^{-t}dt = \Big[P(t)Q(t)e^{-t}\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q(t)[P'(t) - P(t)]e^{(t}dt \, .$$

Si $P \in F_N$, on a de plus, pour tout $Q \in E_N$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} Q'(t)P(t)e^{-t}dt &= -\int_{-1}^{1} Q(t)[P'(t) - P(t)]e^{-t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} Q(t)[P(t) - P'(t)]e^{-t}dt \, . \end{aligned}$$

D'après la formule d'adjonction définissant l'adjoint

$$\langle T(Q), P\rangle = \langle Q, T^*(P)\rangle\,,$$

on a bien

$$T^*(P) = P - P'\,.$$

d. *On suppose $N=1$; en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire à partir de la base $\{1,t\}$ de E_1 une base de E_1 orthonormée pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.*

On a

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} e^{-u}du = e - 1/e\,;$$

on peut prendre comme premier vecteur de la base orthormée le polynôme constant

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{e-1/e}} = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}\,.$$

Pour trouver le second polynôme P_2, on considère le polynôme

$$Q(t) := t - \langle t, P_1\rangle P_1 = t - \frac{e}{e^2-1}\int_{-1}^{1} ue^{-u}du\,;$$

or

$$\int_{-1}^{1} ue^{-u}du = \Big[-ue^{-u}\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-u}du = -1/e - e + e - 1/e = -2/e\,.$$

On a donc

$$Q(t) = t - \langle t, P_1\rangle P_1 = t + \frac{2}{e^2-1}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle Q, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} Q^2(u)e^{-u}du \\
&= \int_{-1}^{1} u^2e^{-u}du + \frac{4}{(e^2-1)}\int_{-1}^{1} ue^{-u}du + \frac{4}{(e^2-1)^2}\int_{-1}^{1} e^{-u}du \\
&= \int_{-1}^{1} Q^2(u)e^{-u}du - \frac{8}{e(e^2-1)} + \frac{4}{e(e^2-1)} \\
&= \int_{-1}^{1} Q^2(u)e^{-u}du - \frac{4}{e(e^2-1)} \\
&= e - 1/e + 2\int_{-1}^{1} ue^{-u}du - \frac{4}{e(e^2-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^2-1}{e} - \frac{4}{e}\Big(1+\frac{1}{e^2-1}\Big)\\
&= \frac{e^2-1}{e} - \frac{4e}{e^2-1}\\
&= \frac{(e^2-1)^2-4e^2}{e(e^2-1)}\,.
\end{aligned}
$$

On peut donc prendre

$$P_2 = Q\sqrt{\frac{e(e^2-1)}{(e^2-1)^2-4e^2}}\,.$$

Le système (P_1, P_2) est orthonormé.

ANALYSE

Exercice 1.

On considère la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *avec*

$$a_0 = a_1 = 0\,, \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)} \qquad \forall\ n \geq 2\,.$$

a. *Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.*

Pour $n \geq 2$, on a $a_n \neq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n+1}\ ;$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1\,,$$

la règle de d'Alembert s'applique bien et le rayon de convergence de la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vaut donc $R = 1$.

b. *On note $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ la série dérivée de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = -\log(1-x)$$

où log *désigne la fonction logarithme néperien.*

La série dérivée $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ est la série entière $[(n+1)a_{n+1} z^n]_{n\geq 0}$ et l'on a donc $b_0 = 0$ et

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n .$$

On a donc, si $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt .$$

Comme la série entière $[z^n]_{n\geq 0}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,x]$ (car le rayon de convergence de cette série vaut 1 et qu'une série entière converge normalement sur tout disque fermé strictement inclus dans son disque de convergence), on peut intervertir sommation et intégration dans l'expression

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt ,$$

ce qui donne

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

c. *Donner la primitive F sur $]-1,1[$ de $x \to -\log(1-x)$ qui vérifie $F(0)=0$.*
Cette primitive vaut

$$\begin{aligned} F(x) = -\int_0^x \log(1-t)dt = \int_1^{1-x} \log u du &= \Big[t(\log t - 1)\Big]_1^{1-x} \\ &= (1-x)(\log(1-x)-1)+1 \\ &= (1-x)\log(1-x)+x . \end{aligned}$$

d. *Montrer que la série numérique*

$$\Big[\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\Big]_{n\geq 2}$$

est convergente et que sa somme vaut $2\log 2 - 1$ (on justifiera précisément les résultats du cours que l'on utilise).
La série

$$\Big[\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\Big]_{n\geq 2}$$

vérifie le crière des séries alternées car

$$n \to \frac{1}{n(n-1)}$$

tend vers 0 en décroissant lorsque n tend vers l'infini. Cette série est donc convergente. Le point $z = -1$ est un point du cercle de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ où cette série entière converge. D'après le critère d'Abel pour les séries entières, la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge uniformément sur le segment $[-1,0]$; la somme de cette série entière est donc une fonction continue sur $[-1,0]$ (comme limite uniforme de fonctions polynomiales, donc continues) ; la somme S est en perticulier continue en $x = -1$; or, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$S(x) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) dt = -\int_0^x \log(1-t)dt = F(x)\,.$$

On a donc

$$S(-1) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} F(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \Big((1-x)\log(1-x) + x\Big) = 2\log 2 - 1\,.$$

Exercice 2.

On considère la série entière

$$\left[\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n+1}\right]_{n\geq 0}$$

a. *Montrer que le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = +\infty$.*
La série entière

$$\left[\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{Z}{4}\Big)^{n}\right]_{n\geq 0}$$

est de rayon de convergence $R = +\infty$ d'après la règle de d'Alembert ; en effet

$$\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(n+2)!2^{2(n+1)}}}{\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!2^{2n}}} = -\frac{1}{4(n+1)(n+2)} \to 0$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout nombre complexe z, la série numérique

$$\left[\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{z^2}{4}\Big)^{n}\right]_{n\geq 0}$$

converge. Le rayon de convergence de la série entière

$$\left[\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n+1}\right]_{n\geq 0}$$

vaut donc bien $+\infty$.

b. *Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on note*

$$J_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n+1}.$$

Montrer que la fonction J_1 est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$t^2 J_1''(t) + tJ_1'(t) + (t^2-1)J_1(t) = 0$$

(on prendra soin de citer précisément le résultat du cours invoqué).

La fonction J_1 est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = \infty$; sa restriction à $\mathbb{R}$ est donc une fonction C^∞ dont les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme la somme de la série. On a donc

$$J_1'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\, t^{2n}$$

et

$$\begin{aligned} J_1''(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)\times(2n+1)}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\, t^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(n-1)!(n+1)!2^{2n}}\, t^{2n-1}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} t^2 J_1"(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(n-1)!(n+1)!2^{2n}}\, t^{2n+1} \\ tJ_1'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\, t^{2n+1} \\ t^2 J_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+3} \\ &= -4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!2^{2n+1}} t^{2n+1} \\ -J_1(t) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!2^{2n+1}} t^{2n+1} \end{aligned}$$

En ajoutant ces diverses expressions, on trouve bien la fonction nulle.

c. *Calculer en fonction de n la dérivée n-ème de J_1 en $t = 0$ (on distinguera les cas où n est pair et impair).*

On a la formule de Taylor

$$J_1(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_1^{(p)}(0)}{p!} t^p \,,$$

d'où, par identification,

$$J^{(2n)}(0) = 0 \,, \quad J^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!2^{2n+1}} \,.$$