Université Bordeaux 1
Département de licence
U.F.R. Mathématiques et Informatique

Mathématiques de base
Fascicule d'Annales, Année 2006-2007

Semestre d'orientation MISMI, cours MIS101

Table des matières

I Textes de Devoirs surveillés 3

II Textes des examens des deux sessions 7

III Corrigé détaillé des textes d'examen des deux sessions 15

Première partie

Textes de Devoirs surveillés

D.S.1

21 Octobre 2006 -10h30-11h50

Exercice 1 [Cours]

1) Donner la définition d'une application injective et la définition d'une application surjective.
2) On note E le sous- ensemble $\{1, 2, 3\}$ de $\mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des applications injectives f de E dans lui-même telles que $f(1) = 1$. Sont-elles bijectives ?

Exercice 2

Soient E un ensemble. Pour toute partie X de E on note $\complement_E X$ le complémentaire dans E de la partie X. Soient A, B et C des parties de E.
1) Ecrire sous la forme d'une formule avec quantificateurs les assertions suivantes :
a) La partie A est contenue dans le complémentaire dans E de la partie C.
b) Le complémentaire dans E de la partie C n'est pas contenu dans l'intersection des parties A et B.
2) a) Montrer que $\complement_E(B \cap \complement_E A) = A \cup \complement_E B$.
b) Montrer que $A \cup \complement_E B = E$ si et seulement si $B \subset A$.

Exercice 3

Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 le nombre rationnel

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{k^2 - k} + ... + \frac{1}{n^2 - n}$$

est égal à $\frac{n-1}{n}$.

Exercice 4

On considère l'application $f : x \to x^2 - 6x + 7$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
1) Déterminer l'image directe $f(A)$ par f de la partie $A = \{-2, 1, 0, 8\}$ de $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les images réciproques $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(D)$ des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$B = \{-3\} \text{ et } D = \{-3, 2\} .$$

3) a) L'application f est-elle injective ?
b) L'application f est-elle surjective ?
4) Quels sont les éléments de $\mathbb{R}$ qui possèdent un et un seul antécédent ?

Exercice 5

1) Calculer d le PGCD des nombres entiers 585 et 247.
2) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $d = 585u + 247v$
3) Quels sont les entiers relatifs qui divisent à la fois 585 et 247 ?

Université Bordeaux I – 2006/2007 **MISMI – Semestre d'orientation**
Mathématiques **Toutes séries**

D.S. 2
18 novembre 2006

<u>Barème indicatif</u> : $4+4+4+4+4$

Problème 1.
(1) Donner dans $\mathbf{R}$ les complémentaires des intervalles :
$[0,1[, \quad]1,+\infty[\quad$ et $\quad]-\infty,+\infty[$.
(2) Donner pour chacun des intervalles ci-dessus un exemple de plus petit élément, de borne inférieure et de minorant s'ils existent en justifiant vos réponses.

Problème 2.
(1) Calculer dans $\mathbf{C}$ les racines quatrièmes de $z = 2\sqrt{3} + 2i$ et les porter sur un graphique.

Problème 3.
Etudier la convergence des suites numériques (u_n), (v_n), $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ et (u_n/v_n) dans chacun des cas suivants :
(1) $u_n = 1 + 1/n$, $\quad v_n = -1/n$.
(2) $u_n = n$, $\quad v_n = (-1)^n/n$.

Problème 4.
Etudier les limites suivantes :
(1) $\lim_{x\to+\infty} \; -\frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2+1)(x+1)}$
(2) $\lim_{x\to 0} \; \frac{1+x^2}{x^3-x^4}$
(3) $\lim_{x\to+\infty} \; \sqrt{x^2+3x+1}+x$ et $\lim_{x\to-\infty} \; \sqrt{x^2+3x+1}+x$

Problème 5.
(1) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, expliciter avec des quantificateurs le fait que f soit continue en un point x_0 de $\mathbf{R}$.
(2) Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, expliciter avec des quantificateurs le fait que g soit continue en un point $y_0 = f(x_0)$ de $\mathbf{R}$.
(3) En déduire que la fonction $g \circ f$ est continue au point x_0 de $\mathbf{R}$.

Deuxième partie

Textes des examens des deux sessions

ANNÉE 2006-2007	SESSION DE JANVIER 2007
GU : MISMI	**UE** : MIS101
Date : 5/01/2007	Durée : 3h00
Documents non autorisés	

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(on convient, pour toute partie C de E, de noter $E \setminus C$ le complémentaire de C dans E).

Série de questions II

On considère dans cette série de questions l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_2$ pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$.

II.a. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit surjective de E dans F ? Montrer que l'application f donnée ici est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout nombre réel y, on a l'inégalité $y+|y| \geq 0$; montrer enfin que l'application $g\ : y \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{y+|y|}, |y|/2)$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

II.b. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit injective de E dans F ? L'application f donnée ici est-elle injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

Série de questions III

III.a. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ ainsi que les symboles mathématiques $\leq, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est un majorant de A »
– « a n'est pas un majorant de A ».

III.b. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a un majorant de A ; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ et les symboles $\leq, <, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est la borne supérieure de A »
– « a n'est pas la borne supérieure de A ».

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et n des éléments de $\mathbb{N}$. On suppose $a \geq 2$ et $n \geq 1$.

1.a. Montrer que les nombres entiers a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.

1.b. Montrer l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$; en déduire que $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ et a^n sont des nombres entiers premiers entre eux.

1.c. On considère l'équation

$$6x + 215y = 1\ ; \qquad (E)$$

– Après avoir vérifié que $215 = 6^3 - 1$, justifier (sans calcul) pourquoi il existe au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) satisfaisant (E) ;

– déterminer tous les couples d'entiers relatifs qui satisfont (E).

<u>Exercice 2.</u>

2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 - iZ + 2 = 0$.

2.b. Déduire de **2.a** les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (on donnera ces solutions sous forme polaire $z = re^{i\theta}$ en précisant les valeurs de r et θ).

2.c. Placer sur un dessin propre tous les points (a, b) du plan tels que $a + ib$ soit une solution de $z^6 - iz^3 + 2 = 0$.

<u>Exercice 3.</u>

3.a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 34 et 21.

3.b. On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

– Rappeler le principe du raisonnement par récurrence et montrer, en appliquant ce principe, que $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout n.
– Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2} ; en déduire que $\mathrm{PGCD}\,(F_{n+2}, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}\,(F_{n+1}, F_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
– Déduire de ce qui précède que deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont toujours premiers entre eux.

<u>Exercice 4.</u>

On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. Soit la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & -2 < x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

– Etudier ses limites en -2 et $+\infty$;
– Montrer que f est continue sur I ;
– Montrer que f est dérivable sur I ;
– Etudier les variations de f et tracer son graphe.

<u>Exercice 5.</u>

5.a. On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}$, transformer l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt$$

en l'intégrale sur un intervalle que l'on précisera d'une certaine fraction rationnelle.

5.b. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b uniques (que l'on calculera) telles que

$$\forall u > 1 \, , \ \frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} \, ;$$

déduire de ce résultat (combiné avec celui de **5.a**) la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt \, .$$

5.c. Exprimer à l'aide des fonctions classiques (logarithme, radicaux, exponentielle) la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{e^t + 1}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

5.d. Calculer les limites lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big)$$

et en déduire les limites de la fonction F lorsque x tend vers $-\infty$ et x tend vers $+\infty$; justifier pourquoi F réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.e. Justifier pourquoi l'application réciproque F^{-1} est dérivable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et montrer que la fonction $y = F^{-1}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{y(x)}+1}}\,,\ x \in \mathbb{R}\,; \tag{$*$}$$

cette équation différentielle $(*)$ est-elle une équation linéaire du premier ordre ?

5.f. Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{y(x)}{4}\Big)\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \tag{$**$}$$

qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ [1].

Exercice 6.

6.a. Soient A et B deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$A\,y''(t) + B\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger$}$$

Quelle inégalité doivent vérifier les paramètres réels strictement positifs A et B pour que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\dagger)$ soient toutes de la forme $t \longmapsto e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))$, où λ et ω sont des constantes strictement positives, C_1, C_2 des constantes réelles ; donner dans ce cas en fonction de A et B les valeurs des constantes λ et ω. Que se passe-t-il lorsque l'inégalité en question n'est plus satisfaite ?

6.b. On fixe maintenant $A = 10$ et $B = 2$. Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

6.c. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = \cos(2t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

qui vérifie de plus les deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

[1] Cette dernière question peut être traitée tout-à-fait indépendamment des précédentes ; pour information, l'équation différentielle $(**)$ réalise une version « approchée »de l'équation différentielle $(*)$.

ANNÉE 2006-2007 SESSION DE FEVRIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 26/02/2007, 14.00-17.00 Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f\ : x \in \mathbb{R} & \longmapsto & x^3 \in \mathbb{R} \\ g\ : z \in \mathbb{C} & \longmapsto & z^3 \in \mathbb{C} \end{array}$$

a. L'application f (considérée comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est-elle injective ? surjective ?

b. L'application g (considérée comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est-elle injective ? surjective ?

Justifier soigneusement vos réponses.

Série de questions II

II.a. Rappeler ce que signifie le fait qu'une fonction f définie dans $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$) et à valeurs réelles soit *dérivable* au point a ? Le fait que f soit *continue* au voisinage de a implique-t-il que f soit *dérivable* en a ? On justifiera la réponse, qu'elle soit positive ou négative.

II.b. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$ et f une fonction définie au voisinage de a et dérivable au point a. Calculer en fonction du nombre dérivé $f'(a)$ la limite

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} \right).$$

Série de questions III

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), on pose

$$\exp(z) := e^a(\cos b + i \sin b) = e^a \times e^{ib}.$$

Trouver tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$\exp(z) = \sqrt{e},$$

où e est le nombre réel défini par $\log e = 1$ (log désignant ici le logarithme népérien).

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. Énoncer le théorème de la division euclidienne.

1.b. Soient a, b deux entiers, tels que $a \geq b > 0$. On écrit la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$.

a. Montrer que $q \geq 1$.

b. En déduire que $a \geq b + r$, puis que $a > 2r$.

1.c. On suppose toujours que a et b sont deux entiers tels que $a \geq b > 0$. Soit $r_0 = r, r_1, \ldots, r_n = 0$ la suite des restes obtenus lors du calcul de PGCD(a, b) par l'algorithme d'Euclide. On suppose pour simplifier que $n = 2k$ est pair ; montrer (en utilisant le résultat établi en **1.b**) que

$$a > 2r_0 > 2^2 r_2 > \cdots > 2^k r_{2k-2} > 2^{k+1} r_{2k} = 0.$$

En déduire que $k < \frac{\log a}{\log 2}$, où log désigne le logarithme néperien.

Exercice 2.

2.a. Soit j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$; montrer que

$$1 + j + j^2 = 0$$

2.b. Quelles sont les valeurs possibles du reste $r(k)$ lors de la division euclidienne d'un entier $k \in \mathbb{N}$ par 3 ? Calculer suivant les différentes valeurs possibles prises par $r(k)$ les nombres j^k et $1 + j^k + j^{2k}$.

2.c. Soit $n = 3m$ un entier positif ou nul multiple de 3. Calculer en fonction de m les nombres $(1+j)^n$, $(1 + j^2)^n$, $2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$.

Exercice 3.

Exprimer la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t) \ \sin^2(t) + \sin(t) \ \cos(2t)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & \sin(kt)\,, \ k \in \mathbb{N}^* \\ & \text{ou} & \\ t & \longmapsto & \cos(mt)\,, \ m \in \mathbb{N}^*\,. \end{array}$$

Exercice 4.

Soit T un nombre réel strictement positif. Déterminer (en fonction de T) l'unique fonction

$$y_T \ :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}\,,$$

dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{array}{rcl} xy'(x) + 2y(x) & = & \dfrac{1}{x^2 + 1} \\ y_T(T) & = & 1 \end{array}$$

Exercice 5.

5.a. Exprimer en termes d'expressions usuelles, pour $x \in]-1, +\infty[$, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}\,.$$

5.b. La fonction $x \in]-1, +\infty[\longmapsto F(x)$ est-elle dérivable sur $]-1, +\infty[$? Si oui, quelle est sa fonction dérivée ?

5.c. Calculez les limites de la fonction F respectivement en -1 (à droite) et $+\infty$. Montrer que $F(]-1, +\infty[)$ est un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ (que l'on précisera) et que la fonction $F \ : I \longrightarrow J$ admet une fonction réciproque $G \ : J \longrightarrow I$.

5.d. Calculer $G(y)$ en fonction de y. Montrer que G est dérivable en tout point y de J et calculer $G'(y)$ pour $y \in J$.

Exercice 6.

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \exp(-1/t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

6.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $t = 0$.

6.b. Montrer que f est dérivable en $t = 0$ et calculer $f'(0)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et tracer sommairement le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6.c. On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur I si f est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' = f^{(1)}$, avec f' dérivable sur I et de fonction dérivée $f'' = f^{(2)}$, f'' dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$ dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(n+1)}$, *etc.*

Après avoir rappelé le principe du raisonnement par récurrence, montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction dérivée à l'ordre n (notée $f^{(n)}$) est de la forme

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n - 1$. Préciser la relation de récurrence permettant d'exprimer le polynôme P_{n+1} à partir du polynôme P_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

Troisième partie

Corrigé détaillé des textes d'examen des deux sessions

ANNÉE 2006-2007 SESSION DE JANVIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 5/01/2007 Durée : 3h00

Texte (*en italiques*) et corrigé détaillé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I (14 pts)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(on convient, pour toute partie C de E, de noter $E \setminus C$ le complémentaire de C dans E).

Dire qu'un élément x de E n'est pas dans $A \cap B$ équivaut à dire que soit il n'est pas dans A, soit il n'est pas dans B. On a en effet la tautologie $\mathrm{non}[P \wedge Q] = (\mathrm{non}\, P) \vee (\mathrm{non}\, Q)$ (cours). On a donc bien l'égalité ensembliste

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)\,.$$

Série de questions II (31 pts)

On considère dans cette série de questions l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_2$ pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$.

II.a (6+4+3=6) *Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit surjective de E dans F ? Montrer que l'application f donnée ici est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout nombre réel y, on a l'inégalité $y + |y| \geq 0$; montrer enfin que l'application $g\ : y \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{y + |y|}, |y|/2)$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.*

Une application $f\ : E \longmapsto F$ est surjective si et seulement si

$$\forall Y \in F\,,\ \exists X \in E\,,\ Y = f(X)\,.$$

On remarque ici que si $y \in \mathbb{R}$,

$$f((0, -y/2)) = 0 - 2(-y/2) = y\,,$$

ce qui prouve bien que le couple $(0, -y/2)$ est un antécédent pour y ; l'application f est donc surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On a par définition $|y| = \sup(y, -y)$, en particulier donc $|y| \geq -y$, soit $|y| + y \geq 0$ pour tout nombre réel y.

L'application g est bien définie sur $\mathbb{R}$ à cause de ce qui précède et on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = (\sqrt{|y| + y})^2 - 2|y|/2 = y + |y| - |y| = y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y)\,.$$

II.b (6+6) *Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit injective de E dans F ? L'application f donnée ici est-elle injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?*

Une application $f\ : E \longmapsto F$ est injective si et seulement si

$$\forall X_1, X_2 \in E\,,\ f(X_1) = f(X_2) \Longrightarrow X_1 = X_2\,.$$

Ici $f((x, y)) = f((-x, y)) = x^2 - 2y$ pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$; comme $(x, y) \neq (-x, y)$ dès que $x \neq 0$, l'application f n'est pas injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Série de questions III (25 pts)

III.a (7+6) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ ainsi que les symboles mathématiques $\leq, >, \in$, exprimer les deux assertions :*
– « a est un majorant de A »
– « a n'est pas un majorant de A ».

Dire que a est un majorant de A s'écrit

$$\forall x \in A\,,\ x \leq a\,.$$

La négation de cette assertion (« a n'est pas un majorant de A ») s'écrit

$$\exists x \in A \,\text{tel que } x > a\,.$$

III.b (7+5) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a un majorant de A ; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ et les symboles $\leq, <, >, \in$, exprimer les deux assertions :*
– « a est la borne supérieure de A »
– « a n'est pas la borne supérieure de A ».

Dire que a est la borne supérieure de A (lorsque a est supposé être un majorant) s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0\, \exists x \in A \text{ tel que } \ a - \epsilon < x \leq a\,.$$

La négation de cette assertion (« a n'est pas la borne supérieure de A ») s'écrit donc

$$\exists \epsilon > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ x \leq a - \epsilon$$

(a est ici supposé être un majorant de A, ce qui fait que les propriétés $x > a$ et $x \in A$ sont incompatibles).

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1 (21 pts)

Soient a et n des éléments de $\mathbb{N}$. On suppose $a \geq 2$ et $n \geq 1$.

1.a (6) *Montrer que les nombres entiers a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.*

Si d est un entier divisant a et $a^n - 1$, d divise a^n (car d divise a) et $a^n - 1$, donc d divise $a^n - (a^n - 1) = 1$. Or les seuls diviseurs de 1 dans $\mathbb{Z}$ sont ± 1, donc $d = 1$ si $d > 0$. Le PGCD de a et $a^n - 1$ vaut donc 1, ce qui prouve que a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.

1.b (6) *Montrer l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$; en déduire que $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ et a^n sont des nombres entiers premiers entre eux.*

On a, en développant :

$$\begin{aligned}(a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) &= a + a^2 + \cdots + a^n - (1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\ &= a^n - 1\,.\end{aligned}$$

Si $d \in \mathbb{N}^*$ divise a et $1 + a + \cdots + a^{n-1}$, d divise a et $a^n - 1$ (puisque $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ divise $a^n - 1$). Comme a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux, $d = 1$. Le PGCD de a et $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ vaut donc 1 et ces deux nombres sont bien premiers entre eux.

1.c (3 + 6) *On considère l'équation*

$$6x + 215y = 1 \ ; \qquad (E)$$

- *Après avoir vérifié que $215 = 6^3 - 1$, justifier (sans calcul) pourquoi il existe au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) satisfaisant (E) ;*
- *déterminer tous les couples d'entiers relatifs qui satisfont (E).*

La formule $215 = 6^3 - 1$ est immédiate car $6^3 = 216$. Si l'on pose donc $a = 6$, on sait d'après le **1.a** que $a^3 - 1 = 215$ et $a = 6$ sont premiers entre eux ; il existe donc, d'après l'identité de Bézout, un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que $6x_0 + 215y_0 = 1$. On remarque d'ailleurs immédiatement que $(x_0, y_0) = (36, -1)$ convient. D'après le cours (et le lemme de Gauss), toutes les solutions de l'équation (E) sont les couples d'entiers (x, y) de la forme

$$(36 + 215k, -1 - 6k)\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

<u>Exercice 2 (18 pts).</u>

2.a. (6) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation du second degré* $Z^2 - iZ + 2 = 0$.

On a

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 2 = -9 = (\pm 3i)^2\,.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i - 3i}{2} = -i = e^{-i\pi/2} \\ z_2 &= \frac{i + 3i}{2} = 2i = 2e^{i\pi/2}\,. \end{aligned}$$

2.b (6) *Déduire de* **2.a** *les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ *(on donnera ces solutions sous forme polaire* $z = re^{i\theta}$ *en précisant les valeurs de* r *et* θ*).*

On remarque que

$$(z^6 - iz^3 + 2 = 0) \Longleftrightarrow \Big[(Z = z^3) \wedge (Z^2 - iZ + 2 = 0)\Big]\,.$$

Les racines de $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ s'obtiennent donc en résolvant les équations

$$z^3 = -i = e^{-i\pi/2} \qquad (1)$$

et

$$z^3 = 2i = 2e^{i\pi/2} \qquad (2)\,.$$

Les racines de l'équation (1) ont pour module $r = 1$ et pour arguments

$$-\pi/6\,,\ -\pi/6 + 2\pi/3 = \pi/2,\ -\pi/6 + 4\pi/3 = 7\pi/6\,.$$

Ce sont les trois nombres complexes $e^{-i\pi/6}, i, e^{7i\pi/6}$. Les racines de l'équation (2) ont pour module $r = 2^{1/3}$ et pour arguments

$$\pi/6\,,\ \pi/6 + 2\pi/3 = 5\pi/6,\ \pi/6 + 4\pi/3 = 3\pi/2\,.$$

Ce sont les trois nombres complexes $2^{1/3}e^{i\pi/6}, 2^{1/3}e^{5i\pi/6}, -2^{1/3}i$.

2.c (6) *Placer sur un dessin propre tous les points* (a, b) *du plan tels que* $a + ib$ *soit une solution de* $z^6 - iz^3 + 2 = 0$.

On se reporte à la figure ci-dessous, où les trois racines de $z^3 = -i$ ont été marquées par des ronds, les trois racines de $z^3 = 2i$ par des croix.

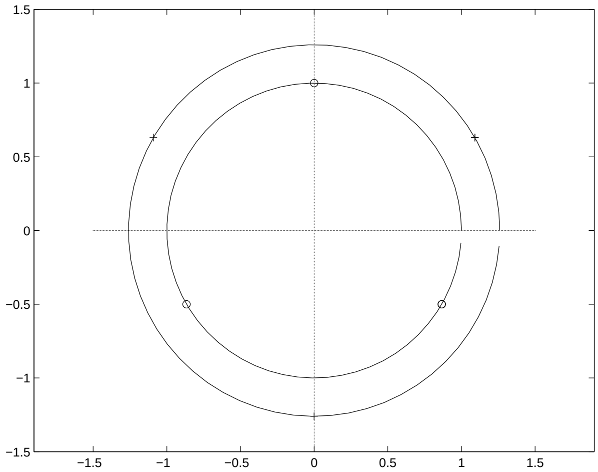

FIG. 1 – Les 6 racines de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$

Exercice 3 (24 pts)

3.a (6) *En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 34 et 21.*

On a

$$\begin{aligned} 34 &= 21 \times 1 + 13 \\ 21 &= 13 \times 1 + 8 \\ 13 &= 8 \times 1 + 5 \\ 8 &= 5 \times 1 + 3 \\ 5 &= 3 \times 1 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0\,. \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul dans cette suite de divisions euclidiennes vaut 1, donc PGCD(34,21)=1.

3.b (5 + 6 + 4) *On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

- *Rappeler le principe du raisonnement par récurrence et montrer, en appliquant ce principe, que $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout n.*
- *Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2} ; en déduire que* $\mathrm{PGCD}\,(F_{n+2}, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}\,(F_{n+1}, F_n)$ *pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*
- *Déduire de ce qui précède que deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont toujours premiers entre eux.*

Le principe (ici le second principe en fait) du raisonnement par récurrence est le suivant : supposons que l'on veuille démontrer qu'une assertion (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$. On commence à vérifier que (P_{n_0}) est vraie, puis l'on démontre :

$$\Big((P_k) \text{ vraie pour } k = n_0, ..., n\Big) \Longrightarrow \Big((P_{n+1}) \text{ est vraie}\Big)\,.$$

Alors (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.
Ici, on doit montrer par récurrence la propriété $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 0$ ((P_n) vraie dans notre cas se lit « $F_n \in \mathbb{N}$ »). En fait, on sait que $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, donc la propriété (P_n) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. D'autre part, pour $n \geq 1$, on a (d'après la relation de récurrence écrite avec $n-1$ à la place de n)

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \,.$$

Si $F_k \in \mathbb{N}$ pour $k = 0, 1, ..., n$, alors F_n et F_{n-1} sont des entiers positifs, donc F_{n+1} aussi (comme somme de deux entiers positifs) et la propriété est donc bien vérifiée au cran $n+1$. L'assertion « $F_n \in \mathbb{N}$ »est donc bien ainsi démontrée par récurrence.

Si d divise F_n et F_{n+1}, d divise leur somme, soit F_{n+2}, donc divise aussi F_{n+1} et F_{n+2}. Si d divise F_{n+1} et F_{n+2}, d divise leur différence, soit $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2}. Les ensembles des diviseurs communs de F_n et F_{n+1} et de F_{n+1} et F_{n+2} sont donc les mêmes. Ces deux ensembles ont donc même plus grand élément, ce qui implique $\mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}(F_{n+1}, F_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence sur n, on voit que, pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = 1$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$ (car 1 et 2 sont premiers entre eux). Si elle est vraie au cran n (F_n et F_{n+1} premiers entre eux), elle l'est au cran $n+1$ car

$$\mathrm{PGCD}(F_{n+1}, F_{n+2}) = \mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = 1 \,.$$

Donc la propriété « F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux »est vraie pour tout entier $n \geq 0$. Deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont donc toujours premiers entre eux.

<u>Exercice 4 (22 pts)</u>

On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. Soit la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & -2 < x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

- **(4)** *Etudier ses limites en -2 et $+\infty$;*
- **(6)** *Montrer que f est continue sur I;*
- **(6)** *Montrer que f est dérivable sur I;*
- **(6)** *Etudier les variations de f et tracer son graphe.*

On a $\lim\limits_{X\to 0, X>0} \log X = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to -2, x>-2} \log(x+2) = -\infty \,.$$

La limite de f lorsque x tend vers -2 (par valeurs supérieures bien sûr) vaut donc $-\infty$. Pour x tendant vers $+\infty$, on a $f(x) = e^x$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \,.$$

La fonction f est continue sur $]-2, -1[$ (comme composée de deux fonctions continues puisque log est continue sur $]0, +\infty[$), sur $[-1, 0]$ (car $x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$) et sur $]0, +\infty[$ (car exp est continue sur $\mathbb{R}$). Pour montrer la continuité de f, il faut vérifier la continuité aux points -1 et 0, en fait uniquement la continuité à gauche en -1 et à droite en 0. Or

$$\lim_{x\to -1, x<-1} f(x) = \lim_{x\to -1, x<-1} \log(x+2) = \log 1 = 0 = f(-1)$$

car log est continue en 1. De même

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

car exp est continue en 0. La fonction f est donc bien continue en $x = -1$ et $x = 0$; comme elle était continue en tout autre point de $]-2, +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle.

La fonction f est dérivable sur $]-2, -1[$ (comme composée de deux fonctions dérivable puisque log est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $X \longmapsto 1/X$), sur $]-1, 0[$ (car $x \longmapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto 1$) et sur $]0, +\infty[$ (car exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée exp). Pour montrer la dérivabilité de f, il faut vérifier la dérivabilité aux points -1 et 0, en fait uniquement dérivabilité gauche en -1 et à droite en 0 et le fait que $f'_g(-1) = f'_d(0) = 1$. Or

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1, x<-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1, x<-1} \frac{\log(x+2)-\log 1}{x+1} \\ &= (\log(x+2))'(-1) = \left[\frac{1}{x+2}\right]_{x=-1} = 1 = f'_d(-1)\end{aligned}$$

car log est dérivable en 1, de nombre dérivé 1. De même

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

car exp est dérivable en 0, de nombre dérivé 1. La fonction f est donc bien dérivable en $x = -1$ et $x = 0$ (car il y a « raccord »des dérivées à gauche et à droite en ces deux points) ; comme elle était dérivable en tout autre point de $]-2, +\infty[$, elle est dérivable sur cet intervalle.

La fonction f a une dérivée positive (strictement) en tout point de $]2, +\infty[$, car

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

pour $x \in]-2, -1[$, $f'(x) = 1$ sur $[-1, 0]$, $f'(x) = e^x$ sur $]0, +\infty[$. Le graphe de la fonction f est tangent à la droite $y = x + 1$ aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$, se confond avec cette droite au dessus de $[-1, 0]$, présente une asymptote verticale en $x = -2$ et une branche parabolique (regardant vers l'axe des $y > 0$) du type « exponentielle »lorsque x tend vers $+\infty$ (voir la figure ci-dessous).

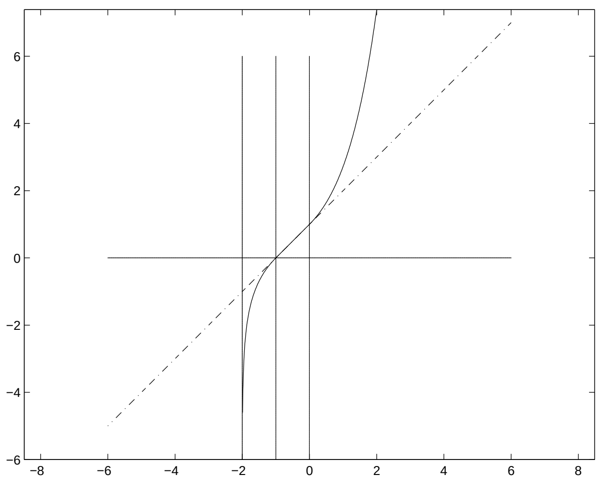

FIG. 2 – Le graphe de f, sa tangente en $(-1, 0)$ et $(0, 1)$, l'asymptote en $t = -2$

Exercice 5 (50 pts)

5.a (5) *On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t+1}$, transformer l'intégrale*

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t+1}\, dt$$

en l'intégrale sur un intervalle que l'on précisera d'une certaine fraction rationnelle.

On suit le changement de variables proposé et on applique la formule de changement de variable. On a $e^t + 1 = u^2$, donc $e^t dt = 2udu$, ou encore $(u^2-1)dt = 2udu$. Si $t = \log 3$, $u = \sqrt{4} = 2$, tandis que si $t = \log 8$, $u = \sqrt{9} = 3$. Une fois le changement des bornes effectué (il ne faut pas l'oublier !), on trouve

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t+1}\, dt = \int_2^3 u \times \frac{2udu}{u^2-1} = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1}\, du\,.$$

C'est la forme voulue car

$$X \longmapsto F(X) := \frac{2X^2}{X^2-1}$$

est bien une fraction rationnelle.

5.b (5+5) *Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b uniques (que l'on calculera) telles que*

$$\forall u > 1\,,\ \frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}\,;$$

déduire de ce résultat (combiné avec celui de **5.a***) la valeur numérique de l'intégrale*

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t+1}\, dt\,.$$

On cherche a et b par simple identification :

$$\frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1}\,.$$

Il convient donc de prendre $a+b=0$ et $a-b=1$, soit $a=1/2$ et $b=-1/2$. Comme il s'agit d'un système de Cramer (deux équations, deux inconnues, avec déterminant non nul), la solution (a,b) ainsi trouvée est unique et on a :

$$\frac{2u^2}{u^2-1} = 2 + \frac{2}{u^2-1} = 2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,.$$

En intégrant entre 2 et 3, il vient

$$\int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1} = 2 + \log 2 - \log 1 - (\log 4 - \log 3) = 2 + \log 3 - \log 2 = 2 + \log(3/2)$$

(une primitive de $u \longmapsto (u\pm 1)^{-1}$ étant $\log|u\pm 1| = \log(u\pm 1)$ sur $]1,+\infty[$).

5.c (5) *Exprimer à l'aide des fonctions classiques (logarithme, radicaux, exponentielle) la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{e^t+1}$$

qui vérifie $F(0)=0$.

Cette primitive F s'éxprime sous la forme

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \sqrt{e^t+1}\,dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du \\
&= 2(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{2}) + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u-1} - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u+1} \\
&= 2(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{2}) + \log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}
\end{aligned}$$

(le calcul a été fait ici en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{e^t+1}$, les nouvelles bornes devenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{e^x+1}$ lorsque t vaut respectivement 0 et x). On s'est inspiré du calcul conduit dans la question **5.b**.

5.d (3+3+3+4) *Calculer les limites lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction*

$$x\in\mathbb{R}\longmapsto \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big)$$

et en déduire les limites de la fonction F lorsque x tend vers $-\infty$ et x tend vers $+\infty$; justifier pourquoi F réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a, de par les opérations sur les limites (composition, quotient) et le fait que $\lim_{-\infty} e^x = 0$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = \frac{0}{2} = 0\,;$$

par conséquent, puisque $\log X$ tend vers $-\infty$ lorsque X tend vers 0 par valeurs positives,

$$\lim_{x\to-\infty}\log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big) = -\infty\,.$$

Si x tend vers $+\infty$, on peut écrire (en divisant numérateur et dénominateur par $e^{x/2}$)

$$\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = \frac{\sqrt{1+e^{-x}}-e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}}+e^{-x/2}}\,,$$

et, en utilisant les opérations sur les limites (composition, quotient) et le fait que $\lim_{+\infty} e^{-x} = \lim_{+\infty} e^{-x/2} = 0$, on voit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = 1\,.$$

Comme log est continue (et nulle) en $X=1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big) = 0\,.$$

La fonction F est strictement croissante (car de dérivée $x\longmapsto\sqrt{e^x+1}$) et est égale à

$$F(x) = 2\sqrt{e^x+1} + \log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C\,,$$

où C est une certaine constante (voir le **5.c**). On a donc

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 2 + (-\infty) + C = -\infty$$

d'après les théorèmes sur les limites. Mais on a aussi

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty + 0 + C = +\infty$$

car $\lim_{+\infty} \sqrt{e^x+1} = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, F est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car elle peut prendre des valeurs arbitrairement petites et arbitrairement grandes puisqu'elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$). D'autre part, comme F est strictement croissante (car sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$), elle est injective. F réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.e (4+5+2) *Justifier pourquoi l'application réciproque F^{-1} est dérivable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et montrer que la fonction $y = F^{-1}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre :*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{y(x)}+1}}\,,\ x \in \mathbb{R}\,; \qquad (*)$$

cette équation différentielle $(*)$ est-elle une équation linéaire du premier ordre ?

L'application F est dérivable, strictement monotone, et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, l'application réciproque F^{-1} est dérivable et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{e^{F^{-1}(x)}+1}}\,,$$

ce qui montre que $y = F^{-1}$ est bien solution de l'équation différentielle $(*)$. Cette équation est bien du premier ordre (elle ne fait apparaître que la première dérivée), mais elle n'est pas linéaire (car le second membre n'est pas de la forme $a(x)y(x) + b(x)$).

5.f (6) *Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{y(x)}{4}\Big)\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad (**)$$

qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ [2].

L'équation (**) est une équation linéaire du premier ordre, de la forme $y' = a(x)y + b(x)$. La solution générale de l'équation homogène

$$y'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}y(x)$$

est

$$y(x) = C\exp(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x)\,,$$

où C est une constante arbitraire. En faisant varier cette constante pour chercher une solution particulière sous la forme

$$y(x) = C(x)\exp\Big(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x\Big)\,,$$

on trouve que y sera solution de l'équation $(**)$ dès que

$$C'(x)\exp(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

On trouve que le choix de

$$C(x) = 4\exp\Big(\frac{x}{4\sqrt{2}}\Big)$$

[2] Cette dernière question peut être traitée tout-à-fait indépendamment des précédentes ; pour information, l'équation différentielle $(**)$ réalise une version « approchée »de l'équation différentielle $(*)$.

convient, donc que $y(x) \equiv 4$ est une solution particulière de $(**)$. La solution générale de $(**)$ est donc

$$y(x) = C \exp\Big(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x\Big) + 4$$

et, pour que la fonction y soit nulle en 0, il faut choisir la constante $C = -4$. La solution y cherchée est donc

$$y(x) = 4\Big(1 - \exp\Big(-\frac{x}{4\sqrt{2}}\Big)\Big)\,.$$

Exercice 6.

6.a (5+5+5) *Soient A et B deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle homogène du second ordre :*

$$A\,y''(t) + B\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger)$$

Quelle inégalité doivent vérifier les paramètres réels strictement positifs A et B pour que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\dagger)$ soient toutes de la forme $t \longmapsto e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))$, où λ et ω sont des constantes strictement positives, C_1, C_2 des constantes réelles ; donner dans ce cas en fonction de A et B les valeurs des constantes λ et ω. Que se passe-t-il lorsque l'inégalité en question n'est plus satisfaite ?

La condition pour que les solutions de $(\dagger)$ soient de la forme

$$y(t) = e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes, est que l'équation caractéristique

$$AX^2 + BX + 1 = 0$$

ait deux racines complexes conjuguées distinctes, ce qui est réalisé si et seulement si

$$\Delta = B^2 - 4A < 0\,.$$

Dans ce cas, les solutions sont de la forme voulue si l'on pose

$$\lambda = \frac{B}{2A}\,,\ \omega = \frac{\sqrt{4A - B^2}}{2A}\,.$$

Si l'on a $\Delta > 0$, les solutions sont de la forme

$$y(t) = C_1\exp(r_1 t) + C_2\exp(r_2 t)\,,$$

où r_1 et r_2 sont les racines réelles (et toutes les deux strictement négatives) de $AX^2 + BX + 1 = 0$; lorsque t tend vers $+\infty$, il y a extinction (sans oscillations) de toutes les solutions. Si $\Delta = 0$, le même phénomène se produit car les solutions sont dans ce cas de la forme

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-Bt/2A}$$

et s'évanouissent lorsque t tend vers l'infini sans osciller.

6.b (5) *On fixe maintenant $A = 10$ et $B = 2$. Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du second ordre*

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

On applique ce qui précède et l'on trouve $\Delta = -36$, donc

$$\lambda = \frac{1}{10}\,,\ \omega = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\,.$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont

$$y(t) = e^{-t/10}(C_1 \cos(3t/10) + C_2 \sin(3t/10))\,,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

6.c (5) *Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre*

$$10\, y''(t) + 2\, y'(t) + y(t) = \cos(2t)\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,,$$

qui vérifie de plus les deux conditions initiales $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

Si D désigne l'opérateur de dérivation, on a

$$[10D^2 + 2D + \mathrm{Id}](e^{2it}) = (-40 + 4i + 1)e^{2it}.$$

Une solution particulière de l'équation (avec second membre cette fois) est donc

$$y_0(t) = \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{2it}}{4i - 39}\Big) = \frac{1}{1537}(-39\cos(2t) + 4\sin(2t))\,.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est

$$y(t) = e^{-t/10}(C_1 \cos(3t/10) + C_2 \sin(3t/10)) + \frac{4\sin(2t) - 39\cos(2t)}{1537}\,.$$

On doit ajuster les constantes C_1 C_2 pour que

$$C_1 - \frac{39}{1537} = y(0) = 0$$

et

$$-C_1/10 + 3C_2/10 + \frac{8}{1537} = y'(0) = 1\,,$$

ce qui donne des valeurs numériques explicites pour les constantes C_1 et C_2.

ANNÉE 2006-2007 SESSION DE FEVRIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 26/02/2007, 14.00-17.00 Durée : 3h00

Texte (*en italiques*) et corrigé détaillé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f\ : x \in \mathbb{R} & \longmapsto & x^3 \in \mathbb{R} \\ g\ : z \in \mathbb{C} & \longmapsto & z^3 \in \mathbb{C} \end{array}$$

a. L'application f (considérée comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est-elle injective ? surjective ?

b. L'application g (considérée comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est-elle injective ? surjective ?

Justifier soigneusement vos réponses.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1^3 = x_2^3$, on a $x_1 = x_2$ puisque $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ si l'un des deux nombres x_j est non nul. La fonction f est donc injective (tout nombre réel a au plus un antécédent). Comme $y \in \mathbb{R}$ a pour antécédent $\mathrm{sign}\,(y) \times |y|^{1/3}$, f est surjective.
Si Z est un nombre complexe non nul, l'équation $z^3 = Z$ admet trois racines distinctes ; donc g n'est pas injective (un nombre complexe non nul a trois antécédents distincts). Comme $Z = 0$ a pour antécédent 0, tout nombre complexe a au moins un antécédent et g est donc surjective.

Série de questions II

II.a. *Rappeler ce que signifie le fait qu'une fonction f définie dans $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$) et à valeurs réelles soit dérivable au point a ? Le fait que f soit continue au voisinage de a implique-t-il que f soit dérivable en a ? On justifiera la réponse, qu'elle soit positive ou négative.*

Dire qu'une fonction f définie dans $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ est dérivable en a équivaut à dire qu'il existe un nombre $l := f'(a)$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}$ assez petit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. On a en particulier $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Une fonction dérivable en a est donc continue en ce point, mais l'inverse est faux : par exemple $x \longmapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 (il y a un nombre dérivé à gauche valant -1, un nombre dérivé à droite valant $+1$).

II.b. *Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$ et f une fonction définie au voisinage de a et dérivable au point a. Calculer en fonction du nombre dérivé $f'(a)$ la limite*

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)-f(a)}{\sin x - \sin a}\Big).$$

On écrit

$$\frac{f(x)-f(a)}{\sin x - \sin a} = \frac{f(x)-f(a)}{\sin x - \sin a} \times \frac{x-a}{\sin x - \sin a}.$$

Comme f est dérivable en a, on a

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big) = f'(a).$$

Comme la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée cos, elle est dérivable en a, avec comme nombre dérivé $\cos a$ et on a

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x - \sin a}{x-a}\right) = \cos a \neq 0\,.$$

Par les règles sur les quotients de limites, on a donc

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{\sin x - \sin a}\right) = f'(a)\times\frac{1}{\cos a} = \frac{f'(a)}{\cos a}\,.$$

Série de questions III

Si $z = a+ib$ est un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), on pose

$$\exp(z) := e^a(\cos b + i\sin b) = e^a \times e^{ib}\,.$$

Trouver tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$\exp(z) = \sqrt{e}\,,$$

où e est le nombre réel défini par $\log e = 1$ ($\log$ désignant ici le logarithme népérien).

On cherche z sous la forme $a+ib$. Comme le module de e^z est e^a, l'égalité $e^z = \sqrt{e} = e^{1/2}$ implique $e^a = e^{1/2}$, donc $a = 1/2$ car $\exp\ : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ est injective. L'argument b est tel que $e^{ib} = 1$, soit $b = 2k\pi$. Les solutions de l'équation $e^z = \sqrt{e}$ sont donc tous les nombres

$$\frac{1}{2} + 2ik\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. *Énoncer le théorème de la division euclidienne.*

Si a et b sont deux entiers relatifs avec $b > 0$, il existe un unique couple d'entiers (q, r) avec $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Le nombre q est dit *quotient* dans la division euclidienne de a par b, tandis que r est appelé *reste* dans cette même division euclidienne.

1.b. *Soient a, b deux entiers, tels que $a \geq b > 0$. On écrit la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$.*

a. *Montrer que $q \geq 1$.*

b. *En déduire que $a \geq b + r$, puis que $a > 2r$.*

Si $q \leq 0$, on aurait $a \leq r$, ce qui est impossible car $a \geq b$ et $r < b$. Donc $q \geq 1$. On a donc, puisque $b > 0$,

$$a \geq bq + r \geq b + r > 2r$$

puisque $r < b$.

1.c. *On suppose toujours que a et b sont deux entiers tels que $a \geq b > 0$. Soit $r_0 = r, r_1, \ldots, r_n = 0$ la suite des restes obtenus lors du calcul de $\mathrm{PGCD}(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide. On suppose pour simplifier que $n = 2k$ est pair ; montrer (en utilisant le résultat établi en* **1.b***) que*

$$a > 2r_0 > 2^2 r_2 > \cdots > 2^k r_{2k-2} > 2^{k+1} r_{2k} = 0.$$

En déduire que $k < \frac{\log a}{\log 2}$, où $\log$ désigne le logarithme néperien.

En divisant a par b, on trouve $a = bq + r_0$ et $a > 2r_0$ d'après le **1.b**. Si $r_0 = 0$, on a les résultats voulus. Si $r_0 > 0$, en divisant b par r_0, on trouve $b = r_0 q_1 + r_1$ avec $b > 2r_1$, puis en divisant r_0 par r_1 (si

$r_1 > 0$, ce que l'on suppose puisque l'on suppose que le dernier reste non nul correspond à un indice impair), il vient $r_0 = r_1 q_2 + r_2$ avec $r_0 > 2r_2$, ce qui donne finalement

$$a > 2r_0 > 2(2r_2) = 4r_2 \, .$$

Si $r_2 = 0$, on s'arrête et on a les résultats voulus. Sinon, on continue jusqu'à trouver r_4. Finalement, on a bien

$$a > 2r_0 > 4r_2 > 8r_4 > \cdots > 2^k r_{2(k-1)} > 2^{k+1} r_{2k} = 0$$

si r_{2k+1} est le dernier reste non nul (donc le PGCD de a et b). Comme $r_{2(k-1)} \geq 1$, on a $a > 2^k$, soit, en prenant les logarithmes népériens,

$$k \log 2 < \log a \, ,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

<u>Exercice 2.</u>

2.a. *Soit j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$; montrer que*

$$1 + j + j^2 = 0$$

Ce nombre est différent de 1 et solution de $X^3 - 1 = (X-1)(1+X+X^2) = 0$. On a donc $1+j+j^2 = 0$ (on pouvait aussi faire le calcul et vérifier ce résultat).

2.b. *Quelles sont les valeurs possibles du reste $r(k)$ lors de la division euclidienne d'un entier $k \in \mathbb{N}$ par 3 ? Calculer suivant les différentes valeurs possibles prises par $r(k)$ les nombres j^k et $1 + j^k + j^{2k}$.*

Les valeurs possibles du reste sont $r(k) = 0, 1, 2$. On a $j^k = j^{3q+r(k)} = j^{r(k)}$ car $j^3 = 1$. Le nombre j^k vaut 1 si $r(k) = 0$, j si $r(k) = 1$ et j^2 si $r(k) = 2$. Le nombre $1 + j^k + j^{2k}$ vaut 3 si $r(k) = 0$ et $0 = 1 + j + j^2 = 1 + j^2 + j^4$ si $r(k) = 1$ ou $r(k) = 2$.

2.c. *Soit $n = 3m$ un entier positif ou nul multiple de 3. Calculer en fonction de m les nombres $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$, $2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.*

On a

$$\begin{aligned} (1+j)^{3m} &= (-j^2)^{3m} = (-1)^m \\ (1+j^2)^{3m} &= (-j)^{3m} = (-1)^m \\ 2^{3m} + (1+j)^{3m} + (1+j^2)^{3m} &= 8^m + 2(-1)^m \end{aligned}$$

puisque $1 + j + j^2 = 0$ (voir le **2.a**) et $j^3 = j^6 = 1$.

<u>Exercice 3.</u>

Exprimer la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t)\,\sin^2(t) + \sin(t)\,\cos(2t)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions

$$\begin{array}{ccl} t & \longmapsto & \sin(kt)\,,\ k \in \mathbb{N}^* \\ & \text{ou} & \\ t & \longmapsto & \cos(mt)\,,\ m \in \mathbb{N}^* \, . \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t - \cos^3 t + \sin t(1 - 2\sin^2 t) = \cos t + \sin t - \cos^3 t - 2\sin^3 t \\ &= \cos t + \sin t - \frac{\cos 3t}{4} - \frac{3\cos t}{4} - 2\Big(\frac{3\sin t}{4} - \frac{\sin 3t}{4}\Big) \\ &= \frac{\cos t}{4} - \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos 3t}{4} + \frac{\sin 3t}{2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit T un nombre réel strictement positif. Déterminer (en fonction de T) l'unique fonction

$$y_T \ :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}\,,$$

dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} xy'(x) + 2y(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ y_T(T) &= 1 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène

$$xy'(x) + 2y(x) = 0\,,\ x \in]0, +\infty[$$

est solution de

$$y'(x)/y(x) = -2/x\,,$$

soit

$$\log|y(x)| = -2\log|x| + \text{constante}\,,$$

ce qui équivaut à

$$y(x) = \frac{C}{x^2}\,,$$

C désignant une constante arbitraire. La méthode de variation des constantes donne, pour la recherche d'une solution particulière du type $x \longmapsto C(x)/x^2$,

$$x\frac{C'(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2+1}\,,\ x \in]0, +\infty[\,,$$

soit

$$C'(x) = \frac{x}{x^2+1}\,,$$

qui s'intègre en

$$C(x) = \log\sqrt{x^2+1} + K\,,$$

où K est une constante arbitraire. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(x) = \frac{K}{x^2} + \frac{\log\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,,$$

où K est une constante arbitraire. Pour avoir $y(T) = 1$, on doit choisir la constante K ainsi :

$$K = T^2 - \log\sqrt{T^2+1}\,.$$

Exercice 5.

5.a. *Exprimer en termes d'expressions usuelles, pour* $x \in]-1, +\infty[$, *l'intégrale*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}.$$

On remarque que

$$(t^2 + 3t + 2) = (t+1)(t+2)$$

et que l'on peut par conséquent écrire

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2},$$

où a et b sont des constantes à déterminer. Par simple identification, on trouve

$$b(t+1) + a(t+2) \equiv 1,$$

soit $a = -b$ et $2a + b = 1$, ce qui nous donne $a = 1$ et $b = -1$. On a donc, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} &= \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \int_0^x \frac{dt}{t+2} \\ &= \log(x+1) - (\log(x+2) - \log 2) = \log\left[\frac{2(x+1)}{x+2}\right]. \end{aligned}$$

5.b. *La fonction* $x \in]-1, +\infty[\longmapsto F(x)$ *est-elle dérivable sur* $]-1, +\infty[$ *? Si oui, quelle est sa fonction dérivée ?*

La fonction F est, d'après le cours, une primitive de la fonction continue

$$x \in]-1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Elle est donc dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée précisément cette fonction

$$f\ : x \in]-1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

5.c. *Calculez les limites de la fonction* F *respectivement en* -1 *(à droite) et* $+\infty$. *Montrer que* $F(]-1, +\infty[)$ *est un intervalle ouvert* J *de* $\mathbb{R}$ *(que l'on précisera) et que la fonction* $F\ : I \longrightarrow J$ *admet une fonction réciproque* $G\ : J \longrightarrow I$.

Comme

$$F(x) = \log\left[\frac{2(x+1)}{x+2}\right] \qquad \forall x \in]-1, +\infty[,$$

on a

$$\lim_{x \to -1^+} F(x) = \lim_{x \to -1^+} \log(x+1) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\log 2 + \log \frac{1 + 1/x}{1 + 2/x}\right) = \log 2.$$

Comme la fonction F a pour dérivée sur $]-1, +\infty[$ la fonction strictement positive (sur cet intervalle) f, la fonction F est une application strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. L'image de F est donc incluse dans l'intervalle $]-\infty, \log 2[$ puisque F est croissante et que $\log 2$ est la limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Comme F tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1, F peut prendre des valeurs arbitrairement petites ; comme F tend vers $\log 2$ lrsque x tend vers $+\infty$, F peit prendre sur $]-1,+\infty[$ des valeurs arbitrairement proches de $\log 2$. Comme de plus, F est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que <u>toutes</u> les valeurs entre $-\infty$ et $\log 2$ (exclu) sont attteintes sur $]-1,+\infty[$. L'image par F de l'intervalle $]-1,+\infty[$ est donc l'intervalle $J=]-\infty,\log 2[$ et F est bijective (injective car strictement croissante, surjective comme on vient de le voir) de I dans J. La fonction F admet donc une fonction réciproque $G\ :J\longrightarrow I$.

5.d. Calculer $G(y)$ en fonction de y. Montrer que G est dérivable en tout point y de J et calculer $G'(y)$ pour $y\in J$.

Pour trouver la fonction réciproque G, il suffit, étant donné $y\in]-\infty,\log 2[$, de résoudre

$$\begin{aligned}\log\Big[\frac{2(x+1)}{x+2}\Big]=y &\iff \frac{2(x+1)}{x+2}=e^y\\ &\iff 2(x+1)=(x+2)e^y\\ &\iff x=\frac{2(e^y-1)}{2-e^y}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$G(y)=\frac{2(e^y-1)}{2-e^y}\qquad \forall\, y\in]-\infty,\log 2[\,.$$

Soit on peut vérifier que G est dérivable (quotient de fonctions dérivables) et calculer $G'(y)$ directement, soit on peut appliquer le résultat du cours qui nous permet d'affirmer que $G\ :J\to I$ est dérivable comme fonction inverse d'une fonction F dont la dérivée f ne s'annule pas sur I et que

$$G'(y)=\frac{1}{f(G(y))}=G(y)^2+3G(y)+2\,.$$

Les deux calculs conduisent au même résultat, à savoir :

$$G'(y)=\frac{2e^y}{(2-e^y)^2}\qquad \forall\, y\in]-\infty,\log 2[\,.$$

<u>Exercice 6.</u>

Soit $f\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t\le 0\\ \exp(-1/t) \text{ si } t>0\end{cases}$$

6.a. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $t=0$.*

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme composée de la fonction continue $t\in]0,+\infty[\longmapsto 1/t$ avec la fonction continue $u\in\mathbb{R}\longmapsto e^{-u}$. Elle est continue sur $]-\infty,0[$ car égale sur cet intervalle à la fonction identiquement nulle. Reste le problème en 0. On a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} e^{-1/t}=0$$

car $1/t$ tend vers $+\infty$ si t tend vers 0 par valeurs supérieures et que

$$\lim_{u\to+\infty} e^{-u}=0\,.$$

La fonction f (qui est identiquement nulle à gauche de 0 et admet en 0 la valeur $0=f(0)$ comme limite à droite) est bien continue aussi en $t=0$.

6.b. *Montrer que f est dérivable en $t = 0$ et calculer $f'(0)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et tracer sommairement le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

On a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$$

car l'exponentielle impose sa limite aux fonctions puissances. Comme f est identiquement nulle sur $]-\infty, 0[$, on a donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

et la fonction f est donc dérivable en $t = 0$ avec $f'(0) = 0$. On a

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = e^0 = 1$$

et la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Voici donc sur la figure ci-dessous l'allure du graphe de f. On constate qu'au voisinage de 0, le graphe de f est tangent à l'axe des x et que la fonction croît lentement ; en revanche la croissance « s'accélère très vite vers l'asymptote horizontale $y = 1$.

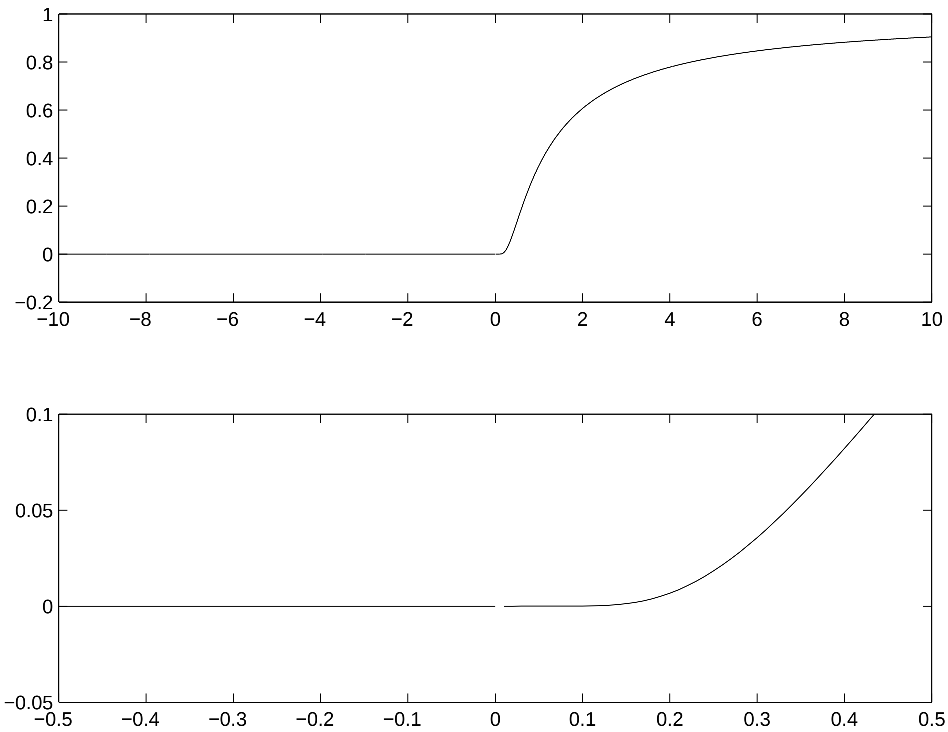

FIG. 3 – Tracé du graphe complet de f et des détails près de l'origine

6.c. *On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur I si f est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' = f^{(1)}$, avec f' dérivable sur I et de fonction dérivée $f'' = f^{(2)}$, f'' dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$ dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(n+1)}$, etc.*

Après avoir rappelé le principe du raisonnement par récurrence, montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction dérivée à l'ordre n (notée $f^{(n)}$) est de la forme

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n-1$. Préciser la relation de récurrence permettant d'exprimer le polynôme P_{n+1} à partir du polynôme P_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

Le principe de récurrence repose sur l'axiome de Peano et se formule ainsi : supposons que l'on veuille montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (ici par exemple que f est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ avec une dérivée n-ème du type voulu) ; on commence par vérifier $\mathcal{P}(n)$ au cran initial (ici $n = 1$), puis on démontre l'implication

$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire ; il en résultera que $\mathcal{P}(n)$ sera vraie pour tout entier $n \ge 1$. Dans notre cas, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'ordre 1 et l'on a

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ f'(t) = \frac{1}{t^2}\, e^{-1/t}$$

et, pour tout $t \ge 0$, $f'(t) = 0$; la propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que f est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ et que

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n-1$. La fonction $f^{(n)}$ est naturellement dérivable (de dérivée identiquement nulle) sur $]-\infty, 0[$ (car $f^{(n)}$ est la fonction nulle sur cet intervalle) et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables ; sur $]0,+\infty[$, on a (en utilisant les règles de dérivation d'un produit, d'un quotient ou d'une application composée)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f^{(n)}(t)] &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - 2nt^{2n-1}P_n(t)}{t^{4n}}\, e^{-1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2(n+1)}}\, e^{-1/t} \\ &= \Big(\frac{tP_n'(t) - 2nP_n(t)}{t^{2n+1}} + \frac{P_n(t)}{t^{2(n+1)}}\Big) \times e^{-1/t} \\ &= \frac{t^2P_n'(t) - (2nt-1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}} \times e^{-1/t} \\ &= \frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}} \times e^{-1/t}\,, \end{aligned}$$

où

$$P_{n+1}(t) := t^2 P_n'(t) - (2nt-1)P_n(t)\,.$$

Le polynôme P_{n+1} est exactement de degré n car si

$$P_n(X) = a_n X^{n-1} + \cdots$$

avec $a_n \neq 0$, alors

$$P_{n+1}(X) = [a_n(n-1) - 2na_n]X^n + \cdots = -(n+1)a_n X^n + \cdots$$

La dérivée de $f^{(n)}$ est donc de la forme requise dans la clause $\mathcal{P}(n+1)$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Comme l'exponentielle impose sa limite aux fonctions puissances, on a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f^{(n)}(t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \Big[\frac{P_n(t)}{t^{2n+1}}\, e^{-1/t}\Big] = 0$$

et la fonction $f^{(n)}$ est aussi dérivable en $t=0$, de nombre dérivé $f^{(n+1)}(0)=0$ en ce point. La fonction $f^{(n)}$ est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est de la forme

$$f^{(n+1)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}}\exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

avec

$$P_{n+1}(X) := t^2 P_n'(X) - (2nX-1)P_n(X)$$

et

$$\deg P_{n+1} = n = (n+1)-1\,.$$

Toutes les affirmations contenues dans l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ sont bien démontrées et on vient de prouver que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ en précisant au passage comment le polynôme P_{n+1} se déduisait de P_n. On a répondu complètement à la question.