

OUTILS ET MODÈLES DÉTERMINISTES EN SIGNAL-IMAGE

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,
FRANCE

E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

Version du 10 septembre 2014.

RÉSUMÉ. Ce cours vise à présenter, illustrées sous l'environnement MATLAB ainsi que sous l'environnement de son clone libre Scilab¹, à la fois les bases de l'analyse de Fourier des signaux ainsi que des images (dans le cadre discret ou continu), ces signaux et ces images étant ici envisagés dans le cadre *déterministe*, et la « boîte à outils » qu'offre le panel des outils mathématiques afférents. Ces mêmes outils se trouveront bien sûr mobilisés dans l'analyse et le traitement des signaux aléatoires, envisagés dans le cadre de l'UE « Outils et Modèles aléatoires en Signal-Image ». Les deux UE se complètent et on veillera à l'harmonisation des notations. Cette UE s'adressant à des étudiants d'horizons variés (Licence de Mathématiques, Licence EEA, Écoles d'Ingénieurs, elle sera présentée en tenant compte des sensibilités (EEA ou mathématiques) de l'auditoire. Aucun bagage approfondi ni de mathématiques (fondamentales ou appliquées), ni d'électronique ou d'automatique, n'est vraiment prérequis.

Table des matières

Chapitre 1. L'analyse de Fourier des signaux/images en temps continu/discret	1
1.1. Signaux analogiques	1
1.2. Opérations sur les signaux analogiques et prise de spectre	30
1.3. Signaux à temps discret	33
1.4. L'analyse des images discrètes	52
Chapitre 2. Le traitement des signaux/images en temps continu/discret	59
2.1. La notion de filtre digital ; filtres digitaux rationnels	59
2.2. La transformation de Laplace et le calcul symbolique	78
Index	91

CHAPITRE 1

L'analyse de Fourier des signaux/images en temps continu/discret

1.1. Signaux analogiques

1.1.1. Les phénomènes physiques dépendant du temps et leur mesure.

On commence ici par une définition assez naïve.

DÉFINITION 1.1 (signal analogique réel ou complexe). Un *signal analogique* est une fonction (pour l'instant au sens naïf du terme) définie sur un intervalle temporel $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou (plus fréquemment, on comprendra pourquoi ultérieurement) à valeurs dans \mathbb{C} : on associe à chaque réel $t \in I$ un nombre

$$(1.1) \quad x(t) = u(t) + jv(t) = \operatorname{Re}(x(t)) + j \operatorname{Im}(x(t)) = a(t) e^{j\varphi(t)} \in \mathbb{C}$$

(où $a(t) \in [0, +\infty[$, $\varphi(t) \in [-\pi, \pi[$)

Suivant le vocabulaire des physiciens et électroniciens, on convient¹ comme on le voit ici de noter $j := \sqrt{-1}$.

Il y a ici évidemment une interprétation physique. Un signal analogique (défini sur un intervalle temporel I donné, I pouvant fort bien être non borné, comme $[0, +\infty[$ ou même \mathbb{R} tout entier) correspond à un phénomène physique mesuré, puis dont les coordonnées $(u(t), v(t))$ sont étalonnées en fonction d'unités de mesure : chaque coordonnée (ou bien la grandeur $\sqrt{u^2 + v^2}$) peut être par exemple une ddp algébrique (différence de potentiel avec un signe) étalonnée en *volts*, une intensité algébrique (étalonnée en *ampères*, avec son signe) ; $\sqrt{u^2 + v^2}$ peut être un niveau sonore étalonné en *bels* (par rapport à une valeur de référence préalablement fixée, comme c'est le cas en acoustique), *etc.*. Cette grandeur $|a(t)| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ est dite *amplitude* du phénomène physique (à l'instant t) tandis que $\varphi(t)$ (en général étalonnée en radians) est appelée *phase* à l'instant t .

Le nombre $x(t) \in \mathbb{C}$ (pour $t \in I$) - ou les couples $(u(t), v(t))$ ou bien $(a(t), \varphi(t))$ - constitue donc une mesure (exprimée dans le système d'unités de référence choisi) du phénomène physique. Or, on sait qu'il est impossible de se positionner pour faire une mesure exactement à un instant $t_0 \in \mathbb{R}$. Les nombres réels ne sauraient en effet être codés en machine : MATLAB par exemple utilise un *codage en double précision* : on dispose de 64 bits, un pour coder le signe, 11 pour coder l'exposant et 52 pour coder la mantisse (en binaire) dans la représentation en virgule flottante, l'erreur machine étant donc de 2^{-52} . Ce que l'on convient de considérer comme la grandeur

1. En espérant que les « matheux » pour qui $\sqrt{-1} = i$ (comme d'ailleurs sous l'environnement MATLAB), ne m'en voudront pas ! C'est parce que i représente une *intensité* en électronique qu'il convient de faire ce choix si l'on adopte, ce que l'on fera ici, un point de vue d'électronicien.

mesurée $X(t)$ est la « valeur moyenne »

$$(1.2) \quad [x(t)]_{\text{app}}^{\varphi, \epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{\epsilon}\right) x(\tau) d\tau,$$

où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ est une fonction paire, assez régulière (disons au minimum continue par morceaux), telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau) d\tau = 1$$

(la masse de la mesure de densité φ étant essentiellement concentrée autour de l'instant $t = 0$) et ϵ est un seuil strictement positif choisi suffisamment petit (prenant en compte la précision de l'appareillage de mesure). Les fonctions usuellement choisies sont la « fonction créneau »

$$\varphi(t) = \pi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou mieux (d'une part parce que cette fonction φ est régulière, d'autre part parce qu'elle joue un rôle essentiel de « fonction propre² » pour la transformation de Fourier que l'on va introduire dans ce cours) la gaussienne normalisée (réduite centrée)

$$(1.3) \quad \varphi(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Il est d'ores et déjà important de remarquer que cette gaussienne g (jouant parfaitement le rôle d'une fonction-test φ pour mesurer une valeur approchée suivant (1.2) pourvu que ϵ soit assez petit) est une fonction régulière dont les dérivées font apparaître (au fur et à mesure que l'on dérive) des « trains d'onde » de plus en plus longs (la dérivée k -ième de $t \mapsto e^{-t^2}$ est, à un coefficient près, le k -ième polynôme de Hermite). Si la gaussienne g n'est pas un signal oscillant, ses dérivées par contre le sont, comme on le voit pour les premières sur la figure 1.1.

Puisque ce que l'on convient de considérer comme signal analogique $t \in I \mapsto x(t)$ est en fait le signal analogique mesuré $t \in I \mapsto [x(t)]_{\text{app}}^{\varphi, \epsilon}$ pour un choix de φ et de $\epsilon \ll 1$, il est naturel d'admettre que l'on identifie deux signaux analogiques

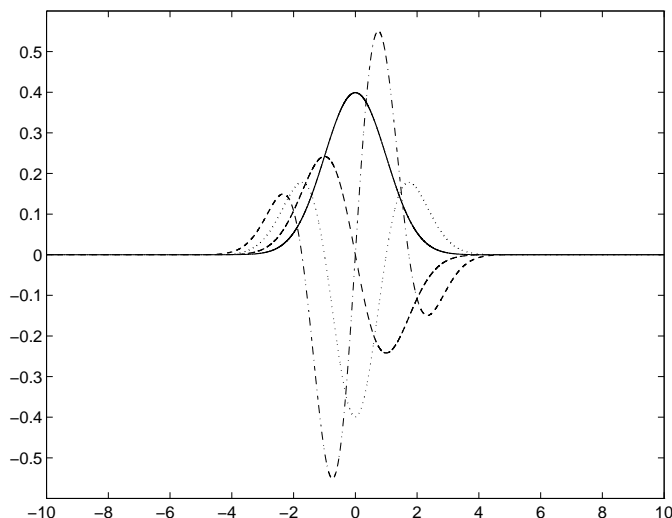
$$t \in I \mapsto x_1(t), \quad t \in I \mapsto x_2(t)$$

lorsque x_1 et x_2 coïncident sur un sous-ensemble de I dont le complémentaire (dans I) est un sous-ensemble de \mathbb{R} de longueur 0 (c'est le cas des sous-ensembles finis, des sous-ensembles dénombrables, plus généralement des sous-ensembles de \mathbb{R} que l'on peut recouvrir par une union dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est arbitrairement petite). On dira alors

$$x_1 =_{\text{pp}} x_2 \quad \text{sur } I,$$

« pp » sous-entendant ici « presque partout ».

2. C'est en fait la gaussienne $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-\pi t^2)$ (et non sa version « contractée (1.3), qui, elle, représente la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$) qui, compte-tenu de la normalisation que nous prendrons dans ce cours pour la prise de spectre, joue le rôle de fonction propre pour cette opération.

FIGURE 1.1. Le signal gaussien g et ses trois premières dérivées

1.1.2. Les signaux analogiques en pratique

Comme on l'a mentionné plus haut, on peut réaliser un signal analogique en « mesurant » un phénomène physique, puis en l'étalonnant une fois une unité de mesure choisie. Évidemment, pour des raisons pratiques, ces signaux analogiques ont été mesurés suivant un maillage du temps de pas τ . Si ce pas $\tau = 1/F$, avec $F \in \mathbb{N}^*$, on dit que *le signal analogique a été échantillonné à F -Hertz*.

DÉFINITION 1.2 (signal échantillonné à F hertz). Un signal analogique est dit échantillonné à F Hertz si le nombre d'échantillons du signal collectés par seconde lors de la mesure (ou enregistrement) de ce signal est égal à F .

EXEMPLE 1.1 (signaux audio). Un format de codage pour les signaux audio est le `.wav`. La fréquence F ainsi que le nombre de bits utilisés pour encoder chaque échantillon sont des données contenues dans le fichier `.wav` encodant un signal audio, que nous appellerons `toto.wav`. Pour rapatrier ce fichier sous MATLAB ou sous Scilab, voici comment l'on procède :

```
>> [x,Fx,Bx] = wavread('toto.wav');
```

Le signal analogique échantillonné à la fréquence Fx (avec Bx bits impliqués pour le codage d'un échantillon) est transcrit ainsi en un signal x , converti au format numérique, de longueur `length(x)`, où la k -ième entrée $x(k)$ correspond à un nombre réel flottant codé en double précision et normalisé de manière à prendre ses valeurs dans $[-1, 1]$. La longueur du signal x fournit, au vu de la connaissance également de Fx , la durée temporelle (en secondes) durant laquelle s'est effectué l'enregistrement : `T= length(x)/Fx`.

1.1.3. Signaux analogiques stables ; signaux analogiques d'énergie finie

Tout signal analogique $x : t \in I \mapsto x(t)$ sur un intervalle $I = (a, b)$ de \mathbb{R} peut être considéré comme un signal analogique sur \mathbb{R} , à condition que l'on convienne de prolonger x par 0 dans $\mathbb{R} \setminus I$ (cette opération correspond au `zeropadding`

en informatique). On verra ultérieurement pourquoi il peut s'avérer judicieux de choisir un intervalle $[a + \eta, b - \eta]$ strictement inclus dans I , puis de construire une « fonction plateau » $\chi_{I,\eta}$ aussi régulière que possible, telle que

$$\chi_{I,\eta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a + \eta, b - \eta] \\ 0 & \text{si } t \notin I \\ \in [0, 1] & \text{si } t \in I \setminus [a + \eta, b - \eta], \end{cases}$$

enfin de prolonger par 0 hors de I le signal analogique « fenêtré » $t \mapsto \chi_{I,\eta}(t)x(t)$. On parle ici de *fenêtrage doux*. On peut également tronquer de manière beaucoup plus lente en multipliant au préalable le signal par une fonction présentant la forme d'une arche trigonométrique ajustée à l'intervalle I (voir par exemple, sous MATLAB ou Scilab, les fenêtres de Hamming : `w=hamming(length(I))`, si `length(I)` désigne le nombre de nœuds du maillage utilisé pour discrétiser l'intervalle I). Ceci permet de gommer les « effets de bord » provoqués par le `zeropadding` opéré brutalement. Par la suite, on considèrera toujours les signaux analogiques définis sur \mathbb{R} tout entier.

DÉFINITION 1.3 (stabilité, finitude de l'énergie pour un signal analogique). Un signal analogique $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{C}$ est dit *stable* si la condition suivante est réalisée :

$$(1.4) \quad \int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < +\infty.$$

Il est d'*énergie finie* lorsque la condition suivante est réalisée :

$$(1.5) \quad \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

REMARQUE 1.1. Si x_1 est stable et si $x_2 =_{\text{pp}} x_1$, bien sûr x_2 est aussi stable. La notion de stabilité est donc une bonne notion (pour les signaux analogiques) relativement à la convention que nous avons fait d'identifier deux signaux analogiques lorsqu'ils sont égaux presque partout. Il en est de même pour le fait d'être d'énergie finie.

Il n'y a aucune relation d'inclusion (ni dans un sens ni dans l'autre) entre la classe des signaux analogiques stables et celle des signaux analogiques d'énergie finie :

– par exemple, le signal (qui sera pour nous capital) *sinuscardinal*

$$(1.6) \quad t \in \mathbb{R} \mapsto \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

est d'énergie finie, mais il n'est pas stable du fait que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Et pourtant, on a la formule de Dirichlet

$$(1.7) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \text{sinc}(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Mais il faut prendre garde ici au fait que la fonction sinc se présente comme une fonction oscillante amortie, comme on le voit sur le graphe figuré sur la figure 1.2.

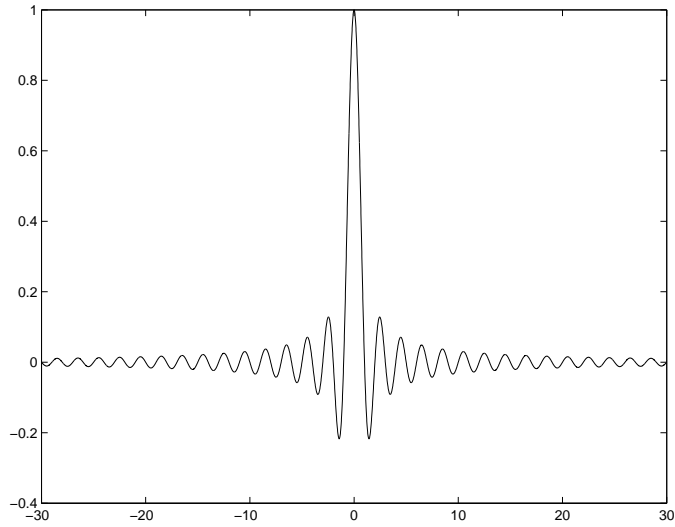


FIGURE 1.2. Le signal sinuscardinal $t \mapsto \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

– d'autre part, le signal défini par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t}/\sqrt{t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est stable, mais non d'énergie finie car $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ (alors que $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ l'est).

1.1.4. Le spectre d'un signal analogique stable : motivation heuristique et définition

Il est une classe très importante (du point de vue physique) de signaux analogiques. Ce sont les signaux oscillants :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi f t}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $f = 0$, il s'agit du signal constant égal à 1. Lorsque $f \neq 0$, il s'agit du signal trigonométrique élémentaire

$$t \mapsto \cos(2\pi|f|t) + j \operatorname{sgn}(f) \sin(2\pi|f|t)$$

de période $1/|f|$, donc de fréquence $|f|$ (ce qui justifie ici la notation). Il faut ici relever la différence majeure entre les deux fonctions trigonométriques réelles apparaissant respectivement comme partie réelle et partie imaginaire de ce signal oscillant complexe : la première (qui s'exprime comme un cosinus) vaut 1 en 0, tandis que la seconde (qui s'exprime comme un sinus) vaut 0 en 0. Malheureusement, ces signaux oscillants « élémentaires » ne sont pas stables (ils sont de module constant égal à 1, et $\int_{\mathbb{R}} dt = +\infty$).

En un certain sens cependant, on peut dire que, lorsque $f \neq f'$, les deux signaux

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2j\pi f t}, \quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2j\pi f' t}$$

sont « orthogonaux » (ou encore « non corrélés »). On se réfère pour cela à la notion d'orthogonalité de deux vecteurs de \mathbb{C}^N : (z_0, \dots, z_{N-1}) et (z'_0, \dots, z'_{N-1}) sont orthogonaux si et seulement si

$$\sum_{l=0}^{N-1} z_l \overline{z'_l} = 0.$$

On remarque que si $f \neq f'$,

$$\begin{aligned} & \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{-T_1}^{T_2} e^{2j\pi f t} \overline{e^{2j\pi f' t}} dt \\ &= \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2j\pi(f-f')T_2} - e^{-2j\pi(f-f')T_1}}{2j\pi(f-f')(T_1 + T_2)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Par contre, si $f = f'$, on trouve :

$$\lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{-T_1}^{T_2} e^{2j\pi f t} \overline{e^{2j\pi f t}} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} (1) = 1.$$

Ainsi, si x et y se présentent comme des sommes finies

$$x(t) = \sum_{l=0}^{N-1} a_l e^{2j\pi f_l t}, \quad y(t) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{2j\pi f_l t},$$

où f_0, \dots, f_{N-1} sont des nombres réels distincts, on observe que

$$\begin{aligned} & \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{-T_1}^{T_2} x(t) \overline{y(t)} dt \\ (1.8) \quad &= \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{-T_1}^{T_2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} a_l e^{2j\pi f_l t} \right) \left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-2j\pi f_l t} \right) dt \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} a_l \overline{b_l}. \end{aligned}$$

La notion d'orthogonalité que l'on vient de dégager ici (pour laquelle la famille des signaux analogiques $t \mapsto e^{2j\pi f t}$, lorsque f balaye \mathbb{R} , se comporte un système orthonormé) est celle d'*ergodicité*. Elle jouera un rôle important dans le cours « Outils et Méthodes aléatoires en Signal-Image ».

Si $t \mapsto x(t)$ désigne un signal analogique stable, on peut définir, lorsque $f_0 \in \mathbb{R}$ est fixé, l'intégrale

$$(1.9) \quad X(f_0) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f_0 t} dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{e^{2j\pi f_0 t}} dt.$$

À la lumière du rôle de « système orthonormé » joué par les signaux $t \mapsto e^{2j\pi f t}$ ($f \in \mathbb{R}$) dans le contexte de l'ergodicité, il est naturel, si l'on prétend analyser x comme un « empilement » de signaux oscillants élémentaires $t \mapsto e^{2j\pi f t}$ (f balayant \mathbb{R}) (ce qu'incite à faire la physique depuis les travaux de Maxwell mettant en parallèle électromagnétisme, lumière et acoustique de par leur caractère « ondulatoire »), de penser, à la lumière de (1.9), lorsque $f_0 \in \mathbb{R}$ est fixé, $X(f_0)$ comme une « corrélation » entre le signal analogique x et le signal oscillant élémentaire $t \mapsto e^{2j\pi f_0 t}$. Ainsi, plus la grandeur $|X(f_0)|$ est significative, plus le signal oscillant élémentaire $t \mapsto e^{2j\pi f_0 t}$ intervient avec une pondération importante dans la

décomposition de $t \mapsto x(t)$ « dans la base orthonormée » (au sens de la corrélation ergodique) constituée des signaux $t \mapsto e^{2j\pi ft}$, $f \in \mathbb{R}$.

On est ainsi conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 1.4 (spectre d'un signal analogique stable). Le spectre d'un signal analogique stable $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est le signal analogique

$$(1.10) \quad X : f \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt.$$

La prise de spectre des signaux analogiques stables est une *opération régularisante*, au sens où le spectre d'un signal analogique stable x (aussi irrégulier que soit le signal x , fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} que l'on peut même modifier arbitrairement sur un sous-ensemble de mesure nulle) est un signal qui, lui, est assez régulier. En effet, le signal $f \rightarrow X(f)$ donné sous la forme (1.10) est un signal *continu* au sens mathématique du terme :

$$\lim_{f \rightarrow f_0} X(f) = X(f_0) \quad \forall f_0 \in \mathbb{R}.$$

On pourrait bien sûr modifier ce spectre arbitrairement sur un ensemble de mesure nulle sans changer le signal analogique, mais en choisir cette version régulière (1.10) est bien sûr la chose la plus raisonnable à faire.

Autre propriété importante (dite de *Riemann-Lebesgue*) :

$$(1.11) \quad x \text{ stable} \implies \lim_{|f| \rightarrow +\infty} |X(f)| = 0.$$

Mais, attention, cette convergence vers 0 à l'infini n'est pas toujours rapide ! En fait, plus le signal est irrégulier, plus cette convergence vers 0 à l'infini (pour le spectre) est lente. Le signal de référence que l'on utilise pour prouver cette propriété (1.11) est le signal

$$\pi_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad -\infty < a < b < +\infty.$$

On a en effet :

$$(1.12) \quad \text{spectre} [\pi_{a,b}](f) = (b-a) e^{-2\pi j \left(\frac{a+b}{2}\right) f} \text{sinc}((b-a)f).$$

Toute combinaison finie de signaux du type $\pi_{a,b}$ est donc un signal stable ayant la propriété (1.11). Le fait que cette propriété passe à la classe de tous les signaux analogiques stables vient du fait que tout signal stable s'approche ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |x(t) - x_n(t)| dt = 0$$

avec une suite $(x_n)_n$ de combinaisons linéaires finies de tels $\pi_{a,b}$.

1.1.5. Effet des opérations simples sur la prise de spectre des signaux analogiques stables

La prise de spectre (au niveau des signaux analogiques stables) est une application linéaire :

$$\text{spectre} [\lambda x + \mu y] = \lambda X + \mu Y \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

La prise de spectre échange les opérations de contraction et de dilatation dans le changement d'échelle : si x est un signal stable et $a > 0$, on a

$$(1.13) \quad \text{spectre}[x(a(\cdot))](f) = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

(c'est immédiat par le changement de variable $u = at$ sous l'intégrale).

La prise de spectre échange les opérations de translation et de modulation d'amplitude, ce que l'on peut résumer en la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1 (échange de la translation et de la modulation d'amplitude par prise de spectre). *Si $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un signal analogique stable, on a :*

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (\text{spectre}[x(\cdot + \tau)])(f) &= e^{2j\pi f\tau} X(f) \quad \forall f \in \mathbb{R} \\ \forall f_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{spectre}[e^{2j\pi f_0(\cdot)} X](f) &= X(f - f_0) \quad \forall f \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. C'est immédiat. Le spectre du signal translaté $t \rightarrow x(t + \tau)$ évalué en f est

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x(t + \tau) e^{-2j\pi ft} dt &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f(t-\tau)} dt \\ &= e^{2j\pi f\tau} \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt = e^{2j\pi f\tau} X(f). \end{aligned}$$

Le spectre du signal modulé

$$t \rightarrow e^{2j\pi f_0 t} x(t)$$

est évalué en f ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi f_0 t} x(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi(f-f_0)t} dt = X(f - f_0).$$

□

1.1.6. Quelques exemples importants de spectres de signaux stables

La première classe d'exemples à mettre en évidence consiste en une famille de signaux qui se trouve préservée par la prise de spectre, au sens suivant : le spectre d'un signal de la famille est (à une constante multiplicative près) un signal de la famille.

La famille des signaux gaussiens centrés est justement préservée par la prise de spectre. On a en effet l'importante règle suivante.

PROPOSITION 1.2 (le spectre d'une gaussienne centrée reste une gaussienne centrée). *Pour tout $\sigma > 0$, le spectre du signal analogique stable*

$$g_{0,\sigma^2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

(densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, de moyenne nulle et d'écart-type σ) est le signal analogique

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{0,1/(4\pi^2\sigma^2)}(f) = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}.$$

En particulier, la gaussienne $g_{0,\frac{1}{2\pi}}$ (densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2\pi})$ de moyenne nulle et d'écart type $1/\sqrt{2\pi}$) est un signal analogique stable vecteur propre de la transformation de Fourier (avec la valeur propre 1).

DÉMONSTRATION. Le seul calcul à effectuer concerne le calcul du spectre de la gaussienne g donnée par (1.3) ($\sigma = 1$). On remarque pour cela que le signal

$$G : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

se dérive (on dérive sous l'intégrale) en

$$f \mapsto -2j\pi \int_{\mathbb{R}} g(t)t e^{-2j\pi ft} dt = -2j\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{dg}{dt} e^{-2j\pi ft} dt.$$

En intégrant par parties, on voit que

$$\frac{dG}{df} = -4\pi^2 f G(f).$$

Cette équation différentielle s'intègre facilement. On trouve que $G(f) = G(0)e^{-2\pi^2 f^2}$. Comme $G(0) = 1$, on a $G(f) = e^{-2\pi^2 f^2}$. On utilise ensuite la formule (1.13) traduisant l'effet du changement d'échelle sur la prise de spectre. \square

C'est à Dennis Gabor que l'on doit l'introduction d'une classe de signaux stables particulièrement intéressante du point de vue pratique : celle des gaussiennes translatées, contractées ou dilatées, puis modulées. C'est-à-dire des signaux stables de la forme

$$\mathfrak{g}_{t_0, a, f_0} : t \in \mathbb{R} \mapsto g((t - t_0)/a) e^{2j\pi f_0 t}, \quad a > 0, t_0 \in \mathbb{R}, f_0 \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la proposition 1.2, puis la proposition 1.1, on voit que cette classe est préservée (le spectre d'un signal de la classe reste un signal de la classe, à un coefficient multiplicatif près) : la contraction devient une dilatation, la translation par t_0 se transforme en modulation, la modulation (de fréquence f_0) devient une translation.

Une classe de signaux analogiques stables jouant un rôle important du fait de la possibilité de les modéliser³ est celle des signaux « rationnels »⁴

$$x : t \mapsto \frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p}{b_0 + b_1 t + \dots + b_q t^q}$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales avec $p = \deg P \leq q - 2 = \deg Q - 2$ (clause de stabilité à l'infini) et sans pôle sur \mathbb{R} (clause de stabilité à distance finie). La formule des résidus (sur laquelle on reviendra) permet de calculer explicitement le spectre, mais les expressions sont complexes, car elles font apparaître les zéros de Q , que l'on ne peut calculer que de manière approchée en général. Ces formules sont explicites, mais instables. Plus $q - p$ est grand, plus le signal X est régulier : si $q - p \geq 2 + k$, le spectre X est de classe C^k . On constate ici une relation entre la

3. Les fonctions rationnelles sans pôles sur un segment temporel de \mathbb{R} sont en effet les seules fonctions définies sur cet intervalle qu'il soit possible d'encoder simplement en machine : sous MATLAB, la fonction polynomiale $P : t \mapsto a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p$ s'encode par la déclaration de la liste $\mathbf{P} = [a_p \ a_{p-1} \ \dots \ a_0]$ (attention au renversement de l'ordre des coefficients) et s'évalue sur un maillage $\mathbf{t} = \mathbf{a}:\mathbf{pas}:\mathbf{b}$ de l'intervalle de définition par $\mathbf{y} = \mathbf{polyval}(\mathbf{P}, \mathbf{t})$. Sous Scilab par contre, cette fonction (en la variable dénommée "var", par exemple "t") se déclare par la déclaration syntaxiquement plus complexe $\mathbf{P} = \mathbf{poly}([\mathbf{a0} \ \dots \ \mathbf{ad}], \mathbf{var}, \mathbf{coeff})$ et s'évalue sur le maillage \mathbf{t} par $\mathbf{y} = \mathbf{horner}(\mathbf{P}, \mathbf{t})$ (allusion à l'algorithme d'évaluation de Hörner).

4. Il s'agit ici plutôt de signaux artificiellement simulés de manière à respecter le modèle algébrique, non de signaux analogiques observés (en général).

régularité du spectre et la rapidité de la décroissance à l'infini du signal. L'exemple le plus important ($q - p = 2$) est celui du signal

$$t \mapsto \frac{1}{1 + t^2/a^2}, \quad a > 0.$$

dont le spectre est donné par :

$$(1.15) \quad \text{spectre} \left[\frac{1}{1 + (\cdot)^2/a^2} \right] (f) = \pi a e^{-2\pi a|f|}.$$

1.1.7. Une digression « numérique ». La matrice de la dft(N)

Si N est un entier strictement plus grand que 1, on note W_N le nombre complexe

$$W_N = \exp(2j\pi/N).$$

Le nombre W_N est une racine N -ième primitive de l'unité, au sens où les N racines complexes du polynôme $X^N - 1$ sont les puissances successives W_N^0, \dots, W_N^{N-1} de W_N . Le nombre W_N est un générateur du groupe (multiplicatif) cyclique des N racines de l'unité, car le plus petit entier strictement positif k tel que $W_N^k = 1$ est justement N . On a d'autre part les relations algébriques importantes

$$(1.16) \quad \forall k = 1, \dots, N-1, \quad \sum_{\ell=0}^{N-1} W_N^{k\ell} = 0$$

puisque l'on a, pour tout $k = 1, \dots, N-1$, les identités remarquables

$$W_N^{kN} - 1 = 0 = (W_N^k - 1)(1 + W_N^k + W_N^{2k} + \dots + W_N^{(N-1)k})$$

et que $W_N^k \neq 1$ si $k = 1, \dots, N$.

DÉFINITION 1.5 (la dft⁵ d'ordre N). Étant donné un entier $N \geq 2$, on définit la dft d'ordre N (et on note dftN) l'opérateur linéaire de \mathbb{C}^N dans lui-même dont la matrice est la matrice complexe symétrique \mathbb{W}_N dont les entrées⁶ sont les nombres

$$W_N^{k\ell} \quad (k = 0, \dots, N-1 \text{ indice de ligne}, \quad \ell = 0, \dots, N-1 \text{ indice de colonne}).$$

$$(1.17) \quad \mathbb{W}_N = \left[\exp\left(\frac{2j\pi k\ell}{N}\right) \right]_{\substack{k=0, \dots, N-1 \\ \ell=0, \dots, N-1}}.$$

Les relations (1.16) impliquent immédiatement que la matrice symétrique complexe \mathbb{W}_N est inversible et que l'on a la très importante relation

$$(1.18) \quad \mathbb{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \times \overline{\mathbb{W}_N}.$$

Autrement dit, au facteur $1/N$ près, la matrice \mathbb{W}_N est une matrice unitaire. Les vecteurs colonnes (ou ligne, c'est pareil) de la matrice \mathbb{W}_N forment un système orthogonal dans \mathbb{C}^N . Ce n'est pas une base orthonormée de \mathbb{C}^N parce que la norme euclidienne de ces N vecteurs est égale à \sqrt{N} (toutes les coordonnées de chacun de ces N vecteurs sont de module 1, ce qui implique que la somme des carrés des modules des N coordonnées de chacun de ces N vecteurs vaut N) au lieu d'être égale à 1.

5. « Discrete Fourier Transform ».

6. On a convenu ici de numéroter les lignes de 0 à $N-1$, les colonnes de 0 à $N-1$, tout en étant conscient que les index de numérotation respectivement des lignes et des colonnes sous MATLAB ou Scilab doivent être $k+1 = 1, \dots, N$ et $\ell+1 = 1, \dots, N$.

La plus importante (on le verra) de toutes ces matrices \mathbb{W}_N (et d'ailleurs la seule qui soit réelle) est la matrice (dite « matrice papillon ») :

$$(1.19) \quad \mathbb{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$(1.20) \quad \mathbf{dft2} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + z_1 \\ z_0 - z_1 \end{bmatrix}, \quad \forall (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2.$$

La première entrée en sortie figure la somme $z_0 + z_1$ (donc en fait deux fois la moyenne) des grandeurs z_0 et z_1 tandis que la seconde entrée en sortie figure la différence $z_0 - z_1$ des grandeurs z_0 et z_1 . Dans le premier cas, on « intègre » la suite à deux entrées (z_0, z_1) ; dans le second cas, on « dérive » (ici à gauche) cette suite.

La procédure **MATLAB** réalisant cette opération **dftN** est la suivante :

X = fft(x);

Si x est un tableau, la procédure est appliquée aux vecteurs colonne du tableau. On verra ultérieurement que cette procédure est beaucoup moins coûteuse (au sens où elle consomme $N \log N/2$ multiplications au lieu de N^2) lorsque N est une puissance de 2. On parle alors de *Fast Fourier Transform* (**fft**). Si x est un tableau de taille arbitraire, la procédure

X = fft(x,N);

complète (lorsque le nombre de lignes est strictement inférieur à N) les colonnes du tableau x par des zéros jusqu'à ce que ce tableau ait N lignes, ensuite calcule la **dft**, ou alors (si le nombre de lignes dépasse N) tronque les colonnes pour n'en garder que les N premières entrées, puis calcule la **dftN**. L'inverse de l'opération **dftN** est réalisée par la procédure

x = ifft(X);

(si X est un tableau, la procédure opère colonne par colonne). La procédure

x=ifft(X,N);

est à interpréter comme précédemment (soit on complète les colonnes, soit on les tronque, ce pour que le nombre de lignes du tableau soit N).

Sous **Scilab**, on réalise la prise de **dftN** d'un signal de longueur N par

--> X = fft(x,-1);

--> X = fft(x);

et son inverse par

--> X = fft(X,1);

--> x = ifft(X)

(avec action suivant la première dimension lorsque l'entrée est un tableau).

Soit $F > 0$. Il est important d'observer que le k -ième vecteur ligne de la matrice \mathbb{W}_N s'interprète comme le vecteur des valeurs prises par le signal analogique oscillant

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e_{F;k}(t) = \exp\left(-\frac{2\pi j k F}{N} t\right)$$

(de fréquence $k F/N$, $k=0:N-1$) aux points $t = 0 : 1/F : (N-1)/F$.

EXEMPLE 1.2. Pour comprendre le rôle de cet algorithme de `df`tN dans l'analyse en fréquences d'un signal, prenons par exemple le signal correspondant à l'enregistrement du LA du diapason par un saxo ou un violon⁷. Le signal analysé ici a été échantillonné à 48000 Hz. Le signal numérique réalisé sous MATLAB⁸ *via*

```
>> [x,Fx,Bx] = wavread('saxo-ladiapason.wav');
```

peut être exploré sur des fenêtres temporelles de longueur N. Effectuons le calcul

```
>> X = fft(x(k:1:k+N-1),N);
```

en prenant une valeur de k arbitraire (si possible une valeur où le signal audio est pleinement réalisé, par exemple vers le milieu de l'enregistrement). Le vecteur X est un vecteur de nombres complexes de longueur N. Il convient de concevoir cet intervalle comme le champ fréquentiel [0,Fx] (inutile d'espérer aller au delà puisque le phénomène physique a été échantillonné à Fx Hz) exploré avec un pas de Fx/N. Mais il convient de concevoir la fonction que l'on affiche par

```
>> X = fft(x(k:1:k+N-1),N);
>> f = [0 : Fx/N : Fx-Fx/N]';
>> plot(f, abs(X));
```

comme le motif d'un signal discret périodique. Alors, la lecture « recentrée⁹ » serait plutôt

```
>> XX = fftshift(fft(x(k:1:k+N-1),N));
>> ff = [-Fx/2 : Fx/N : Fx/2 - Fx/N];
>> plot(ff,abs(XX));
```

On reconnaît alors le positionnement de la plus petite fréquence significative (en valeur absolue) à $f = 440$ Hz. C'est bien le LA 440 du diapason. Il est intéressant d'observer ce qui se passe si l'on augmente ou diminue la longueur de l'échantillon. La précision en fréquence est d'autant meilleure que la longueur N de la section du signal considéré est grande (prendre 512, 1024, 2048, 4096 comme valeurs de N pour s'en rendre compte).

1.1.8. L'inversion de la prise de spectre pour les signaux analogiques stables

Si $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ est un signal analogique stable et dont le spectre est aussi stable, le résultat que l'on espérait est vrai : ce signal x non seulement est de fait régulier (il est continu au sens mathématique du terme), mais encore il s'écrit comme l'empilement attendu des signaux oscillants élémentaires.

THEOREME 1.1 (formule d'inversion pour la prise de spectre des signaux stables et de spectre stable). *Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique stable dont le spectre $f \in \mathbb{R} \mapsto X(f)$ est stable. Le signal x est presque partout égal au signal analogique continu (au sens mathématique du terme) défini en tout point $t \in \mathbb{R}$ par*

$$(1.21) \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df.$$

7. Vous pouvez télécharger tous ces signaux audio sur : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/MATLABSignal/Audio>

8. On peut ici utiliser indifféremment MATLAB ou Scilab.

9. Il est logique d'effectuer un tel recentrage car le spectre d'un signal analogique réel se doit d'être une fonction paire (il suffit en effet de faire le changement de variables $t \longleftrightarrow -t$ sous l'intégrale (1.10) figurant dans l'expression de $X(f)$).

On rappelle en effet (pour justifier le caractère attendu de la formule (1.1)) que

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{e^{2j\pi ft}} dt$$

s'interprète comme la corrélation (c'est-à-dire une sorte de produit scalaire $\ll \gg$) entre le signal analogique stable x et le signal oscillant élémentaire $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2j\pi ft}$, tous ces signaux oscillants élémentaires (lorsque f balaye \mathbb{R}) formant un système orthonormé au sens de l'ergodicité. On peut ainsi formuler (1.1) en

$$(1.22) \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x(\tau) e^{-2j\pi\tau f} d\tau \right) e^{2j\pi ft} df = \int_{\mathbb{R}} \ll x, e^{2j\pi f(\cdot)} \gg e^{2j\pi ft} dt.$$

JUSTIFICATION HEURISTIQUE. Plutôt que de prouver pour l'instant cette formule d'inversion (on y reviendra), nous allons voir comment la justifier en pratique.

On suppose dans un premier temps que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un signal analogique stable (supposé continu, ce qui est le cas si son spectre est aussi stable). On se donne un seuil d'erreur ϵ . Comme x est stable, il existe $T > 0$ tel que

$$\int_{|t|>T} |x(t)| dt < \epsilon.$$

On peut donc affirmer que :

$$\forall f \in \mathbb{R}, \quad \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi jft} dt \right| \leq \int_{|t|>T} |x(t)| dt < \epsilon.$$

Mais on sait aussi que x est régulier (continu). Les méthodes d'intégration numérique peuvent donc être appliquées pour calculer

$$\int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi jft} dt$$

de manière approchée (lorsque T est ainsi fixé assez grand en fonction de ϵ). Par exemple, suivant le calcul approché d'intégrales (sommes de Riemann) :

$$(1.23) \quad \int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi jft} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2T}{N} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x(-T + 2\ell T/N) \exp\left(-2\pi jf(-T + 2\ell T/N)\right) \right).$$

Il est d'ailleurs judicieux de remplacer $x(-T)$ par la demi-somme $(x(-T) + x(T))/2$, ce qui revient de fait à utiliser pour le calcul approché de l'intégrale la *formule des trapèzes composite*. On peut ainsi calculer de manière approchée la valeur de

$$U_T(k) := \int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi f_k t} dt$$

aux points $f_k = k/(2T)$, $k = 0, \dots, N-1$. On trouve, pour N assez grand :

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \dots, N-1, \quad U_T(k) &= \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi jft} dt \right]_{f=\frac{k}{2T}} \simeq \\ &\simeq \frac{2T}{N} (-1)^k \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x(-T + 2\ell T/N) W_N^{k\ell} \right). \end{aligned}$$

Ces valeurs $(U_T(0), \dots, U_T(N-1))$ s'obtiennent matriciellement grâce à l'algorithme de `dfTN`; en effet

$$(1.24) \quad \begin{bmatrix} U_T(0) \\ U_T(1) \\ U_T(2) \\ \vdots \\ U_T(N-2) \\ U_T(N-1) \end{bmatrix} = \frac{2T}{N} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{N-2} \\ (-1)^{N-1} \end{bmatrix} \cdot * \text{dfTN} \begin{bmatrix} x(-T) \\ x(-T + 2T/N) \\ x(-T + 4T/N) \\ \vdots \\ x(-T + (N-2)T/N) \\ x(-T + (N-1)T/N) \end{bmatrix}.$$

Mais la fonction

$$f \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2T}{N} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x(-T + 2\ell T/N) \exp(-2\pi j f(-T + 2\ell T/N)) \right)$$

(qui intervient au second membre de (1.23) comme approximation de la fonction

$$f \mapsto \int_{-T}^T x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

lorsque N est grand) est une fonction périodique de période $N/(2T)$. Si $N = 2M$, on a donc

$$(1.25) \quad \begin{bmatrix} U_T(M) \\ U_T(M+1) \\ \vdots \\ U_T(2M-1) \\ \text{---} \\ U_T(0) \\ U_T(1) \\ \vdots \\ U_T(M-1) \end{bmatrix} \underset{\simeq}{\underset{M \text{ grand}}{\approx}} \begin{bmatrix} \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-2j\pi f t} dt \right]_{f=-M/(2T)} \\ \vdots \\ \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-2j\pi f t} dt \right]_{f=-(M-k)/(2T)} \\ \vdots \\ \left[\int_{-T}^T x(t) e^{-2j\pi f t} dt \right]_{f=(M-1)/(2T)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{\underset{\text{à } \epsilon \text{ près}}{\approx}} \begin{bmatrix} X(-M/2T) \\ \vdots \\ X(-(M-k)/2T) \\ \vdots \\ X((M-1)/2T) \end{bmatrix}.$$

La routine `SPECTRE.m` sous `MATLAB` suivante opère ce calcul¹⁰ :

```
function [X,F] = SPECTREcours(x,T);
%           [X,F] = SPECTREcours(x,T);
% Calcule, etant donne un signal analogique stable discretise
% t --> x(t) echantillonne comme un vecteur-ligne de longueur
% N+1 = 2*M+1 aux N+1 points du maillage t=-T:T/M:T, les valeurs
% du spectre approche X de x (en ligne) aux N+1 points du maillage
% - F : 1/(2*T) : F avec F = M/(2*T); on convient
% que X(N+1) = 0 (Riemann-Lebesgue).
```

10. Attention toutefois de se souvenir qu'il s'agit d'un calcul approché et que, dans le cas par exemple où X serait un signal réel, le calcul approché donne *a priori* un signal complexe (même si sa partie imaginaire est en valeur absolue uniformément très petite).

```

N = length(x)-1; x(1) = (x(1) + x(N+1))/2;
k = 0:N-1; w = (-1).^k;
u = w.*fft(x(1:N));
u1 = u(1:fix(N/2)); u2 = u(fix(N/2)+1:N);
X = (2*T/N)*[u2 u1 0]; F = N/(4*T);
end

```

L'analogue de cette routine sous Scilab est la routine `SPECTREcours.sci` suivante :

```

function [X,F] = SPECTREcours(x,T);
N = length(x)-1; x(1) = (x(1)+x(N+1))/2;
k = 0:N-1; w = (-1).^k;
u = w.*fft(x(1:N),-1,"nonsymmetric");
u1 = u(1:fix(N/2)); u2 = u(fix(N/2)+1:N);
X = (2*T/N)*[u2 u1 0]; Omega = N/(4*T);
endfunction

```

On se donne dans un second temps un signal analogique $Y : f \in \mathbb{R} \mapsto Y(f)$ dans le domaine non plus des temps, mais des fréquences, que l'on suppose stable, au sens où

$$\int_{\mathbb{R}} |Y(f)| df < +\infty,$$

et, une fois encore continu (c'est le cas si Y est le spectre d'un signal analogique stable). On peut comme précédemment calculer de manière approchée le signal analogique défini dans l'espace des temps par

$$t \mapsto y(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(f) e^{2j\pi ft} df.$$

Ce signal est un signal régulier (continu au sens mathématique du terme). Comme précédemment, on se donne un seuil d'erreur ϵ et l'on choisit F tel que

$$\int_{|f|>F} |Y(f)| df < \epsilon.$$

Si N est un entier supérieur ou égal à 2, les valeurs approchées $V_T(0), \dots, V_T(N-1)$ des nombres

$$\int_{-F}^F Y(f) e^{2\pi jft} df, \quad t = k/(2F), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

se calculent ainsi (on utilise pour cela (1.18) après avoir convenu de remplacer $Y(-F)$ par $(Y(-F) + Y(F))/2$) :

$$(1.26) \quad \begin{bmatrix} V_F(0) \\ V_F(1) \\ V_F(2) \\ \vdots \\ V_F(N-2) \\ V_F(N-1) \end{bmatrix} = 2F \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{N-2} \\ (-1)^{N-1} \end{bmatrix} \cdot * (\text{dftN})^{-1} \begin{bmatrix} Y(-F) \\ Y(-F + 2F/N) \\ Y(-F + 4F/N) \\ \vdots \\ Y(-F + (N-2)F/N) \\ Y(-F + (N-1)F/N) \end{bmatrix}.$$

Les mêmes observations que dans notre première situation (calcul approché du spectre d'un signal analogique stable) s'appliquent et l'on a, si $N = 2M$:

$$(1.27) \quad \begin{bmatrix} V_F(M) \\ V_F(M+1) \\ \vdots \\ V_F(2M-1) \\ \text{---} \\ V_F(0) \\ V_F(1) \\ \vdots \\ V_F(M-1) \end{bmatrix} \underset{M \text{ grand}}{\simeq} \begin{bmatrix} \left[\int_{-F}^F Y(f) e^{2j\pi ft} df \right]_{t=-M/(2F)} \\ \vdots \\ \left[\int_{-F}^F Y(f) e^{2j\pi ft} df \right]_{t=-(M-k)/(2F)} \\ \vdots \\ \left[\int_{-F}^F X(t) e^{2j\pi ft} dt \right]_{t=(M-1)/(2F)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{à } \epsilon \text{ près}}{\simeq} \begin{bmatrix} \left[\int_{\mathbb{R}} Y(f) e^{2j\pi ft} df \right]_{t=-M/(2F)} \\ \vdots \\ \left[\int_{\mathbb{R}} Y(f) e^{2j\pi ft} df \right]_{t=-(M-k)/(2F)} \\ \vdots \\ \left[\int_{\mathbb{R}} Y(t) e^{2j\pi ft} dt \right]_{t=(M-1)/(2F)} \end{bmatrix}.$$

La routine MATLAB suivante, correspondant au fichier ISPECTREcours.m opère ce calcul¹¹ :

```
function [y,T] = ISPECTREcours(Y,F)
%           [y,T] = ISPECTREcours(X,F);
% Calcule, etant donne un signal analogique stable discretise
% f --> Y(f) echantillonne comme un vecteur-ligne de longueur
% N+1 = 2*M+1 aux N+1 points du maillage t=-F:T/M:F,
% les valeurs du spectre approche de son antecedent y par
% prise se spectre y (en ligne) aux N+1 points du maillage
% - T : 1/(2*F) : T avec T = M/(2*F); on pose encore
% y(N+1) = 0 (en accord avec Riemann-Lebesgue).
N = length(Y)-1; Y(1) = (Y(1) + Y(N+1))/2;
k = 0:N-1; w = (-1).^k;
u = w.*ifft(Y(1:N));
u1 = u(1:fix(N/2)); u2 = u(fix(N/2)+1:N);
y = 2*F*[u2 u1 0]; T = N/(4*F);
end
```

La version Scilab de ce code est le code ISPECTREcours.sci suivant :

```
function [y,T] = ISPECTREcours(Y,F)
N = length(Y)-1; Y(1) = (Y(1) + Y(N+1))/2;
k = 0:N-1; w = (-1).^k;
u = w.*fft(Y(1:N),1,"nonsymmetric");
u1 = u(1:fix(N/2)); u2 = u(fix(N/2)+1:N);
```

11. Même remarque que pour la précédente routine SPECTREcours : il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit d'un calcul approché!

```
y = 2*F*[u2 u1 0]; T = N/(4*F);
endfunction
```

Considérons maintenant un signal analogique $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on suppose stable et de spectre stable. On peut enchaîner ainsi les deux routines `SPECTREcours` et `ISPECTREcours` si l'on part d'un signal analogique $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

```
>> [X,F] = SPECTREcours(x,T);
>> [xapp,TT] = ISPECTREcours(X,F);
```

(idem sous `Scilab`). On observe que bien sûr $TT=T$ (par construction) et que `xapp` réalise une approximation du signal analogique x sur la grille $t=-T:2T/N:T$ choisie. Pareil enchaînement conduit à une justification heuristique de la formule d'inversion (1.21). On vient donc de constater en effet que, si T est assez grand et que le signal x est échantillonné avec un pas $2T/N$ suffisamment petit pour que F soit grand, le résultat `xapp` retourné par pareil enchaînement réalise une approximation de x . Cependant, il est très important d'insister sur la relation

$$F \cdot T = N/2 \iff F \times \frac{2T}{N} = 1 \iff F = \frac{1}{\frac{2T}{N}},$$

($2T/N$ figurant le pas d'échantillonnage temporel) car elle conditionnera par la suite le théorème de Shannon relatif au problème de l'échantillonnage.

Pour que F soit grand, ce afin que

$$\int_{|f|>F} |X(f)| df < \epsilon,$$

il faut que $N \gg 2T$, ce qui suppose une résolution temporelle du signal d'autant plus petite que l'on souhaite F grand. La résolution fréquentielle est $1/(2T)$; cette résolution fréquentielle est, elle, d'autant plus petite que T est grand. \square

1.1.9. Le spectre des signaux analogiques d'énergie finie et la conservation de l'énergie

L'avantage que présente le fait de travailler avec les signaux d'énergie finie (au lieu des signaux stables) est que l'on dispose sur l'espace des signaux analogiques d'énergie finie et à valeurs complexes (que l'on note $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) d'une notion d'« orthogonalité » entre deux éléments.

DÉFINITION 1.6. Si x_1 et x_2 sont deux signaux d'énergie finie, leur produit scalaire est défini par

$$(1.28) \quad \langle x_1, x_2 \rangle_2 := \int_{\mathbb{R}} x_1(t) \overline{x_2(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} x_1(t) x_2^*(t) dt$$

(on note indifféremment $\overline{x(t)}$ ou $x^*(t)$ le conjugué d'un signal analogique complexe¹²). Ce produit scalaire est aussi appelé *corrélation* tandis que

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

est appelée *énergie* du signal, sa *norme* étant la racine carrée $\|x\|_2$ de l'énergie.

12. Sous `MATLAB` ou `Scilab`, la corrélation de deux signaux digitaux `x1` et `x2` sur $\{0, \dots, N-1\}$ donnés tous deux en ligne est `x1.*x2'`, ce qui tend ici à justifier cette notation x_2^* pour le signal conjugué $\overline{x_2}$ dans (1.28).

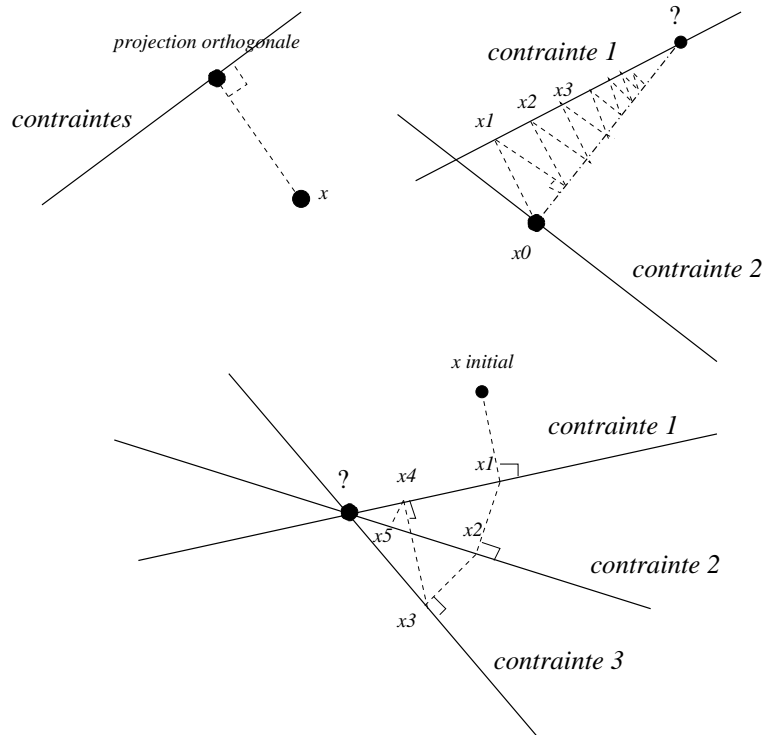


FIGURE 1.3. Comment tirer profit algorithmiquement d'une corrélation ?

Dans un univers (tel celui des signaux analogiques d'énergie finie), disposer d'une corrélation (comme (1.28)) s'avère être un atout capital du point de vue opérationnel ! On peut faire ainsi dans le monde des signaux analogiques des signaux d'énergie finie toutes les opérations algorithmiques que soutend la notion d'orthogonalité : projeter (orthogonalement) un signal analogique d'énergie sur un sous-espace affine (voir même un sous-ensemble convexe) matérialisant le sous-ensemble des signaux obéissant à un certain jeu de contraintes, trouver de manière approchée par des projections orthogonales successives un signal (inconnu a priori) candidat à obéir à un certain nombre de contraintes et auquel on demande d'avoir une norme minimale, approcher un signal (inconnu) obéissant à un certain jeu de contraintes lorsque l'on sait comment il se projette sur le sous-espace des signaux obéissant à un autre jeu de contraintes, etc. On a par exemple sur les diagrammes de la figure 1.3 illustré sommairement ces quelques démarches algorithmiques.

Pour définir le spectre des signaux analogiques d'énergie finie, il faut tronquer dans un premier temps le signal entre les instants $-T/2$ et $T/2$ (T choisi grand). Le signal ainsi tronqué :

$$x_T : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x(t) & \text{si } |x| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

devient alors un signal stable car on a

$$\int_{\mathbb{R}} |x_T(t)| dt = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt \leq \sqrt{T} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{T} \|x\|_2.$$

Le spectre du signal x_T est le signal

$$X_T : f \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2j\pi ft} dt.$$

Les signaux analogiques stables et en même temps d'énergie finie partagent une propriété très importante, que l'on énonce ici :

THEORÈME 1.2 (la prise de spectre sur les signaux analogiques à la fois stables et d'énergie finie préserve l'énergie). *Si $t \mapsto x(t)$ est un signal analogique stable, mais aussi d'énergie finie, son énergie est préservée par prise de spectre.*

PREUVE HEURISTIQUE. Pour donner une preuve heuristique de cette importante propriété, on peut se fonder sur les calculs approchés conduits (lors de la justification heuristique de la formule d'inversion, théorème 1.1, pour les signaux analogiques stables et de spectre stable) à l'aide de l'algorithme de transformation de Fourier discrète **dfT N** (lorsque N est appelé à tendre vers $+\infty$). On se souvient que la matrice \mathbb{W}_N de l'application linéaire correspondant à la transformation de Fourier discrète sur les signaux de longueur N est une matrice unitaire au facteur $1/N$ près (c'est la formule (1.18)). Les colonnes de cette matrice sont des vecteurs de \mathbb{C}^N orthogonaux et tous de même norme \sqrt{N} . C'est cette propriété de la transformation de Fourier discrète (cette transformation préserve l'orthogonalité des vecteurs ainsi que leur norme, au facteur multiplicatif \sqrt{N} près) qui justifie heuristiquement la conservation de l'énergie par prise de spectre agissant sur les signaux à la fois stables et d'énergie finie.

On peut aussi invoquer un autre argument, plus physique celui là, et donc sans doute plus parlant à un physicien : la prise de spectre des signaux analogiques stables et d'énergie finie se réalise physiquement. Par exemple, en dimension 2, on peut la réaliser optiquement *via la diffraction de Fraunhofer*. Le spectre d'un signal analogique 2D noté I (on dira plus tard une image) défini dans le plan \mathbb{R}_{i_1, i_2} (deux variables d'espace cette fois, car deux dimensions) s'obtient dans un nouveau plan \mathbb{R}_{f_1, f_2} comme l'image diffractée de I au travers d'une lentille. Comme toute transformation réalisable physiquement qui se respecte, la prise de spectre se fait au niveau des signaux analogiques d'énergie finie, tout au moins idéalement, sans perte d'énergie. Il y a donc bien conservation de l'énergie. \square

Le signal x_T est à la fois stable et d'énergie finie. Il répond aux exigences du théorème 1.2 et l'on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |X_T(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad \text{pour tout } T > 0.$$

Mais, si x est un signal d'énergie finie, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \|x\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt.$$

Comme les deux signaux analogiques $t \mapsto x_T(t)$ et $t \mapsto x(t) - x_T(t)$ sont clairement non corrélés au sens de la corrélation analogique (1.28) (le premier « vit » sur

$[-T/2, T/2]$, le second sur $\{t; |t| > T/2\}$), on peut affirmer que

$$(1.29) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |x(t) - x_T(t)|_2^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \|x - x_T\|^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{|t| > T/2} |x(t)|_2^2 dt = 0.$$

Lorsque $(T_n)_n$ est une suite tendant vers l'infini¹³, la suite des signaux analogiques tronqués $(x_{T_n})_n$ approche le signal analogique x , au sens où l'énergie de $x - x_{T_n}$ tend vers 0 lorsque n devient grand.

Par conservation de l'énergie par prise de spectre, on déduit de ces remarques comment donner un sens au spectre d'un signal analogique d'énergie finie.

DÉFINITION 1.7 (spectre d'un signal analogique d'énergie finie). Si $x : t \mapsto x(t)$ est un signal analogique d'énergie finie, le spectre $X : f \mapsto X(f)$ de x est le signal analogique d'énergie finie obtenu comme la limite (au sens de l'énergie, dans l'espace des fréquences f) de la suite des spectres $(X_{[-T_{1,n}, T_{2,n}]})_n$ des versions tronquées $x_{[-T_{1,n}, T_{2,n}]}$ de x , les deux suites $(T_{1,n})_n$ et $(T_{2,n})_n$ tendant toutes les deux vers l'infini, c'est-à-dire :

$$(1.30) \quad \lim_{T_{1,n}, T_{2,n} \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |X(f) - X_{[-T_{1,n}, T_{2,n}]}(f)|^2 df = 0.$$

C'est donc au sens (1.30) qu'il faut interpréter la formule

$$(1.31) \quad X(f) \simeq \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt.$$

Lorsque l'on dispose d'un espace de signaux équipé d'une corrélation (c'est le cas de l'espace des signaux analogiques complexes d'énergie finie), on a, pour tout tels signaux (pris dans cet espace), la formule de polarisation

$$\operatorname{Re} [e^{i\theta} \langle x_1, x_2 \rangle]_2 = \frac{\|x_2 + e^{i\theta} x_1\|_2^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2}{2} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},$$

en particulier pour θ_0 et $\eta = i$. Comme la prise de spectre des signaux analogiques d'énergie finie préserve l'énergie, elle préserve aussi la corrélation (dont en particulier l'orthogonalité des signaux si orthogonalité il y a).

THEOREME 1.3 (relations de Plancherel). Si x_1 et x_2 sont deux signaux analogiques d'énergie finie, on a au niveau des spectres les relations de Parseval :

$$(1.32) \quad \langle x_1, x_2 \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} x_1(t) x_2^*(t) dt = \langle X_1, X_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} X_1(f) X_2^*(f) df.$$

En particulier, on retrouve bien le principe physique de la conservation d'énergie par prise de spectre :

$$(1.33) \quad \|x\|_2^2 = \|X\|_2^2 \quad \text{pour tout signal analogique d'énergie finie}$$

(en prenant $x_1 = x_2$ dans (1.32)).

Le fait que la matrice \mathbb{W}_N soit quasiment unitaire (voir (1.18)) explique non seulement que l'on ait la formule d'inversion de Fourier pour les signaux stables et de spectre stable, mais encore que cette formule d'inversion reste valide dans le cadre de la prise de spectre de signaux d'énergie finie.

13. On pourrait aussi bien prendre des intervalles temporels $[-T_{1,n}, T_{2,n}]$, où les deux suites $(T_{1,n})_n$ et $(T_{2,n})_n$ tendent vers l'infini, et remplacer la suite $(x_{T_n})_n$ par la suite $x_{[-T_{n,1}, T_{n,2}]}$ (on a annulé le signal hors de $[-T_{n,1}, T_{n,2}]$).

THEOREME 1.4 (inversion de la prise de spectre sur les signaux analogiques d'énergie finie). *Si $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t)$ est un signal analogique d'énergie finie et de spectre $X : f \in \mathbb{R} \rightarrow X(f)$ (aussi signal analogique d'énergie finie de même énergie que x), pour toute suites $(F_{1,n})_n$ et $(F_{2,n})_n$ tendant toutes les deux vers $+\infty$, le signal analogique x se recompose comme la limite, au sens de l'énergie (dans l'espace des temps t), de la suite des signaux analogiques :*

$$(1.34) \quad x^{[-F_{1,n}, F_{2,n}]} : t \mapsto \int_{-F_{1,n}}^{F_{2,n}} X(f) e^{2j\pi ft} df,$$

ce qui signifie :

$$(1.35) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x^{[-F_{1,n}, F_{2,n}]} \|_2^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |x(t) - x^{[-F_{1,n}, F_{2,n}]}(t)|^2 dt = 0.$$

C'est donc au sens (1.35) qu'il faut comprendre la formule suivante :

$$(1.36) \quad x(t) \simeq \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df$$

lorsque x est un signal analogique d'énergie finie dont X dénote le spectre (tel qu'il est défini à la définition 1.7).

1.1.10. Échantillonnage et interpolation des signaux d'énergie finie ; Shannon

Nous voudrions dans cette section envisager le cas particulier des signaux analogiques d'énergie finie $x : t \mapsto x(t)$, mais dont le spectre est un signal analogique¹⁴ qui est nul¹⁵ hors d'une bande fréquentielle $[-F/2, F/2]$, avec $F \gg 1$ (mais pas trop tout de même!).

Mais il s'agit ici, concernant les signaux analogiques, d'une hypothèse relevant de l'utopie : un signal analogique se présente dans la pratique comme toujours entaché d'un *bruit* qui lui est surajouté, ce bruit pouvant être lié au phénomène physique que l'on prétend mesurer ou à des erreurs de mesure lors de l'enregistrement ou de l'étalonnage. Le bruit surimposé au signal se présente de fait non plus comme un signal déterministe, mais comme un signal *aléatoire*; il entre ainsi de fait dans le cadre de l'approche présentée dans l'UE « Modèles et outils déterministes en Signal-Image ». Nous serons donc amenés à corriger cette hypothèse en supposant l'hypothèse approchée suivante :

$$(1.37) \quad \int_{|f| > F/2} |X(f)| df < \epsilon \text{ où } \epsilon \ll 1 \text{ figure une tolérance d'erreur.}$$

Le résultat suivant joue un rôle capital :

THEOREME 1.5 (formule d'échantillonnage de Shannon-Nyquist). *Le résultat se décline en deux volets, un volet « exact » (idéal) et un volet « approché » (plus réaliste).*

14. Que l'on sait être aussi d'énergie finie, en fait la même que celle de f car $\|x\|_2^2 = \|X\|_2^2$ d'après le théorème 1.3.

15. Au sens bien sûr nul presque partout, car ce spectre est, comme x , un signal analogique correspondant à un phénomène physique mesuré puis étalonné.

- (1) Si le seuil de tolérance ϵ dans l'hypothèse (1.37) est nul, le signal analogique x est en fait un signal régulier, continu au sens mathématique du terme, et borné en module par

$$(1.38) \quad \sup_{\mathbb{R}} |x(t)| \leq \sqrt{F} \|x\|_2.$$

Ce signal régulier x s'exprime de plus à tout instant t comme :

$$(1.39) \quad x(t) = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x\left(\frac{k}{f_e}\right) \operatorname{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right) \quad \text{pourvu que } f_e \geq F$$

(f_e étant alors interprétée comme la fréquence d'échantillonnage du signal analogique x); ce que signifie la condition $f_e \geq F$ dans (1.39) est que F représente la fréquence d'échantillonnage minimale tolérée pour avoir, avec la formule (1.39), une formule exacte de restitution du signal analogique x en tout point à partir de sa version échantillonnée $(x(k/f_e))_{k \in \mathbb{Z}}$. Si tel est le cas, on dispose alors en prime du contrôle uniforme d'erreur :

$$(1.40) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| x(t) - \sum_{k=-N_1}^{N_2} x\left(\frac{k}{f_e}\right) \operatorname{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right) \right| \leq \sqrt{\sum_{|k| \geq \min(N_1, N_2)} |x(k/f_e)|^2},$$

la quantité de droite tendant vers 0 lorsque N_1 et N_2 tendent vers l'infini.

- (2) Si le seuil de tolérance ϵ dans l'hypothèse (1.37) est $\epsilon > 0$, le signal analogique x est encore un signal régulier, continu au sens mathématique du terme, borné par

$$(1.41) \quad \sup_{\mathbb{R}} |x(t)| \leq \sqrt{F} \|x\|_2 + \epsilon.$$

De plus, on a, à tout instant t :

$$(1.42) \quad \left| x(t) - \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x\left(\frac{k}{f_e}\right) \operatorname{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right) \right| \leq 2\epsilon \quad \text{pourvu que } f_e \geq F,$$

le contrôle uniforme d'erreur (1.40) demeurant valable (lorsque N_1 et N_2 tendent vers l'infini) pour le calcul approché de

$$\tilde{x}(t) = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x\left(\frac{k}{f_e}\right) \operatorname{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right)$$

comme limite lorsque N_1 et N_2 sont choisis assez grands.

DÉMONSTRATION. Il semble important d'esquisser au moins une preuve de ce résultat afin de se familiariser avec la traduction de la corrélation des signaux périodiques de fréquence f en termes de ce que l'on entend par la liste de leurs coefficients de Fourier. Ceci nous donnera l'opportunité d'introduire le « dictionnaire » (orthonormé pour une corrélation convenable) constitué des *harmoniques fondamentales relatives à une période fixée* $T > 0$ et de décliner les relations de Plancherel dans le cadre des signaux analogiques T -périodiques (et d'énergie finie sur tout segment de longueur la période) au lieu du cadre des signaux analogiques d'énergie finie sur \mathbb{R} .

Cas 1 : le cas où la tolérance d'erreur est nulle. On examine tout d'abord le cas où $\epsilon = 0$ (non tolérance de bruit résiduel aux hautes fréquences ($|f| > F/2$). Le

spectre de x est un signal analogique d'énergie finie vivant dans $[-F/2, F/2]$; c'est donc un signal analogique stable car

$$(1.43) \quad \int_{\mathbb{R}} |X(f)| df = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)| df \leq \sqrt{F} \|X\|_2 = \sqrt{F} \|x\|_2 < +\infty.$$

Du fait de la formule d'inversion pour la prise de spectre des signaux analogiques d'énergie finie (approche rigoureuse (1.35) ou approche formelle (1.36), voir le théorème 1.4), on constate que x est bien un signal analogique régulier (continu au sens mathématique du terme) donné en tout instant t par :

$$(1.44) \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df = \int_{-F/2}^{F/2} X(f) e^{2j\pi ft} df,$$

et par conséquent borné sur \mathbb{R} par

$$(1.45) \quad \sup_{\mathbb{R}} |x(t)| \leq \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)| df \leq \sqrt{F} \|X\|_2 = \sqrt{F} \|x\|_2.$$

Ceci prouve l'assertion (1.38). On fixe maintenant l'instant $t \in \mathbb{R}$ et l'on va exploiter la formule (1.44) en exprimant $x(t)$ comme le résultat d'une corrélation de deux signaux analogiques périodiques de fréquence f_e dans le domaine fréquentiel, soit en réécrivant (1.44) ainsi :

$$(1.46) \quad x(t) = \int_{-F/2}^{F/2} X(f) (f \mapsto e^{-2j\pi ft})^* df = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f) e^{-2j\pi ft} df$$

(ceci est licite car $f_e \geq F$). Bien sûr, le signal analogique $f \rightarrow X(f)$ n'est pas périodique, mais, du fait qu'il vit dans un intervalle fréquentiel borné $[-F/2, F/2] \subset [-f_e/2, f_e/2]$, nous pouvons le « périodiser » en le signal analogique

$$X_{\text{per}, f_e} : f \mapsto \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} X(f + \ell f_e).$$

Le choix de $f_e \geq F$ assure justement que (1.46) se relit :

$$(1.47) \quad x(t) = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_{\text{per}, 1/f_e}(f) (f \mapsto e^{-2j\pi ft})^* df$$

car les divers intervalles fréquentiels $\ell f_e + [-F/2, F/2]$, $\ell \in \mathbb{Z}$, ne se chevauchent pas. Le signal analogique $f \mapsto e^{-2j\pi ft}$, périodique et de fréquence t (en valeur algébrique), peut aussi être périodisé en un signal de période $1/f_e$ (on ne retient que le « motif » de ce signal analogique sur $[-f_e/2, f_e/2]$ et l'on périodise ce motif; bien sûr le signal ainsi u_{t, f_e} obtenu sur \mathbb{R} tout entier n'a plus rien à voir avec le signal $f \rightarrow e^{-2j\pi ft}$, si ce n'est qu'il coïncide avec lui sur l'intervalle fréquentiel $[-f_e/2, f_e/2]$. Nous avons donc maintenant affaire à deux signaux analogiques périodiques $u_1 = X_{\text{per}, f_e}$ et $u_2 = u_{t, f_e}$ de même période f_e , tous deux d'énergie finie sur tout intervalle de longueur la période f_e , dont on définit ainsi la corrélation :

$$(1.48) \quad \langle X_{\text{per}, f_e}, u_{t, f_e} \rangle_{\text{per}, f_e} = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_{\text{per}, f_e}(f) u_{t, f_e}^*(f) df = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} u_1(f) u_2^*(f) df$$

(on ne changerait d'ailleurs pas cette définition si l'on prenait l'intégrale au second membre sur n'importe quel segment de longueur la période commune f_e des deux

signaux analogiques périodiques concernés). Relativement à cette corrélation, on observe que les signaux *harmoniques fondamentaux*

$$f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

forment un système orthonormé et que tout signal analogique périodique $f \rightarrow u(f)$ de période f_e et d'énergie finie sur tout segment de longueur cette période s'approche ainsi

$$(1.49) \quad u(f) = \lim_{K_1, K_2 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} \langle u, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle_{\text{per}, f_e} e^{2j\pi kf/f_e},$$

la limite dans (1.49) étant entendue au sens de l'énergie, c'est à dire

$$\lim_{K_1, K_2 \rightarrow +\infty} \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} |u(f) - S_{K_1, K_2}[u](f)|^2 df = 0$$

si $S_{K_1, K_2}[u]$ désigne le signal analogique périodique de période f_e :

$$S_{K_1, K_2}[u] : f \mapsto \sum_{k=-K_1}^{K_2} \langle u, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle_{\text{per}, f_e} e^{2j\pi kf/f_e}.$$

On dispose donc ici de relations de Parseval aussi, mais cette fois dans un autre cadre (discret celui là) :

$$(1.50) \quad \langle u_1, u_2 \rangle_{\text{per}, f_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u_1, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle \langle u_2, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle^*.$$

Ce sont les relations de Parseval dans ce nouveau cadre, utilisées pour les signaux analogiques $T = f_e$ périodiques¹⁶ et d'énergie finie sur tout segment de longueur la période T . On s'empresse d'exploiter ces relations avec $u_1 = X_{\text{per}, f_e}$ et $u_2 = u_{t, f_e}$, ce qui donne la relecture suivante de (1.47) :

$$(1.51) \quad x(t) = f_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle X_{\text{per}, f_e}, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle_{\text{per}, f_e} \langle u_{t, f_e}, f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e} \rangle_{\text{per}, f_e}^*.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer ici les calculs pour voir que cela fournit la formule (1.39) de recombinaison du signal analogique x à partir de ses échantillons en même temps que le contrôle uniforme d'erreur (1.40) lorsque N_1 et N_2 tendent vers l'infini. On observe en effet que la liste des nombres $(x(k/f_e)/f_e)_{k \in \mathbb{Z}}$ représente la liste des « coordonnées » du signal périodique X_{per, f_e} , exprimé dans le système orthonormé (pour la corrélation périodique (la période étant ici f_e) introduite en (1.48) constituée des harmoniques fondamentales

$$f \mapsto e^{-2j\pi kf/f_e}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

On a donc, d'après les relations de Parseval dans le cadre f_e -périodique (1.50) :

$$(1.52) \quad \begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|x(k/f_e)|^2}{f_e^2} &= \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} |X_{\text{per}, f_e}(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{f_e} \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 df = \frac{\|X\|_2^2}{f_e} = \frac{\|x\|_2^2}{f_e}. \end{aligned}$$

16. Dans le monde des fréquences f où nous travaillons ici, f_e (qui est pensée comme une fréquence d'échantillonnage dans le monde des temps), se doit d'être pensée ici comme une période ; on retrouvera souvent ce « jeu de bascule » lorsque l'on passe d'un monde à l'autre.

On a donc bien $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k/f_e)|^2 = f_e \|x\|_2^2$, ce qui explique pourquoi le terme majorant au second membre de l'inégalité (1.40) tend vers 0 lorsque $\min(N_1, N_2)$ tend vers l'infini. Tout est donc démontré dans ce premier cas où la tolérance d'erreur ϵ est nulle.

Cas 2 : le cas où la tolérance d'erreur est non nulle. Si la tolérance ϵ n'est plus nulle, il reste vrai que X est un signal stable puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |X(f)| df = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)| df + \int_{|f| > F/2} |X(f)| df \leq \sqrt{F} \|x\|_2 + \epsilon.$$

Pour les mêmes raisons que lorsque la tolérance ϵ est nulle, le signal analogique x est un signal régulier (continu au sens mathématique du terme), qui s'exprime comme

$$x : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df$$

est donc borné sur \mathbb{R} en (1.41). On découpe le signal x en deux signaux x_F et r_F (r_F pour « signal résiduel ») en posant :

$$x_F : t \mapsto \int_{-F/2}^{F/2} X(f) e^{2j\pi ft} df \quad \text{et} \quad r_F : t \mapsto \int_{|f| > F/2} |X(f)| df.$$

Ces deux signaux sont réguliers et tous les deux d'énergie finie. On note R_F le spectre de r_F et $(R_F)_{\text{per}, f_e}$ la version périodisée (de période f_e) de ce spectre. Si l'on définit le signal \tilde{x} par

$$\tilde{x}(t) = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} x\left(\frac{k}{f_e}\right) \text{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right),$$

on s'aperçoit, en utilisant ce qui se passe dans le cas de la tolérance zéro ($\epsilon = 0$) que

$$x(t) - \tilde{x}(t) = r_F(t) - \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N_1}^{N_2} r_F\left(\frac{k}{f_e}\right) \text{sinc}\left(f_e\left(t - \frac{k}{f_e}\right)\right).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}(t)| &\leq |r_F(t)| + f_e \left| \left\langle (R_F)_{\text{per}, f_e}, u_{t, f_e} \right\rangle_{\text{per}, f_e} \right| \\ &\leq \int_{|f| > F/2} |X(f)| df + \int_{|f| > F/2} |X(f)| df \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

C'est le contrôle de marge uniforme d'erreur voulu (1.42). \square

REMARQUE 1.2. Si $f_e < F$, la restitution du signal analogique x à partir de la suite des échantillons $(x(k/f_e))_k$ est impossible. Par exemple, si l'on considère le signal analogique

$$t \mapsto \frac{\sin(\pi(F - \epsilon)t)}{t} \sin(\pi \epsilon t)$$

(qui est bien d'énergie finie et de spectre nul hors de $\{|f| \leq F/2\}$, il est impossible de recomposer ce signal à partir des valeurs qu'il prend aux points $k/(F - \epsilon)$, $k \in \mathbb{Z}$ (cela voudrait dire que l'on prendrait $f_e = F - \epsilon$) puisque ces valeurs sont toutes nulles, alors que, bien sûr, le signal ne l'est pas !

1.1.11. Quelques signaux - distribution importants et leur spectre (Dirac, Heaviside)

Plusieurs signaux importants ne sont ni stables, ni d'énergie finie (ce ne sont même plus des signaux analogiques modélisables par des fonctions). Cependant, ces signaux ont des « versions approchées » qui, elles, sont stables ou d'énergie finie. Nous donnons ici trois exemples :

- (1) Le signal constant et égal à 1 n'est ni stable, ni d'énergie finie. Cependant, on peut l'approcher par la suite de signaux gaussiens :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\pi t^2/N^2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

(ce sont des signaux réguliers sur \mathbb{R}) ou par la suite des signaux « créneaux » :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \pi_{N/2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq N/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(qui, eux, ne sont pas réguliers). Ces suites de signaux approchant ainsi (dans les deux cas) le signal analogique constant $t \mapsto 1$ se transforment ainsi par prise de spectre : dans le premier cas, on obtient la suite des signaux gaussiens

$$(1.53) \quad f \in \mathbb{R} \mapsto N e^{-\pi f^2 N^2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Ces signaux constituent une suite de signaux stables, positifs, dont la masse $\int_{\mathbb{R}} | \cdot | dt$ reste égale à 1 indépendamment de N , cette masse se concentrant lorsque N augmente sur un intervalle $[-1/N, 1/N]$. À la limite, on obtient la distribution de masse sur \mathbb{R} définie comme la *mesure de Dirac* : si un sous-ensemble de \mathbb{R} contient 0, sa charge avec cette distribution de masse est 1, sinon sa charge est nulle. Si l'on approche le signal constant égal à 1 par la suite de fonctions créneaux $(\pi_N)_N$, la suite des spectres correspondants est la suite des signaux analogiques

$$(1.54) \quad f \in \mathbb{R} \mapsto N \operatorname{sinc}(Nf), \quad N = 1, 2, \dots$$

(voir (1.12)) ; ce sont des signaux d'énergie finie, mais ce ne sont plus des signaux stables, même si

$$\lim_{F \rightarrow +\infty} N \int_0^F \operatorname{sinc}(Nf) df = 1/2.$$

Le spectre du signal analogique constant égal à 1 est ainsi (ces deux approches nous confortent) la répartition de masse de Dirac sur \mathbb{R} , que l'on appelle aussi impulsion à l'origine $\delta(t)$. Le spectre d'un signal oscillant élémentaire $t \mapsto e^{2j\pi f_0 t}$ est donc (du fait de la proposition 1.1) l'impulsion translatée $\delta(t - 2\pi f_0)$.

- (2) L'impulsion de Dirac $t \mapsto \delta(t)$ n'est pas un signal analogique modélisable par une fonction, comme on vient de le voir. Mais on vient de voir aussi que ce signal analogique s'approche en un certain sens par une suite de signaux analogiques d'énergie finie, par exemple la suite des signaux gaussiens de plus en plus « contractés » (1.53), ou même la suite des signaux obtenus en contractant le signal sinuscardinal, c'est-à-dire la suite des signaux analogiques (1.54). En prenant le spectre des signaux d'une telle suite approximante, puis en faisant tendre N vers l'infini, on constate

que l'on peut donner un sens à la prise de spectre de l'impulsion à l'origine $t \mapsto \delta(t)$ et que le spectre de l'impulsion $t \mapsto \delta(t)$ à l'origine est¹⁷ le signal analogique constant $f \mapsto 1$. Le spectre de l'impulsion décentrée $\delta(t - t_0)$ (impulsion à l'instant $2\pi t_0$ cette fois) est donc le signal oscillant élémentaire $f \mapsto e^{-2j\pi f(t_0/2\pi)}$, de fréquence $t_0/2\pi$.

(3) Le signal analogique

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left[\frac{1}{t} \right] = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

n'est pas stable (du fait du problème en $t = 0$ et en $\pm\infty$) ni d'énergie finie (le seul problème se pose cette fois près de $t = 0$). Ce n'est ni un signal-fonction, ni même un signal-mesure puisque la « masse » de la densité $1/|t|$ est infinie près de l'origine. Mais on peut cependant l'approcher par la suite de signaux¹⁸ analogiques ainsi tronqués :

$$\left[\frac{1}{t} \right]_N : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } |t| \geq 1/N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Le spectre du signal $\left[\frac{1}{t} \right]_N$ (après calcul formel) est¹⁹ :

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R} \mapsto & \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{1/N}^T \frac{e^{-2j\pi ft}}{t} dt - \int_{-T}^{-1/N} \frac{e^{-2j\pi ft}}{t} dt \right) \\ & = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-2j \int_{1/N}^T \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, ce spectre tend, compte-tenu de la formule de Dirichlet (1.7), vers la fonction $t \mapsto -j\pi \operatorname{sign}(t)$. Ainsi le signal

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{j}{\pi} \left[\frac{1}{t} \right]$$

(qui n'est ni un signal-fonction, ni même un signal-mesure²⁰), se transforme par prise de spectre en la fonction « signe ». Le signal²¹

$$t \mapsto \frac{j}{2\pi} \left[\frac{1}{t} \right] + \frac{\delta(t)}{2}$$

a donc pour spectre la fonction d'Heaviside H (valant 0 si $t < 0$, 1 si $t \geq 0$ ²²).

17. D'après la proposition 1.1.

18. Il est capital de respecter dans cette approximation le balancement équilibré de la troncature (symétrie par rapport à l'origine). Ce signal est souvent aussi appelé $\text{VP}\left[\frac{1}{t}\right]$ plutôt que simplement $\left[\frac{1}{t}\right]$ (VP pour « valeur principale »).

19. C'est ici que j'avais fait une erreur de calcul (que je viens de rectifier : π avait ici sauté, l'erreur se répétait par conséquent plus loin).

20. Il faudrait invoquer ici la théorie des distributions (Sobolev, L. Schwartz) pour modéliser un tel signal, nous y reviendrons brièvement plus loin.

21. On retrouvera ce signal analogique ultérieurement car le signal $t \mapsto \frac{j}{\pi} \left[\frac{1}{t} \right] + \delta(t)$ est précisément le moteur d'une transformation pratique opérant sur les signaux analogiques, la *transformation de Hilbert*, transformation consistant à faire disparaître (en la mettant à 0) la partie du spectre X vivant sur $] -\infty, 0[$ et, au contraire, à doubler les valeurs du spectre sur le domaine $[0, +\infty[$ de l'espace des fréquences, contribuant ainsi à une meilleure lisibilité du contenu fréquentiel du signal.

22. Que l'on note aussi Y ou encore U .

- (4) Par ricochet avec ce qui précède, on a, en accord avec la formule d'inversion (1.35) :

$$(1.55) \quad \text{spectre [sign]} : f \mapsto -\frac{j}{\pi} \text{VP} \left[\frac{1}{f} \right].$$

Ce spectre est un signal analogique certes, mais ce signal analogique n'est ni un signal-fonction, ni (pire !) un signal-mesure. Le spectre de la fonction d'Heaviside H est, lui, donné par

$$(1.56) \quad \text{spectre [H]} : f \mapsto \frac{\delta(f)}{2} - \frac{j}{2\pi} \text{VP} \left[\frac{1}{f} \right] = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{2j\pi} \text{VP} \left[\frac{1}{f} \right].$$

On va maintenant essayer d'expliquer, en termes de « physicien », comment l'on peut « dériver » un signal analogique (même irrégulier !). Si l'on considère un signal analogique $t \mapsto x(t)$, on a vu qu'il était raisonnable de considérer la valeur « ponctuelle » qu'il prend à l'instant t_0 comme (par exemple) le nombre

$$(1.57) \quad x(t_0) \simeq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi((t-t_0)/\epsilon) dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi_{t_0, \epsilon}(t) dt = \langle x, \varphi_{t_0, \epsilon} \rangle \quad \epsilon \ll 1,$$

ce en prenant une fonction positive d'intégrale 1 assez bien localisée au voisinage de l'origine, telle par exemple la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

ou, ce qui revient au même (mais est plus pratique compte tenu de nos normalisations) la fonction (très régulière, bien localisée et d'intégrale 1 sur \mathbb{R})

$$\varphi : t \mapsto e^{-\pi t^2}$$

(déduite juste de la précédente par changement d'échelle, mais, préservée, elle, par la prise de spectre). Si l'on s'en tient à l'interprétation physique (1.57) de la valeur approchée $x(t_0)$ du signal analogique $t \mapsto x(t)$ à l'instant t_0 , il est donc raisonnable de « dériver » ce signal analogique en le signal

$$(1.58) \quad t_0 \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{dt} \varphi_{t_0, \epsilon}(t) dt := - \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d\varphi_{t_0, \epsilon}}{dt} dt, \quad \epsilon \ll 1.$$

Il faut noter que dériver à un ordre de plus en plus grand la fonction « test » φ fait apparaître des trains d'onde de plus en plus longs (comme on l'a observé en comparant les graphes des dérivées successives d'une gaussienne, voir la figure 1.1). On définit en tout cas ainsi (avec (1.58)) formellement un *signal analogique dérivé* dx/dt , et l'on peut continuer cette opération indéfiniment : par exemple, si H désigne la fonction d'Heaviside (valant, on le rappelle, 0 si $t < 0$ et 1 si $t \geq 0$) on a $dH/dt = \delta(t)$: en effet, si on fait le « test » sur une fonction φ localisée près de t_0 (comme notre gaussienne $\varphi = \varphi_{t_0, \epsilon}$ lorsque ϵ est très petit), on trouve²³

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H'(t) \varphi(t) dt &\stackrel{\text{par définition}}{=} - \int_{\mathbb{R}} H(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt \\ &= -(\varphi(+\infty) - \varphi(0)) = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) d\delta(t). \end{aligned}$$

23. C'est le calcul heuristique que faisait le physicien Paul Dirac avant que les mathématiciens ne lui donnent plus tard un sens.

Suivant ce procédé d'intégration par parties, le spectre de dx/dt (si tant est que l'on peut lui donner un sens) serait défini (tout au moins formellement) comme le signal

$$f \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{dt} e^{-2j\pi ft} dt.$$

Le jeu de l'intégration par parties (opéré pour définir le signal dérivé dx/dt en (1.58)) peut être repris ici et l'on a donc formellement, pour $f \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{dt} e^{-2j\pi ft} dt = - \int_{\mathbb{R}} x(t) (-2j\pi f) e^{-2j\pi ft} dt = 2j\pi f \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt.$$

Ainsi, le spectre du signal dérivé dx/dt (lorsque l'on peut lui donner un sens) s'obtient en multipliant par $f \mapsto 2j\pi f$ le spectre X du signal analogique x . On peut retenir donc les formules :

$$(1.59) \quad \text{spectre} \left[\frac{d^k x}{dt^k} \right] (f) = (2j\pi f)^k X(f), \quad X = \text{spectre}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

REMARQUE 1.3. On retrouve ici quelque chose de prévisible intuitivement : en dérivant un signal, on amplifie le spectre aux hautes fréquences car on le multiplie par le signal $f \mapsto (2j\pi f)^k$. On crée donc de plus en plus de bruit aux hautes fréquences en amplifiant le bruit (par exemple de mesure ou autre, souvent aléatoire) qui existait dans le signal avant que l'on ne se mette à le dériver.

EXEMPLE 1.3. Par exemple, comme on a vu que $H'(t) = \delta(t)$, on a en prenant les spectres et en utilisant (1.60), $(2j\pi f) \times (\text{spectre } H)(f) \equiv 1$, ce qui est bien cohérent avec le fait que

$$\text{spectre}[H] : f \mapsto \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{2j\pi} \text{VP} \left[\frac{1}{f} \right]$$

(formule (1.56)) puisque, naturellement $f \times \text{VP}[1/f] \equiv 1$ et $f \times \delta(f) = 0$.

On se contentera de savoir ici que cette définition du spectre d'un signal analogique est licite pour un signal analogique correspondant à la distribution sur \mathbb{R} d'une mesure de manière à ce que la masse de $[-T, T]$ soit contrôlée en CT^M pour un certain M lorsque T tend vers l'infini, et bien sûr ensuite pour toutes les dérivées de ce signal mesure. Les signaux analogiques de ce type sont dits *tempérés*.

Si x est un signal tempéré, tout signal de la forme $t \mapsto t^k x(t)$ est encore tempéré. De plus, le spectre du signal $t \mapsto t^k x(t)$ s'obtient en multipliant par $-1/(2j\pi)$ le signal dX/df . On a donc les formules :

$$(1.60) \quad \text{spectre}[t^k x(t)](f) = \left(\frac{-1}{2j\pi} \right)^k \frac{d^k X}{df}(f), \quad X = \text{spectre}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

REMARQUE 1.4. Il existe des signaux qui ne sont pas tempérés, et pour lesquels, quoique l'on fasse, on ne pourra jamais parler de spectre : par exemple $t \mapsto e^{|t|}$, $t \mapsto e^{t^2}$, $t \mapsto H(t) e^{at}$ avec $a > 0$. Pour de tels signaux analogiques, les formules (1.59) ou (1.60) sont sans objet. Évidemment, de tels signaux, « explosant exponentiellement » à l'infini, n'ont guère de réalité physique, tout au moins en ce qui concerne l'analyse et le traitement des signaux.

1.2. Opérations sur les signaux analogiques et prise de spectre

1.2.1. Quelques opérations simples sur les suites numériques finies

Si $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ et $[y_0, y_1, \dots, y_{M-1}]$ sont deux suites finies déclarées toutes deux comme des vecteurs ligne, essayons de dresser dans cette sous-section la liste des opérations naturelles que l'on peut effectuer de manière à combiner ces deux suites pour en fabriquer une troisième.

Lorsque les suites sont de longueur différente ($M \neq N$) et que l'on se refuse à envisager de faire du **zeropadding** pour les ajuster à la même longueur, le choix pour une opération naturelle est très limité. Il en est une pourtant essentielle, sortie en droite ligne du traitement de l'information. On attache aux deux suites les deux polynômes en une variable²⁴ :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k X^k \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{M-1} y_k X^k$$

et l'on forme le produit :

$$(1.61) \quad P(X)Q(X) = \sum_{n=0}^{N+M-2} z_n X^n = \sum_{n=0}^{N+M-2} \left(\sum_{k+\ell=n} x_k y_\ell \right) X^n.$$

Au couple constitué de la suite x (de longueur $N \geq 1$) et de la suite y (de longueur $M \geq 1$), on associe la suite $z = (z_n)_{n=0, \dots, N+M-2}$ (de longueur $N + M - 2 + 1 = N + M - 1$) :

`>> z = conv(x, y);`

Cette opération majeure en traitement de l'information (et évidemment, par voie de conséquence, en analyse et traitement des signaux et des images) est dite *convolution discrète* des deux suites finies x et y (on note le résultat $z = x * y$). On remarque que, pourvu que l'on décide de prolonger les deux suites x et y en des suites indexées par \mathbb{Z} , on trouve

$$(1.62) \quad z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(bien sûr z_n vaut alors 0 lorsque n n'est pas dans la liste $\{0, \dots, N + M - 2\}$).

Lorsque $M = N$, on peut aussi introduire une version cyclique de cette transformation, définie ainsi : aux deux suites $x = [x_0, \dots, x_{N-1}]$ et $y = [y_0, \dots, y_{N-1}]$, on associe la suite $[\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{N-1}]$ obtenue ainsi :

$$P(X)Q(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}_n X^n \quad \text{modulo} \quad X^N - 1$$

(on divise $P(X)Q(X)$ par $X^N - 1$ suivant la division euclidienne et on ne conserve que le reste, de degré au plus $N-1$). Cela revient à périodiser les suites $[x_0, \dots, x_{N-1}]$ et $[y_0, \dots, y_{N-1}]$ toutes les deux en des suites N -périodiques \tilde{x} et \tilde{y} définies cette fois sur \mathbb{Z} et à poser :

$$(1.63) \quad \tilde{z}_n := \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_k \tilde{y}_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_{n-k} \tilde{y}_k, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

²⁴. C'est une idée plutôt d'informaticien, que l'on retrouvera plus loin dans ce cours lorsque nous introduirons la « z -transformée » d'un signal à temps discret.

Cette nouvelle opération (entre deux suites de même longueur x et y , toutes deux de longueur N) est dite N -convolution cyclique. Elle fournit en sortie une suite, elle aussi de même longueur N que les deux suites x et y en jeu. On l'implémente ainsi sous MATLAB :

```
>> tildez = cconv (x,y,N);
```

On note le résultat $\tilde{z} = x *_N y$.

Lorsque les signaux x et y ont même longueur, les deux autres opérations naturelles sont bien sûr la prise de combinaison linéaire $\lambda x + \mu y$ et la multiplication terme à terme $x \otimes y$.

1.2.2. Transposition des opérations du cadre discret au cadre analogique

Si x et y sont deux signaux analogiques sur \mathbb{R} (au sens « physique » du terme, ce qui signifie que l'on inclut non seulement les signaux fonctions, mais aussi les signaux « mesure » comme l'impulsion $t \mapsto \delta(t)$, voire des signaux « tempérés tels que $\text{VP}[\frac{1}{t}]$), on peut en prendre n'importe quelle combinaison linéaire à coefficients complexes $\lambda x + \mu y$. La prise de spectre, si elle est possible à la fois pour x et y (c'est-à-dire si x et y sont des signaux analogiques tempérés, soit des dérivées de signaux « mesure » à croissance de masse raisonnable) respecte cette linéarité. Le spectre de $\lambda x + \mu y$ est la combinaison correspondante des spectres.

En revanche, la multiplication « terme-à-terme » n'est possible que dans des cas particuliers. On ne peut par exemple pas donner un sens à $\delta(t) \times \delta(t)$. Ces cas sont les suivants :

- lorsque x et y sont deux signaux fonctions localement d'énergie finie, il n'y a pas de problème ; le produit $x * y$ est naturellement défini comme signal analogique-fonction produit de x et de y ; la répartition de masse correspondante donne une masse finie près de chaque point ;
- lorsque x est un signal fonction régulier (au moins continu au sens mathématique du terme) et que y est un signal mesure, pas de problème non plus : par exemple $x(t) \times \delta(t) = x(0) \delta(t)$;
- lorsque x est un signal fonction très régulier (une fonction indéfiniment dérivable) et que y est un signal analogique tempéré, on peut encore définir $x \otimes y$.

Les autres cas posent problème en général. Ce n'est pas un problème simple, ni du point de vue physique, ni du point de vue mathématique ! De plus, même dans le cas des signaux-fonctions, le produit de deux signaux stable n'est pas stable ! Seul cas à tenir la route vraiment : le produit de deux signaux d'énergie finie est un signal stable car

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)y(t)| dt \leq \|x\|_2 \times \|y\|_2.$$

Faire le produit de deux signaux analogiques s'avère donc une opération très délicate.

En revanche, la *convolution des signaux analogiques* est une opération beaucoup plus raisonnable, au moins dans le cadre des signaux-fonction. Elle est définie dans ce cas formellement par

$$(1.64) \quad x * y : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t - \tau) d\tau,$$

ce en accord avec la définition (1.62) introduite plus haut. Cette définition pour l'instant formelle a un sens au moins dans trois cas importants :

- lorsque x et y sont des signaux stables, on définit « vraiment » avec (1.64) un nouveau signal analogique stable $x * y$, tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |x * y(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt \times \int_{\mathbb{R}} |y(t)| dt.$$

- lorsque x est stable et y est d'énergie finie, on définit « vraiment » avec (1.64) un signal analogique-fonction $x * y$ qui est encore d'énergie finie, avec même

$$\|x * y\|_2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt \right) \|y\|_2.$$

- lorsqu'enfin x et y sont tous deux d'énergie finie, on définit « vraiment » avec (1.64) un signal analogique-fonction $x * y$ qui est en fait un signal borné, avec

$$\sup_{\mathbb{R}} |x * y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Dans ces trois cas, « définir vraiment » signifie que, si \mathbb{R} (dans l'intégrale (1.64)) est tronqué à $[-T, T]$, les signaux

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-T}^T x(\tau) y(t - \tau) d\tau, \quad T > 0,$$

sont des signaux fonction $x_T * y$ parfaitement définis (stables dans le premier cas, d'énergie finie dans le second, bornés en module dans le troisième) et que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |x_T * y(t) - x * y(t)| dt &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \|x_T * y - x * y\|_2 &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |x_T * y - x * y| &= 0 \end{aligned}$$

suivant le cas considéré.

Dans ce contexte, on a la propriété très importante suivante.

PROPOSITION 1.3 (spectre de la convolée de deux signaux fonctions). *Si x et y sont deux signaux analogiques (fonctions) stables de spectres X et Y , le signal analogique convolé est aussi stable et de spectre $X \otimes Y$, c'est-à-dire :*

$$(1.65) \quad \text{spectre}(x * y) : f \in \mathbb{R} \mapsto X(f) Y(f).$$

*Si x est stable et y d'énergie finie, $x * y$ est encore d'énergie finie et la formule (1.65) persiste à être valable. Si x et y sont tous deux d'énergie finie, $x * y$ est un signal analogique fonction borné en module et dont le spectre est le signal analogique stable $X \otimes Y$ (autrement dit, dans ce cas encore, la formule (1.65) perdure).*

DÉMONSTRATION. On peut s'en convaincre numériquement en utilisant le **dft**. La preuve repose surtout sur le fait que l'exponentielle vérifie $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$. Cette proposition constitue la version continue des formules (1.61), dans lesquelles on remplace X par le $W_N = \exp(-2j\pi/N)$ impliqué dans l'algorithme de **dft**, avec N très grand. \square

REMARQUE 1.5. Si x est un signal analogique tempéré et y un signal analogique (non nécessairement fonction ni même mesure) vivant complètement dans un segment $[-T, T]$, on peut donner un sens à

$$x * y : t \mapsto \int_{-T}^T x(\tau) y(t - \tau) d_t au$$

et le spectre de ce signal est égal au produit $X \otimes Y$, où X est le spectre de x (c'est une fonction très régulière) et Y le spectre du signal analogique y . Par exemple, on peut prendre pour x le signal analogique $d^k \delta / dt^k$ et pour y un signal analogique quelconque, auquel cas $x * y = d^k y / dt^k$. On voit sur cet exemple que la formule (1.65) est bien encore valide (regarder par exemple les formules (1.59)).

1.3. Signaux à temps discret

1.3.1. Signaux à temps discret stables ou d'énergie finie

Comme on l'a souligné dans la section 1.1, les signaux analogiques correspondent dans la pratique à des signaux physiques mesurés, puis échantonnés. Il s'agit donc nécessairement de signaux analogiques échantonnés, ce à une fréquence F exprimée en Hertz (et communiquée en même temps que le signal lorsque celui-ci est par exemple rapatrié au format `wavread`). Bien sûr, il résulte du théorème de Shannon que toutes les fréquences f du « vrai » signal analogique x_{analog} telles que $f > F_x/2$ se trouvent perdues lors de cet échantillonnage, au sens où le signal discret

$$(1.66) \quad x(n) = x_{\text{analog}}(n/F_x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

n'en rend pas compte (les phénomènes correspondant à de telles hautes fréquences, par exemple le bruit, oscillant trop vite, ont échappé à la lecture au pas d'échantillonnage $1/F_x$). Néanmoins, le signal discret $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue la seule information dont on dispose pour rendre compte du signal analogique x_{analog} , avec bien sûr aussi la valeur de la fréquence d'échantillonnage F_x qu'il convient d'avoir également mémorisé pour ne pas perdre de vue l'échantillonnage (dans un système d'unités) de la gamme fréquentielle du signal du point de vue physique.

Une telle suite $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ (de la forme (1.66)) est dite *signal à temps discret*.

Ceci nous conduit à la définition suivante, qui constitue le pendant discret de la définition 1.3.

DÉFINITION 1.8 (stabilité, finitude de l'énergie pour un signal à temps discret).
Un signal à temps discret $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit *stable* si l'on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < +\infty.$$

Il est dit *d'énergie finie* lorsque l'on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 < +\infty,$$

auquel cas l'énergie du signal est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2$.

Cette fois, *tout signal à temps discret stable est d'énergie finie*. La classe des signaux à temps discret d'énergie finie englobe les signaux à temps discret stables comme signaux particuliers.

Il y a essentiellement deux raisons pour lesquelles il est plus intéressant de se concentrer sur la classe des signaux à temps discret d'énergie finie, outre le fait qu'elle soit plus large que celle des signaux à temps discrets stables :

- La première est que l'on dispose d'une *corrélation* entre signaux d'énergie finie à temps discret, définie par

$$(1.67) \quad \langle x, y \rangle = \langle (x(n))_n, (y(n))_n \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) y^*(n).$$

On pourra donc exploiter dans ce cadre toute la force de l'algorithmique fondée sur le théorème de Pythagore et la possibilité de « projeter orthogonalement » sur un sous-espace ou une partie convexe (pourvu qu'ils soit « fermés », c'est-à-dire saturés par la prise de limite au sens de l'énergie).

- Si la fréquence d'échantillonnage F est connue et que l'on dispose d'un « motif » analogique d'énergie finie φ_F qui soit assez bien localisé près de l'origine des temps (disons dans $[-1/F, 1/F]$) et tel que le système $(\varphi_F(t - n/F))_{n \in \mathbb{Z}}$ soit un système orthonormé de signaux analogiques, on peut revenir du discret au continu en associant au signal à temps discret d'énergie finie $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ le signal analogique :

$$\tilde{x}_{\text{analog}, \varphi_F} : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \varphi_F(t - n/F).$$

De tels exemples de motifs φ_F sont par exemple la fonction $t \mapsto \pi_1(Ft)$, ou bien $t \mapsto \text{sinc}(Ft)$ (notons que sinc est le spectre de π_1 et que par conséquent le motif φ_F dans ce second cas est plus régulier qu'il ne l'est dans le premier). Il est intéressant de relever ici que l'utilisation de $\varphi_F : t \mapsto \text{sinc}(Ft)$ est justement en accord avec la formule de Shannon (1.39) (ce serait même exactement le signal analogique dont le signal à temps discret $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ provient si toutefois celui-ci n'avait pas de composante fréquentielle au dessus du seuil de $F/2$).

REMARQUE 1.6. Tout signal à temps discret d'énergie finie s'« évanouit » à l'infini, au sens où $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |x(n)| = 0$.

1.3.2. Prise de spectre des signaux à temps discret d'énergie finie ; relations de Parseval

En accord avec les définitions du spectre d'un signal analogique stable (définition 1.4), puis du spectre d'un signal analogique d'énergie finie (définition 1.7), on introduit l'opération de prise de spectre pour les signaux à temps discret.

DÉFINITION 1.9. Si $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal à temps discret stable, son spectre est la fonction 1-périodique

$$\nu \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-2j\pi\nu n}.$$

Cette fonction est continue au sens mathématique du terme et bornée en valeur absolue par $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|$. Lorsque $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal à temps discret qui est seulement d'énergie finie (mais n'est plus stable), on pose, pour $N_1, N_2 > 0$,

$$X_{N_1, N_2} : \nu \mapsto \sum_{n=-N_1}^{N_2} x(n) e^{-2j\pi\nu n}$$

et l'on définit le spectre de x comme le signal 1-périodique X d'énergie finie sur $[-1/2, 1/2]$ défini par

$$(1.68) \quad \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu) - X_{N_1, N_2}(\nu)|^2 d\nu = 0,$$

ce que l'on convient d'écrire formellement

$$X \simeq: \nu \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-2j\pi\nu n},$$

mais qu'il faut bien veiller à interpréter comme (1.68), seule formulation ayant rigoureusement un sens.

Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème de Shannon (jeu de relations de Parseval (1.50) dans le cadre discret, avec ici $f_e = 1$), on observe que l'on a un nouveau jeu de relations de Parseval dans ce cadre :

PROPOSITION 1.4 (relations de Parseval pour deux signaux à temps discret d'énergie finie). *Si $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux signaux à temps discret d'énergie finie, de spectres respectivement les signaux analogiques 1-périodiques X et Y , on a la relation de Parseval :*

$$(1.69) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)y^*(n) = \langle X, Y \rangle_{\text{per},1} = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu.$$

Dans le contexte discret, la formule d'inversion est immédiate. Elle s'énonce ainsi.

PROPOSITION 1.5 (formule d'inversion pour la prise de spectre des signaux à temps discret d'énergie finie). *Si $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal à temps discret d'énergie finie, la restitution de x à partir de son spectre se fait par les formules :*

$$(1.70) \quad x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{-2\pi j\nu n} d\nu \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.3.3. Multiplication terme à terme et prise de spectre (en discret)

Si $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux signaux à temps discret, on peut leur associer le signal à temps discret $x \otimes y$ défini par

$$(x \otimes y)(n) = x(n)y(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque le signal y est un signal borné ($\sup_n |y(n)| < +\infty$) le produit ainsi défini d'un signal à temps discret x d'énergie finie par le signal à temps discret y reste d'énergie finie. Ceci se produit dès que y est un signal d'énergie finie (puisque alors $y(n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \pm\infty$, voir la remarque 1.6). On a l'importante règle de calcul suivante :

PROPOSITION 1.6 (spectre du produit terme-à-terme de deux signaux à temps discret d'énergie finie). *Si x et y sont deux signaux à temps discret d'énergie finie, de spectres respectifs X et Y , le spectre du signal $x \otimes y$ est le signal 1-périodique :*

$$(1.71) \quad \text{spectre } [x \otimes y] : \nu \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} X(\xi) Y(\nu - \xi) d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu - \xi) Y(\xi) d\xi,$$

l'intégrale figurant au second membre étant toujours une intégrale convergente. La fonction définie sous forme intégrale au second membre de (1.71) est dite « convoluée » (on dit parfois aussi « convoluée ») au sens 1-périodique²⁵ des deux signaux analogiques 1-périodiques X et Y figurant respectivement ici les spectres des signaux à temps discret x et y .

DÉMONSTRATION. Il suffit juste de calculer la suite des nombres

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-1/2}^{1/2} X(\xi) Y(\nu - \xi) d\xi \right) e^{-2j\pi n\nu} d\nu, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et d'observer que l'on retrouve justement la suite $(x(n)y(n))_{n \in \mathbb{Z}} = ((x \otimes y)(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. On conclut avec la formule d'inversion (proposition 1.5). \square

Évidemment, tous les signaux à temps discret borné ne sont pas d'énergie finie ! Par exemple, le signal constant $x(n) = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) n'est pas d'énergie finie. Pour donner un sens à son spectre, il faut l'approcher par des signaux à temps discret du type :

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto \exp(-\pi N^2 n^2), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

En examinant la suite des spectres de ces signaux approchant, on se convainc du fait que

$$(1.72) \quad \text{spectre} [\dots 1, \overset{0}{1}, 1, \dots](\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - k),$$

où δ est l'impulsion de Dirac à l'origine. La formule (1.71) reste alors valide. Ceci est en accord avec le fait que le spectre du signal à temps discret $[\dots, 0, 1, 0, \dots]$ ($x(n) = 0$ si $n \neq 0$, $x(0) = 1$), qui, lui, est un signal stable, est la fonction 1 :

$$(1.73) \quad \text{spectre} [\dots 0, \overset{0}{1}, 0, \dots](\nu) = 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Une fois encore, la formule (1.71) reste valide.

On observe de même que

$$(1.74) \quad \text{spectre} [\dots, -1/3, -1/2, 1, \overset{0}{0}, 1, 1/2, 1/3, \dots](\nu) = -j\pi \text{sign}(\nu) \quad \forall \nu \in [-1/2, 1/2[.$$

Le spectre du signal borné

$$\text{signediscret} := [\dots, -1, -1, \overset{0}{0}, 1, 1, \dots]$$

est, en revanche, un signal plus compliqué, à savoir le signal périodique

$$(1.75) \quad \text{spectre} [\text{signediscret}] : \nu \mapsto -\frac{j}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{VP} \left[\frac{1}{\nu - k} \right].$$

Ce spectre (pourtant dans la pratique fort utile, en relation, on le verra, avec la fonction d'Heaviside vue comme signal à temps discret) est un signal analogique 1-périodique, mais ce n'est ni un signal analogique fonction, ni même (pire !)

25. Pour deux signaux T -périodiques X et Y (d'énergie finie sur $[-T/2, T/2]$), la convoluée T -périodique est par définition la fonction $\nu \mapsto (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} X(\xi) Y(\nu - \xi) d\xi$. Il s'agit d'une « moyenne glissante » des valeurs de X sur $[-T/2, T/2]$ pondérées par celles de Y . On peut songer à faire glisser le graphe de Y dessiné sur une feuille de papier calque le long du graphe de X pour visualiser l'effet d'une telle moyennisation glissante.

un signal mesure²⁶! Le spectre de la fonction d'Heaviside discrète s'en déduit immédiatement :

$$(1.76) \quad \text{spectre} [\dots 0 \ 1/2, 1 \dots] : \nu \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - k) + \frac{1}{2j\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{VP} \left[\frac{1}{\nu - k} \right].$$

Une fois encore, ce spectre est un signal analogique 1-périodique, mais ce n'est ni un signal-fonction, ni même (pire!) un signal-mesure²⁷! Ces formules sont les versions dans le cadre discret des formules (1.55) et (1.56) vues précédemment.

En ce qui concerne la multiplication terme-à-terme par le signal $(n^k)_{n \in \mathbb{Z}}$ ($k = 1, 2, \dots$), on peut faire la même remarque que dans le cas analogique :

$$(1.77) \quad \text{spectre} \left((n^k)_{n \in \mathbb{Z}} \cdot x \right) : \nu \mapsto \left(\frac{-1}{2j\pi} \right)^k \frac{d^k X}{d\nu^k}(\nu),$$

(où la dérivation des signaux analogiques à droite est entendue au sens « physique » comme nous l'avons expliqué plus haut dans la section 1.1.11, cf. la formule (1.60) dans le cadre analogique); ici X désigne le spectre (analogique 1-périodique) du signal à temps discret $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Si l'on introduit maintenant les opérateurs de dérivation discrète D^+ (à droite), D^- (à gauche) et D (bilatéral) respectivement définis par

$$D^+[(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}] = (x(n+1) - x(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \quad D^-[(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}] = (x(n) - x(n-1))_{n \in \mathbb{Z}}$$

et $D = (D^+ + D^-)/2$, on trouve immédiatement les relations :

$$(1.78) \quad \begin{aligned} \text{spectre} [(D^+)^k(x)] : \nu \mapsto (e^{2j\pi\nu} - 1)^k X(\nu) &= (2j)^k e^{j\pi k\nu} (\sin(\pi\nu))^k X(\nu) \\ \text{spectre} [(D^-)^k(x)] : \nu \mapsto (1 - e^{-2j\pi\nu})^k X(\nu) &= (2j)^k e^{-j\pi k\nu} (\sin(\pi\nu))^k X(\nu) \\ \text{spectre} [D^k(x)] : \nu \mapsto \left(\frac{e^{2j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu}}{2} \right)^k X(\nu) &= j^k (\sin(2j\pi\nu))^k X(\nu). \end{aligned}$$

Il s'agit là de la transposition (au cadre des signaux à temps discret) des formules (1.59) établies, elles, dans le cadre des signaux analogiques.

1.3.4. Un souci pratique : le problème du fenêtrage

Le calcul du spectre d'un signal à temps discret $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ s'avère dans la pratique irréalisable, car on ne dispose en réalité que d'un nombre fini de valeurs échantillonnées $x(n)$ (disons entre $-N_1$ et N_2 , avec N_1 et N_2 tous les deux grands certes, mais pas trop cependant ...). Il faut donc « tronquer » le signal discret avant que d'effectuer le calcul. On introduit pour cela une *fenêtre de troncature*, c'est-à-dire un signal discret $(w_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que $w_N(n) = 0$ si $|n| > N$ et l'on « approche » le spectre de x par celui du signal $x * w_N := (x(n)w_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

D'après la proposition 1.6, le spectre du signal $x \otimes w_N$ est le signal analogique :

$$\nu \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu - \xi) W_N(\xi) d\xi,$$

26. Dans la pratique, on se fixe un seuil $\epsilon \ll 1$ et l'on assigne à ce signal 1-périodique la valeur 0 dans tous les segments $[k - \epsilon/2, k + \epsilon/2]$, $k \in \mathbb{Z}$.

27. Même commentaire que dans l'exemple précédent, pour ce qui concerne le signal Valeur Principale impliqué ici.

où

$$W_N(\nu) = \sum_{n=-N}^N w_N(n) e^{-2\pi j\nu n}.$$

Le cas le plus simple est celui de la coupure « brutale » :

$$(1.79) \quad w_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, le spectre W_N est donné par :

$$(1.80) \quad \text{spectre } [\dots, 0, \overset{-N}{1}, \dots, \overset{N}{1}, 0, \dots] : \nu \mapsto \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Le problème avec le graphe de cette fonction est que, quand bien même l'intégrale sur $[-1/2, 1/2]$ est égale à 1, elle présente un lobe positif marqué, mais deux lobes latéraux d'amplitude significative.

Pour prendre conscience du problème, exploitons la routine `MATLAB` suivante, qui, étant donné un signal à temps discret $\mathbf{x} = [\mathbf{x}(-K) : \dots : \mathbf{x}(K-1)]$ (donc de longueur $2*K$), donné ici en colonne, renvoie les valeurs de son spectre aux points $\nu[-1/2 : 1/(2*K) : 1/2 - 1/(2*K)]$. Voici cette routine (évidemment uniquement à base de la routine `fft` opérant ici la transformation de Fourier discrète `dft2K`) :

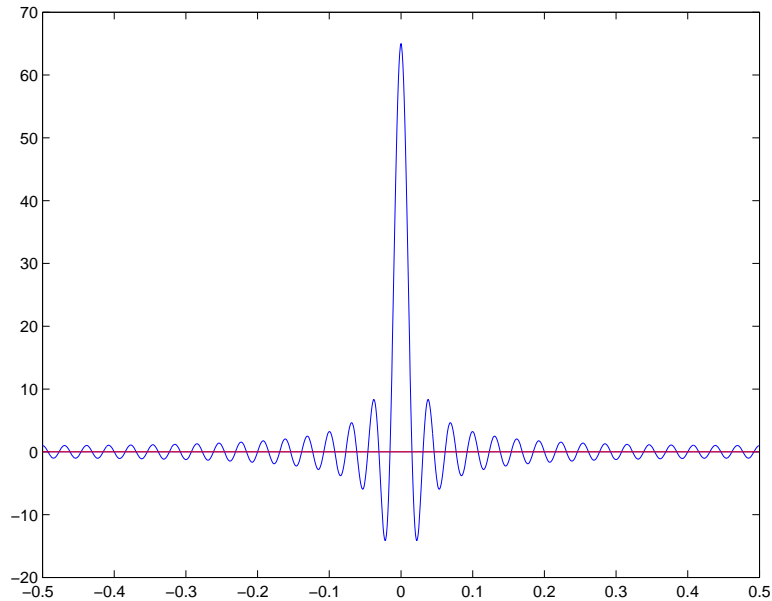
```
function X = spectretempsdiscret(x,K);
```

```
w=ones(2*K,1);
for k=1:2:2*K
    w(k)=-w(k);
end
u=fft(x);
u=w.*u;
u1=u(1:K);
u2=u(K+1:2*K);
X=[u2;u1];
```

On l'exploite de la manière suivante. Étant donné un signal digital de longueur $2*N+1$ (correspondant à la liste des valeurs $[\mathbf{x}(-N), \dots, \mathbf{x}(N)]$, on choisit un entier `NN` grand et l'on complète le signal digital \mathbf{x} (initialement de longueur $2*N+1$ car correspondant à des valeurs prises sur la « grille » $[-N:1:N-1]$) par des zéros à gauche et à droite (`zeropadding`) de manière à disposer cette fois d'un signal digital au dessus de la grille $[-NN-N : 1 : NN+N-1]$, dont on calcule ensuite le spectre sur la grille $\mathbf{t} = [-1/2 : 1/(2*(N+NN)) : 1/2 - 1/(2*(N+NN))]$ comme suit :

```
>> xx = [zeros(NN,1); x ; zeros(NN-1,1)];
>> X = spectretempsdiscret(xx,NN+N);
```

On fait ici deux tests, le premier à partir du signal digital w_N donné par (1.79), par exemple avec $N=32$ et $NN=512$. On retrouve bien le signal (1.80) attendu, avec ici $N=32$. (voir la figure 1.4, où l'on a affiché partie réelle et partie imaginaire). Prenons maintenant le signal `signe` entre -128 et 128 et affichons le calcul de la partie réelle et imaginaire du spectre obtenu *via* la routine `spectretempsdiscret` (on a pris encore $NN=512$). La partie réelle devrait correspondre à $\delta(t)/2$, tandis que la

FIGURE 1.4. Parties réelle et imaginaire du spectre de w_{32} ($NN=512$)

partie imaginaire devrait être le signal $-\text{VP}[\frac{1}{t}]/(2\pi)$. On observe que cette distribution valeur principale apparaît ici de manière anormalement oscillante (même si la « ligne médiane » correspond à l'évolution en $-1/t$ attendue).

Pour corriger ce problème, on corrige la fenêtre w_N en une fenêtre dont le spectre se présente sous la forme de la combinaison barycentrique suivante (de W_N et de ses translatés à gauche et à droite) :

$$W_{N,\alpha} : \nu \mapsto \alpha W_N(\nu) + (1 - \alpha)[W_N(\nu - 1/(2N + 1)) + W_N(\nu + 1/(2N + 1))].$$

La valeur du paramètre $\alpha \in]0, 1[$ se trouve ajustée de manière à ce que soient « compensés » sur le graphe de $W_{N,\alpha}$ les premiers lobes latéraux négatifs, ce sans que le lobe central ne se retrouve trop « épaissi ». Il s'agit donc d'un compromis. La minimisation du rapport d'aire entre aire du lobe latéral et aire du lobe central est réalisé pour $\alpha = .54$, ce qui correspond au fenêtrage introduit par Richard Hamming (Julius Hanning proposait initialement $.5$). Les fenêtres dites de Hamming sont devenues d'usage courant dans les questions liées au délicat problème de la troncature à l'infini des signaux à temps discret. Les résultats pour le calcul des parties réelles et imaginaires du spectre de **signe** (tronqué par la fenêtre w_{128} , c'est-à-dire la fenêtre rectangulaire de 257 points dans un premier temps, puis par la fenêtre `hamming(257)` dans un second temps, ont été affichés respectivement sur les figures 1.5 et 1.6 ci-dessous. Sur la figure 1.7 ci-dessous, on a confronté le spectre de la fenêtre rectangulaire w_{128} avec le spectre de la fenêtre de Hamming `hamming(257)` pour visualiser l'optimisation recherchée en terme d'affaiblissement des lobes latéraux et de « gonflement » raisonnable du lobe central. Cette question du fenêtrage s'avère importante en analyse du signal : en présence d'une irrégularité due à la fenêtre de troncature w_N (et non au signal lui-même), le spectre se trouve de fait convolé avec le spectre de W_N . Il suffit de penser à faire glisser le graphe

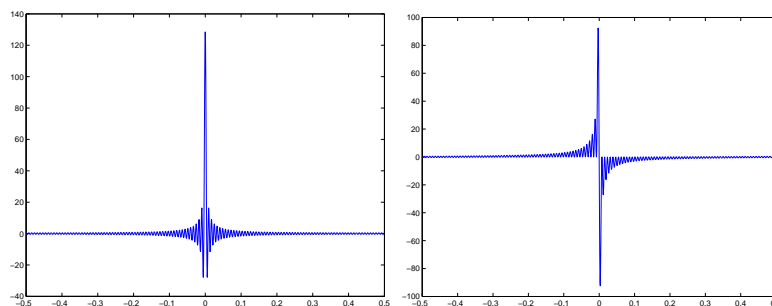


FIGURE 1.5. Parties réelle et imaginaire du spectre de `rect(257).*signe (NN=512)`

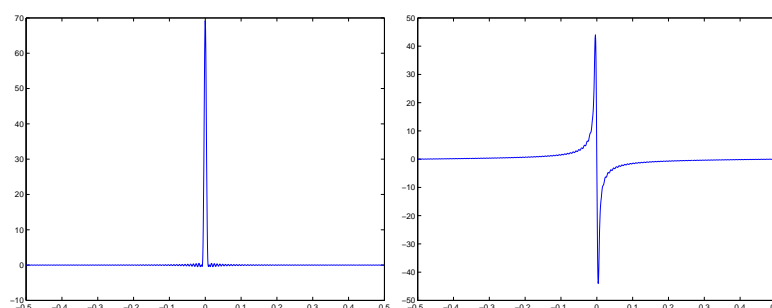


FIGURE 1.6. Parties réelle et imaginaire du spectre de `hamming(257).*signe (NN=512)`

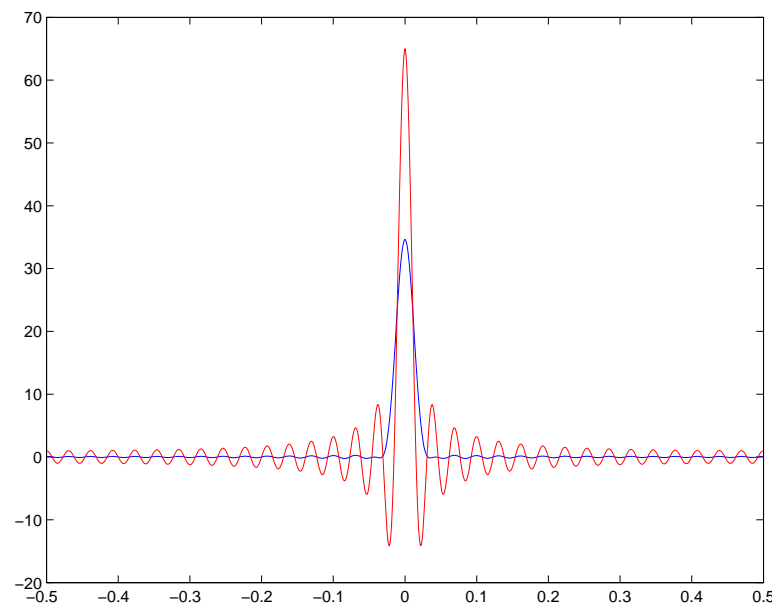


FIGURE 1.7. Comparaison du spectre de `w128` et du spectre de `hamming(257)` (`NN=512`)

de W_N le long de ce qui devrait être le graphe du spectre X pour se convaincre que, dès que le graphe de X présente un « saut » (ou irrégularité), par exemple « saute » en un point ν_0 d'une valeur ν_0^- à une valeur strictement plus grande ν_0^+ , alors le signal convolé $X * W_N$ est affaibli par rapport à X pour ν voisin de ν_0 par valeurs inférieures, rehaussé par rapport à X pour ν voisin de ν_0 par valeurs supérieures. Lorsque N augmente, l'occurrence de ce phénomène se rapproche certes de ν_0 , mais son amplitude reste constante. C'est le phénomène d'*aliasing* (dit aussi *phénomène de Gibbs* en mathématiques). Le corriger (par justement le fenêtrage « adouci » du type Hamming), s'avère dans la pratique incontournable.

1.3.5. Diverses notions de corrélation entre signaux à temps discret (un point de vue statistique)

Étant donnés deux signaux x et y à temps discret et d'énergie finie, leur corrélation est, rappelons le, le produit scalaire

$$(1.81) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu) d\nu.$$

Lorsque x est un signal à temps discret d'énergie finie, le fait de disposer d'une corrélation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace des signaux d'énergie finie permet d'associer à tout tel signal x un nouveau signal à temps discret, dit *fonction d'autocorrélation* de x défini par :

$$(1.82) \quad \text{corr}(x, x) : k \in \mathbb{Z} \mapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_{k+\ell} x_{\ell}^*.$$

Étant donnés deux signaux d'énergie finie, on peut également définir leur fonction d'*intercorrélation*.

$$(1.83) \quad \text{corr}(x, y) : k \in \mathbb{Z} \mapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_{k+\ell} y_{\ell}^*.$$

Malheureusement, les signaux à temps discret ne sont bien souvent pas d'énergie finie ! Ils ne le sont que sur des fenêtres de longueur finie M , fenêtres que l'on peut positionner arbitrairement dans \mathbb{Z} : tel est le cas des signaux qui seront pour nous pourtant essentiels, comme les signaux périodiques élémentaires :

$$k \in \mathbb{R} \mapsto e^{2j\pi k_0 k / F}, \quad -[F/2] \leq k_0 \leq [F/2] - 1$$

(lorsque F est la fréquence en Hertz des signaux analogiques dont sont issus les signaux à temps discret avec lesquels on travaille).

Il faut donc ainsi élargir cette notion trop contrainte ici de corrélation. Pour une certaine position de la fenêtre (initiée par exemple à l'instant temporel k_{int}), on définit de manière naturelle une *corrélation fenêtrée* par

$$\langle x, y \rangle_{k_{\text{int}}, M, \tilde{w}} = \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{w}_M(\ell) x(k_{\text{int}} + \ell) y^*(k_{\text{int}} + \ell),$$

où \tilde{w} désigne une fenêtre de troncature positive de longueur M (par exemple $\tilde{w} = w_M$, ou plutôt la fenêtre de hamming $\tilde{w} = \text{hamming}(M)$, ce de manière à ce que se trouvent amoindris les effets de bord inhérents à la troncature du signal à temps discret dans la fenêtre d'observation).

On peut également envisager sous cet angle « fenêtré » les notions d'autocorrélation et d'intercorrélations envisagées plus haut (en (1.82) et (1.83)). Lorsque x n'est plus un signal d'énergie finie, il convient à nouveau de travailler avec des fenêtres temporelles positionnées dans le temps (discret) à un instant initial k_{init} . Étant donné une telle valeur k_{init} et un entier M , on peut introduire le spectre du signal à temps discret obtenu en initialisant à $k = 0$ le signal $\mathbf{x}(k_{\text{init}} : 1 : k_{\text{init}} + M - 1)$ et en prolongeant ce signal ainsi tronqué par zéro ailleurs, après avoir éventuellement multiplié le signal (de longueur M) $\mathbf{x}(k_{\text{init}} : 1 : k_{\text{init}} + M - 1)$ par une fenêtre \tilde{w} de longueur M (par exemple `hamming(M)`) pour parer à la « brutalité » de la troncature. Ce spectre est donné par

$$X_{k_{\text{init}}, M, \tilde{w}} : \nu \mapsto \sum_{\ell=0}^{M-1} x(k_{\text{init}} + \ell) \tilde{w}(\ell) e^{-2j\pi\ell\nu}.$$

On remarque que

$$(1.84) \quad |X_{k_{\text{init}}, M, \tilde{w}}(\nu)|^2 = \sum_{k=-(M-1)}^{k=M-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq M-1 \\ \ell_1 - \ell_2 = k}} \tilde{w}(\ell_1) \tilde{w}(\ell_2) x(k_{\text{init}} + \ell_1) x^*(k_{\text{init}} + \ell_2) \right) e^{-2j\pi k\nu}.$$

La suite

$$(1.85) \quad \text{autocor}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}(k) = \sum_{\substack{0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq M-1 \\ \ell_1 - \ell_2 = k}} \tilde{w}(\ell_1) \tilde{w}(\ell_2) x(k_{\text{init}} + \ell_1) x^*(k_{\text{init}} + \ell_2), \\ k = -(M-1) : M-1$$

peut être interprétée comme un signal à temps discret (une fois prolongé par 0). Ce signal est appelée *autocorrélation fenêtrée* du signal (initiée à k_{init} , de longueur M , la fenêtre étant \tilde{w}). Lorsque $\tilde{w}(k) = 1$ pour $k = 0, \dots, M-1$ (ce qui correspond au choix de la fenêtre rectangulaire w_M), le calcul de cette suite, qui est de longueur $2(M-1) + 1 = 2M-1$, est fourni sous MATLAB par la routine `xcorr` :

```
>> X = xcorr(x([kinit:kinit+M-1]));
>> Xw = xcorr(x([kinit:kinit+M-1]).*w);
```

On peut envisager deux versions normalisées de cette autocorrélation, une version *non biaisée*, à savoir la suite

$$(1.86) \quad \frac{1}{M - |k|} \sum_{\substack{0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq M-1 \\ \ell_1 - \ell_2 = k}} \tilde{w}(\ell_1) \tilde{w}(\ell_2) x(k_{\text{int}} + \ell_1) x^*(k_{\text{int}} + \ell_2), \quad k = -(M-1) : M-1$$

(dite justement « sans biais » car la somme est divisée chaque fois exactement par le nombre de termes impliqués) et une version *biaisée*, d'usage plus commun (ce malgré le biais) :

$$(1.87) \quad \frac{1}{M} \sum_{\substack{0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq M-1 \\ \ell_1 - \ell_2 = k}} \tilde{w}(\ell_1) \tilde{w}(\ell_2) x(k_{\text{init}} + \ell_1) x^*(k_{\text{init}} + \ell_2), \quad k = -(M-1) : M-1.$$

Ces versions (biaisées ou non biaisée) de l'autocorrélation d'un signal rejoignent l'approche statistique où chaque $x(k)$ est en fait une variable aléatoire (voir le cours *Outils et modèles probabilistes en SI*). On retiendra dans le cadre déterministe la

formule (1.84), en particulier lorsque $\tilde{w} = w_M$ ($\tilde{w}(k) = 1$ pour tout k entre 0 et $M - 1$).

On définit de même, étant donnés deux signaux à temps discret x et y les notions d'*intercorrélacion fenêtrée* :

$$(1.88) \quad \sum_{\substack{0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq M-1 \\ \ell_1 - \ell_2 = k}} \tilde{w}(\ell_1) \tilde{w}(\ell_2) x(k_{\text{init}} + \ell_1) y^*(k_{\text{init}} + \ell_2), \quad k = -(M-1) : M-1$$

et les versions normalisées correspondantes (sans biais ou avec biais).

Ces notions nous permettent dans un premier temps d'introduire un ce qui sera un indicateur important du signal à temps discret, sa *densité spectrale de puissance*.

DÉFINITION 1.10 (psd²⁸ au sens de Welch). En choisissant M grand (tout en étant inférieur à la longueur du signal) et en moyennisant les fonctions positives

$$\nu \mapsto \frac{|X_{k_{\text{init}}, M, \tilde{w}}(\nu)|^2}{\|\tilde{w}\|_2^2} \quad (\text{length}(\tilde{w}) = M),$$

pour $k_{\text{init}} = -N_1 : N_2 - M + 1$, lorsque le signal à temps discret est donné sur la plage temporelle $[-N_1, N_2]$ (avec $N_2 - N_1 > M$ ²⁹), on obtient la *densité spectrale de puissance* (au sens de Welch) du signal à temps discret x . Cette densité spectrale de puissance s'avèrera un témoin précieux du contenu fréquentiel « en moyenne » (c'est-à-dire « statistique ») du signal à temps discret.

EXEMPLE 1.4 (un exemple simpliste, mais instructif). Si x est un signal à temps discret de la forme

$$x(k) = \sum_{k_0 \in \Lambda_0} a_{k_0} e^{2j\pi k_0 k / F}$$

où Λ_0 désigne un sous-ensemble fini de l'ensemble des entiers situés entre $-[F/2]$ et $[F/2] - 1$, on voit que l'autocorrélacion fenêtrée (puis normalisée, avec ou sans biais, peu importe ici) du signal ne dépend pas de la position de la fenêtrée (lorsque \tilde{w} est choisi comme la fenêtrée w_M) et vaut

$$k \in \mathbb{Z} \mapsto \sum_{k_0 \in \Lambda_0} a_{k_0} e^{2j\pi k_0 k / F}.$$

Le spectre de ce signal (s'il n'était pas tronqué entre $-(M-1)$ et $(M-1)$ comme il l'est ici) serait (d'après la proposition (1.1)) le signal 1-périodique (l'observer sur $[-1/2, 1/2[$ suffit) :

$$\nu \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k_0 \in \Lambda_0} a_{k_0} \delta(\nu - k - k_0 / F).$$

Si l'on prend pour fenêtrée la fenêtrée w_M , la densité spectrale de puissance est donc, pour une longueur M de fenêtrée donnée grande :

$$\text{psd} \left[k \mapsto \sum_{k_0 \in \Lambda_0} a_{k_0} e^{2j\pi k_0 k / F} \right] \sim M \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k_0 \in \Lambda_0} |a_{k_0}|^2 \delta(\nu - k - k_0 / F).$$

28. « psd » pour « Power Spectral Density ». On rend compte avec cette fonction du contenu spectral du signal du point de vue statistique, tout au contraire de l'outil (pourtant très proche) que sera le *spectrogramme* que nous introduirons plus loin.

29. Il est communément fait usage d'une marge d'« overlapping » sur les fenêtrées translátées ; on ne prend pas toutes les valeurs de k_{init} mais seulement les valeurs de p en p , avec $p > 1$.

Ceci explique bien, dans ce cas très simple, pourquoi la densité spectrale de puissance (au sens de Welch) s'avère un témoin du contenu fréquentiel du signal (fournissant la position des fréquences k_0/F dans $[-1/2, 1/2[$ en même temps que la détermination des amplitudes $|a_{k_0}|$ correspondantes).

Une matrice est appelée elle aussi à jouer un rôle important, c'est la *matrice d'autocorrélation fenêtrée*. Cette matrice est, la longueur de la fenêtre étant fixée,

$$(1.89) \quad \begin{bmatrix} \text{autocor}(0) & \text{autocor}(1) & \dots & \text{autocor}(M-2) & \text{autocor}(M-1) \\ \text{autocor}(-1) & \text{autocor}(0) & \dots & \text{autocor}(M-3) & \text{autocor}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{autocor}(-M+2) & \text{autocor}(-M+3) & \dots & \text{autocor}(0) & \text{autocor}(1) \\ \text{autocor}(-M+1) & \text{autocor}(-M+2) & \dots & \text{autocor}(-1) & \text{autocor}(0) \end{bmatrix},$$

où l'on a noté ici autocor la suite $\text{autocor}_{k_{\text{init}}, \bar{w}}(k)$, $k = -(M-1) : M-1$ et k_{init} la position initiale de la fenêtre de longueur M (notée ici w). Cette matrice d'autocorrélation (1.89) est :

- d'une part une matrice hermitienne, c'est-à-dire telle que $a_{j,k} = a_{k,j}^*$ pour toutes les paires d'entrées ; en tant que matrice hermitienne, c'est une matrice diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, de plus à valeurs propres réelles ; ici, on peut même ajouter que les valeurs propres de cette matrice sont positives car il est immédiat de constater que $V' * A * V \geq 0$ pour tout vecteur colonne V de longueur M ;
- d'autre part (par construction même) une *matrice de Toeplitz*, c'est-à-dire une matrice dont les termes sur une même diagonale sont égaux.

Les notions d'autocorrélation (1.85) ou de matrice d'autocorrélation (1.89) sont introduites au service de l'étude des signaux à temps discret que l'on suppose *a priori* stationnaires (au moins sur des fenêtres temporelles de longueur M suffisamment petites), ce qui signifie que la fonction

$$(k_{\text{init}}, k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{w}(\ell) x(k_{\text{init}}+k_1+\ell) x^*(k_{\text{init}}+k_2+\ell), \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq M-1$$

est une fonction seulement de k_{init} et de $k_1 - k_2 = k$. Pour des signaux dont on ne peut supposer la stationnarité (même à priori) sur des fenêtres temporelles (qu'il faudrait prendre de longueur M trop courte pour disposer d'une quantité d'information suffisante³⁰), il convient d'utiliser la vraie matrice d'autocorrélation qu'est la matrice Autocor définie comme :

$$(1.90) \quad \begin{bmatrix} \text{Autocor}(0,0) & \text{Autocor}(0,1) & \dots & \text{Autocor}(0,M-1) \\ \text{Autocor}(1,1) & \text{Autocor}(1,1) & \dots & \text{Autocor}(1,M-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Autocor}(M-1,0) & \text{Autocor}(M-1,1) & \dots & \text{Autocor}(M-1,M-1) \end{bmatrix},$$

30. Tel est le cas par exemple des signaux impliqués dans l'analyse des phénomènes physiques turbulents ou les modèles de signaux à évolution linéaire de fréquence, les *chirps*, dont nous reparlerons plus loin.

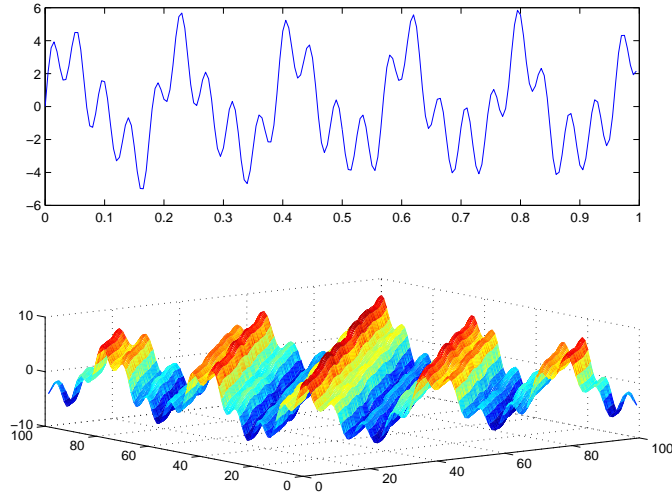


FIGURE 1.8. un modèle de signal turbulent stationnaire (petit Reynolds)

où cette fois

$$\text{Autocor}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}(k_1, k_2) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \tilde{w}(\ell) x(k_{\text{init}} + k_1 + \ell) x^*(k_{\text{init}} + k_2 + \ell).$$

Cette matrice (1.90) est toujours hermitienne positive, mais n'est plus cette fois une matrice de Toeplitz.

Il n'est pas toujours évident de distinguer à première vue un signal stationnaire d'un signal que ne l'est pas. Par exemple, pour les deux signaux représentés sur les figures 1.8 et 1.9 (signaux de pression d'un fluide dans un écoulement, le premier à bas nombre de Reynolds, le second à fort nombre de Reynolds, dans un ratio ici de 1 à 10), c'est seulement le test du calcul de la matrice Autcor (ici pour une fenêtre de 256 points) qui permet de faire la décision : le premier peut être considéré comme stationnaire, le second non ; on reconnaît en effet dans le premier cas le caractère Toeplitz de cette matrice, dans le second cas non.

L'analyse d'un signal à temps discret (concernant lequel aucune hypothèse de stationnarité n'est faite *a priori*) en termes de son contenu fréquentiel se fait par le biais de la décomposition spectrale de la matrice $\text{Autocor}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}$ (suivant les valeurs de k_{init}), une longueur M de fenêtre ainsi qu'une fenêtre \tilde{w} (de longueur M) ayant été préalablement choisies. Pour chaque valeur de k_{init} (position de l'instant initial de la fenêtre), on effectue la décomposition en valeurs singulières de la matrice hermitienne $\text{Autocor}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}$:

```
>> [U,D,V] = svd (Autocor_{kinit,tildew});
```

Les valeurs propres (positives) de cette matrice hermitienne apparaissent (dans l'ordre décroissant) comme les éléments diagonaux de la matrice D , tandis que les vecteurs colonne de la matrice U figurent une liste de vecteurs propres unitaires (au sens euclidien) de cette matrice, le vecteur colonne $U(:, \ell)$ étant un vecteur propre associé à la valeur propre $D(\ell)$ ($\ell=1:M$). La matrice U est une matrice unitaire, d'inverse sa transconjugée $V=U'$, les vecteurs colonne $U(:, \ell)$ formant donc une

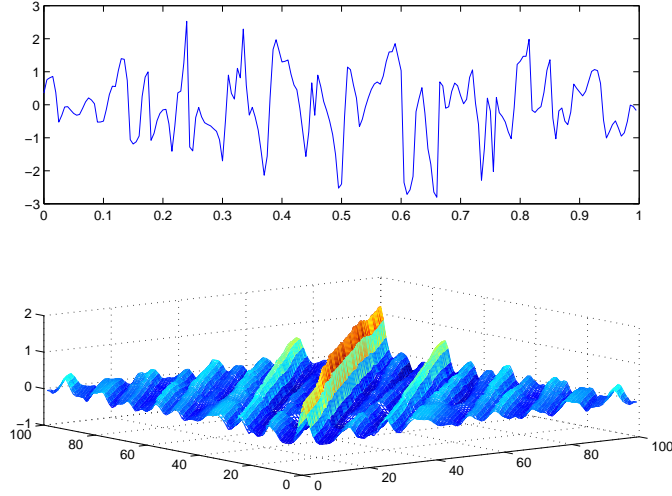


FIGURE 1.9. un modèle de signal turbulent non-stationnaire (grand Reynolds)

base orthonormée de \mathbb{C}^M (notons qu'il est possible que les $M - m$ dernières valeurs propres soient nulles). On observe que, si le signal \mathbf{x} est de la forme

$$(1.91) \quad k \in \mathbb{Z} \mapsto x(k) = \sum_{k_0 \in \Lambda_0} a_{k_0} \exp(2j\pi k_0 k / M), \quad \Lambda_0 \subset \{-[M/2], \dots, [M/2] - 1\}$$

(on a ici normalisé la situation en convenant que la fréquence d'échantillonnage du signal analogique dont on analyse la version à temps discret est ici M Hertz, d'où le seuil de $M/2$ en valeur absolue imposé aux fréquences de par le théorème de Shannon-Nyquist), les seules valeurs propres non nulles de la matrice $\text{Autocor}_{k_{\text{init}}, w_M}$ sont les $|a_{k_0}|^2$ ($k_0 \in \Lambda_0$), le vecteur propre (normalisé) correspondant se trouvant être dans ce cas le vecteur $((1/\sqrt{M}) \exp(2j\pi k_0 \kappa / M))_{\kappa=0, \dots, M-1}$. On a dans ce cas particulier :

(1.92)

$$k \in \{-[M/2], \dots, [M/2] - 1\} \mapsto \frac{1}{1 - \frac{\sum_{\ell=1}^M |\langle U(:, \ell), (\exp(2j\pi k \kappa))_{\kappa=0, \dots, M-1} \rangle|^2}{M}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } k \in \Lambda_0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction discrète (1.92) (définie sur $\{-[M/2], \dots, [M/2] - 1\}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$) apparaît alors, toujours dans ce cas particulier d'un signal à temps discret se présentant (au moins dans la plage temporelle d'observation initiée à k_{init} et de longueur $2M$) comme une combinaison linéaire finie (1.91) d'harmoniques fondamentaux élémentaires $k \mapsto \exp(2j\pi k_0 k / M)$ (où $k_0 \in \Lambda \subset \{0, \dots, M - 1\}$), comme un indicateur du contenu fréquentiel du signal (sur la plage temporelle initiée à k_{init} sur laquelle a été précisément envisagée la matrice d'autocorrélation fenêtrée $\text{Autocor}_{k_{\text{init}}, w_M}$). Les pics du graphe de cette fonction repèrent en effet (voir (1.92))

la position des fréquences $k_0 \in \Lambda_0 \subset \{-[M/2], \dots, [M/2] - 1\}$ présentes dans le contenu spectral du signal (dans cette plage temporelle d'observation initiée à k_{init} et de longueur $2M$). Cela suggère l'introduction d'indicateurs fréquentiels (dits ici du type MUSIC) définis ainsi.

DÉFINITION 1.11 (*m*-indicateur fréquentiel MUSIC). Soit x un signal à temps discret, $M \in \mathbb{N}^*$ une longueur (choisie *a priori*) comme longueur de fenêtre d'exploration, \tilde{w} une fenêtre de longueur M (du type par exemple fenêtre de Hamming $\text{hamming}(M)$), et $1 \leq m \leq M$. Le *m*-indicateur fréquentiel MUSIC est défini comme l'application

$$(1.93) \quad \begin{aligned} & (k_{\text{init}}, k) \in \mathbb{Z} \times \{-[M/2], \dots, [M/2] - 1\} \\ & \longmapsto \frac{1}{1 - \frac{\sum_{\ell=1}^m |\langle U_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}(:, \ell), (\exp(2j\pi k \kappa))_{\kappa=0, \dots, M-1} \rangle|^2}{M}} \\ & = \frac{M}{\sum_{\ell=m+1}^M |\langle U_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}(:, \ell), (\exp(2j\pi k \kappa))_{\kappa=0, \dots, M-1} \rangle|^2}, \end{aligned}$$

où les vecteurs colonnes $U_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}(:, \ell)$, $\ell = 1, \dots, m$, sont les m vecteurs propres (unitaires, orthogonaux deux-à-deux) correspondant aux m premières valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ (donc les m valeurs propres les plus significatives, en termes de valeur strictement positive, rangées dans l'ordre décroissant) de la matrice hermitienne d'autocorrélation fenêtrée $\text{Autocorr}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}$.

Le choix de m dans une procédure du type MUSIC se greffe sur la difficulté inhérente au choix de la longueur de la fenêtre glissante (ici M). Choisir m présuppose *a priori* une connaissance du nombre de composants fréquentiels présents dans le signal lors des plages temporelles d'analyse. C'est une question qui, dans la pratique, s'avère souvent délicate car elle présuppose une intuition sur le contenu fréquentiel du signal. Notons que nous n'avons ici envisagé le problème que sous l'angle déterministe. En présence de bruit aléatoire, l'hypothèse de non corrélation entre bruit et signal déterministe se trouve confortée par les démarches algorithmiques du type MUSIC. Les m premiers vecteurs propres $U(:, \ell)$, $\ell = 1, \dots, m$, correspondant aux m valeurs propres les plus « significatives » de la matrice $\text{Autocorr}_{k_{\text{init}}, \tilde{w}}$ sont alors présupposées engendrer le sous-espace des composants « signaux déterministes » (la composante « déterministe » du signal à temps discret analysé étant alors la projection orthogonale sur ce sous-espace, tandis que sont orthogonal (engendré par les vecteurs propres $U(:, m+1), \dots, U(:, M)$) figure le sous-espace « bruit ». La projection sur le sous-espace orthogonal figure précisément la composante aléatoire du signal à temps discret analysé. Lorsque $m = M$, l'estimateur MUSIC fonde la méthode d'analyse spectrale dite *de Pisarenko*.

1.3.6. L'analyse temps-fréquences et la construction de spectrogrammes

L'analyse temps-fréquence des signaux à temps discret sur la base de la construction de l'image dénommée aujourd'hui *spectrogramme* puise directement ses modèles

dans le codage de la musique tel qu'il a été initié par Guido d'Arezzo et les moines toscans de l'an 1000 (bien longtemps avant les travaux de Fourier au XIX-ième siècle!). Pareille analyse bidimensionnelle (le temps en abscisse, la fréquence en ordonnée, comme sur les partitions musicales) repose évidemment sur l'hypothèse de stationnarité du signal à temps discret sur les plages (glissantes ici) d'observation temporelle.

DÉFINITION 1.12 (spectrogramme d'un signal à temps discret). On appelle *spectrogramme* d'un signal à temps discret son spectre fenêtré (envisagé ici avec glissement simultané de la fenêtre temporelle d'observation) :

$$k_{\text{init}} \in \mathbb{Z} \mapsto \left(\nu = \left[-\frac{1}{2} : \frac{1}{\text{MM}} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{MM}} \right) \right] \mapsto \text{fft} (x(k_{\text{init}} : k_{\text{init}} + M - 1) * \tilde{w}, \text{MM})(\nu) \right),$$

ou M est la longueur choisie comme longueur de fenêtre glissante d'observation et MM est choisi suffisamment grand pour disposer d'une version d'autant plus « lissée » du spectre fenêtré³¹. Il s'agit ici d'une matrice complexe, le paramètre k_{init} indexant les colonnes, le paramètre ν indexant les lignes. L'affichage graphique (de la brillance de l'image correspondant à la matrice dont les entrées sont les valeurs absolues des entrées de ce spectrogramme) se fait avec `image(abs(spectrogramme(x)))` ou `imagesc(abs(spectrogramme(x)))`.

Le choix de la longueur M de la fenêtre d'observation glissante résulte ici d'un compromis :

- d'une part, cette longueur doit être choisie suffisamment petite pour que le signal à temps discret x analysé puisse être assimilé à un signal stationnaire lorsque restreint à la fenêtre d'observation doublée $[k_{\text{init}}, k_{\text{init}} + 2M - 1]$;
- d'autre part, il faut que le nombre M de points de cette fenêtre d'observation glissante soit suffisant : la matrice de `fft` est en effet une matrice carrée et le nombre de canaux fréquentiels envisageables lorsque l'on prend la `fft` d'une suite de longueur M est aussi M ; l'artifice consistant à choisir MM grand n'est exploité ici qu'aux fins d'obtenir une version « lissée » du spectre fenêtré, mais pareille version lissée n'est construite qu'à partir des valeurs du spectre en seulement M points ν équidistribués sur $[-1/1, 1/2[$. Il n'y a pas ici de miracle! La quantité d'information est préservée par prise de spectre.

Il faut noter que la routine `spectrogram` (sous `MATLAB`) ne génère qu'une image positive

$$(1.94) \quad \begin{aligned} (k_{\text{init}}, \nu) &\mapsto \left| \text{fft} (x(k_{\text{init}} : k_{\text{init}} + M - 1) * \tilde{w}, \text{MM})(\nu) \right|, \\ k_{\text{init}} \in \mathbb{Z}, \nu &= \left[-\frac{1}{2} : \frac{1}{\text{MM}} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{MM}} \right) \right]. \end{aligned}$$

L'information concernant la phase se trouve ici perdue. Disposer de la `fft` fenêtrée complète (avec à la fois son module et sa phase) permet de disposer d'une information très redondante lorsque l'on veut varier (même avec un pas strictement supérieur à 1) l'instant initial k_{init} . La prise de spectrogramme devient ainsi une opération inversible et l'on peut restituer le signal à temps discret x dont on est parti à partir de la connaissance de son spectrogramme. Voici par exemple deux routines `analyse` et `synthese` réalisant la prise complète de spectrogramme (avec

³¹. Le signal tronqué $x(k_{\text{init}} : k_{\text{init}} + M - 1) * \tilde{w}$ est prolongé par des zéros jusqu'à avoir pour longueur MM avant que l'on n'en prenne le spectre *via* la routine `fft`.

séparation de module et de phase) et son inversion. Les fenêtres glissantes successives se chevauchent ici sur $7/8$ de leur longueur³².

```

function [AbsSpec,PhaseSpec,Spec]=analyse(s,M) ;

% [AbsSpec, PhaseSpec, Spec] = analyse(s,M) ;
%
% Calcule le spectrogramme Spec, son module AbsSpec,
% sa phase PhaseSpec avec exploration temporelle
% du signal a temps discret x au travers d'une
% fenetre glissante de Hamming de longueur M
% (multiple de 8). Les fenetres successives se
% chevauchent sur 7/8 de leur longueur (ceci est
% aisement modifiable bien sur). La fft est ici
% une fft de longueur exactement la longueur M
% de la fenetre.

NS=size(x,1);
Nf=floor(8*NS/M)-7;
AbsSpec=zeros(M,Nf);
PhaseSpec=zeros(M,Nf);
Spec=zeros(M,Nf);
w = hamming(M);
for i=1:Nf
    temp=w.*x(1+(i-1)*M/8:(i+7)*M/8);
    ftemp=fft(temp);
    Spec(:,i)=ftemp;
    AbsSpec(:,i)=abs(ftemp);
    PhaseSpec(:,i)=angle(ftemp);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function x = synthese(AbsSpec,PhaseSpec) ;
%
% x = synthese(AbsSpec,PhaseSpec) ;
% Etant donnees les composantes AbsSpec et
% PhaseSpec d'un spectrogramme realise avec
% une fenetre de Hamming de longueur M
% (multiple de 8) avec un chevauchement des fenetres
% de 7/8 (aisement modifiable bien sur),
% reconstitue le signal ayant un spectrogramme
% de module AbsSpec et de phase PhaseSpec
% lorsque ce spectrogramme a ete calcule
% via la routine analyse utilisant la meme
% fenetre de Hamming.

```

32. Ces routines sont adaptées de routines rédigées par Charles Dossal pour une séance de TP dédiée à un problème de séparation de sources.

```

M = size(AbsSpec,1);
Nf = size(PhaseSpec,2);
x = zeros((Nf+7)*M/8,1);
w=hamming(M);
for k=1:Nf
    ftemp=AbsSpec(:,k).*exp(sqrt(-1)*PhaseSpec(:,k));
    temp=real(iff(ftemp));
    x(1+(k-1)*M/8:(k+7)*M/8)=x(1+(k-1)*M/8:(k+7)*M/8)+w.*temp;
end
% il faut tenir compte du chevauchement des fenetres
% et calculer le coefficient par lequel se trouve
% multiplie x du fait de la redondance (c'est--dire
% calculer la somme des fenetres de Hamming qui se
% chevauchent et le maximum de cette somme).
hh= zeros(2*M,1);
for k=1:4
    hh(1+(k-1)*M/8:(k+7)*M/8) = hh(1+(k-1)*M/8:(k+7)*M/8) + w ;
end
x=x/max(hh);

```

1.3.7. Un modèle de signaux à temps discret non-stationnaires : les « chirps » gaussiens

Les signaux analogiques (stables et d'énergie finie) de la forme

$$(1.95) \quad x : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha(t-\beta)^2} e^{iP(t)},$$

où $P : t \mapsto a_0 t^2 + a_1 t + a_2$ ($a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$), constituent une classe intéressante de signaux impliqués naturellement comme briques élémentaires dans la décomposition des signaux (par exemple des signaux audio) : les pépiements d'oiseaux, le sifflement d'une locomotive entrant en gare, les instruments à corde dans un enregistrement symphonique, entrent dans cette classe. Si P était un polynôme à coefficients réels de degré 1 ($P(t) = 2\pi f t + \varphi$), le signal pourrait être considéré comme stationnaire (avec une seule fréquence f), hormis le fait qu'il présente une modulation d'amplitude matérialisée ici par la gaussienne $t \mapsto \exp(-\alpha(t-\beta)^2)$. Par contre, si P est vraiment de degré 2 ($a_0 \neq 0$), alors le signal (1.95) présente à la fois une modulation d'amplitude (toujours matérialisée par cette même gaussienne), mais en même temps une évolution « affine » de fréquences, dans la mesure où l'on peut, au voisinage d'un instant $t = t_0$ exprimer

$$P(t) = P(t_0) + (2a_0 t_0 + a_1)(t - t_0) + o(|t - t_0|) = (2a_0 t_0 + a_1)t + \varphi_0 + o(|t - t_0|).$$

Ainsi, la quantité $(2a_0 t_0 + a_1)/(2\pi)$ peut être interprétée comme une « fréquence instantanée » du signal (1.95) à l'instant $t = t_0$. Notons que cette quantité varie de manière affine en fonction de t_0 .

Si l'on exprime la fonction trinôme $t \mapsto a_0 t^2 + A_1 t + a_2$ sous la forme $P(t) = \rho(t - \gamma)^2 + \delta$, on observe que, pour tout instant fixé $t_0 \in \mathbb{R}$, le signal analogique stable

$$x^{[t_0]} : \tau \in \mathbb{R} \mapsto x^*(t - \tau/2) x(t + \tau/2)$$

s'exprime aussi

$$\begin{aligned}
 x^{[t_0]} : \tau \in \mathbb{R} &\longmapsto \exp(-2\alpha((t_0 - \beta)^2 + \tau^2/4)) \times \exp(2j\rho(t_0 - \gamma)\tau) \\
 (1.96) \quad &= \exp(-2\alpha(t_0 - \beta)^2) \times \exp(-\alpha\tau^2/2) \times \exp(2j\rho(t_0 - \gamma)\tau) \\
 &= \exp(-2\alpha(t_0 - \beta)^2) \times \exp(-\tau^2/2) \times \exp(jP'(t_0)\tau).
 \end{aligned}$$

Hormis le fait qu'ici encore l'amplitude de ce signal (fonction de la variable temporelle τ) se trouve modulée par une gaussienne (cette modulation étant d'ailleurs d'autant plus faible que α est petit), on observe que le signal $\tau \mapsto x^{[t_0]}(\tau)$ se présente, lui, comme un signal stationnaire (de seule fréquence précisément le nombre $P'(t_0)/(2\pi)$, c'est-à-dire précisément la « fréquence instantanée » du signal analogique x à l'instant $t = t_0$. Le spectre du signal $x^{[t_0]}$ est le signal

$$X^{[t_0]} : f \longmapsto \int_{\mathbb{R}} x^*(t_0 - \tau/2) x(t_0 + \tau/2) e^{-2j\pi f\tau} d\tau.$$

On vérifie d'ailleurs (comme conséquence de la formule de Plancherel pour les signaux analogiques d'énergie finie) que l'on a, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $f_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 (1.97) \quad X^{[t_0]}(f_0) &= \int_{\mathbb{R}} x^*(t_0 - \tau/2) x(t_0 + \tau/2) e^{-2j\pi f_0\tau} d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} X(f_0 + \varpi/2) X^*(f_0 - \varpi/2) e^{2j\pi t_0\varpi} d\varpi.
 \end{aligned}$$

Tenant compte de la relation (1.97), on peut donc interpréter $X^{[t_0]}(f_0)$ lorsque t_0 désignent respectivement un instant temporel et une position fréquentielle fixées de deux manières :

- soit comme le spectre de la fonction d'autocorrélation « instantanée » du signal x (à l'instant t_0), c'est-à-dire la *densité spectrale de puissance* « instantanée » (toujours à ce même instant t_0), évaluée en f_0 ;
- soit comme l'antécédent par prise de spectre de la fonction d'autocorrélation « instantanée » cette fois du spectre X du signal (à la position fréquentielle f_0), évaluée cette fois à l'instant t_0 .

On note ici l'aspect réversible des deux points de vue. On est ainsi conduit à l'introduction d'une transformation bilinéaire sur l'espace vectoriel des signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} , introduite par Eugène Wigner et Jean Ville en mécanique quantique dans les années 1930.

DÉFINITION 1.13 (forme sesquilinéaire et transformée de Wigner-Ville). La forme sesquilinéaire de Wigner-Ville est l'application qui à deux signaux analogiques d'énergie finie x_1 et x_2 associe la fonction bornée

$$(1.98) \quad (t, f) \mapsto \text{wv}[x_1, x_2; t, f] := \int_{\mathbb{R}} x_1^*(t - \tau/2) x_2(t + \tau/2) e^{-2j\pi f\tau} d\tau.$$

Lorsque $x_1 = x_2 = x$, on appelle *transformée de Wigner-Ville* du signal d'énergie finie x la fonction $(t, f) \mapsto \text{wv}(x, x; t, f)$. La version discrète de la forme sesquilinéaire de Wigner-Ville est définie sur l'espace des signaux à temps discret x par

$$(1.99) \quad (k, \nu) \in \mathbb{Z} \times [-1/2, 1/2[\longmapsto \text{dwv}[x_1, x_2; k, \nu] := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x^*(k - \ell) x(k + \ell) e^{-2j\pi \ell \nu}.$$

Lorsque x_1 et x_2 sont des signaux à temps discret de longueur N , définis sur $0 : N - 1$, les signaux sont habituellement fenêtrés (par exemple par une fenêtre de Hamming de longueur N), puis prolongés par 0 (**zeropadding**) sur $-N : 2N - 1$, en

préalable à la réalisation du calcul (1.99)³³ pour $k = 0 : N - 1$ et $\nu \in [-1/2, 1/2[$. Si $x_1 = x_2 = x$ est un signal d'énergie finie à temps discret, on appelle *transformée de Wigner-Ville à temps discret* de x la fonction $\text{dvw}[x, x; \cdot, \cdot]$ (sur $\mathbb{Z} \times [-1/2, 1/2[$).

La transformée de Wigner-Ville respecte l'orthogonalité (et l'énergie) : en effet, si x_1 et x_2 sont deux signaux analogiques d'énergie finie, on a, au niveau de leurs transformées de Wigner-Ville,

$$|\langle x_1, x_2 \rangle|^2 = \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{f \in \mathbb{R}} \text{wv}(x_1, x_1; t, f) \text{wv}^*(x_2, x_2; t, f) dt df$$

(comme conséquence de la formule de Plancherel, cette formule s'appelle *formule de Moyal*). Mais le gros problème que l'on a est que la transformée de Wigner-Ville est quadratique, non linéaire. La transformée d'une somme n'est pas la somme des transformées. Du fait du théorème de Pythagore, on a :

$$\text{wv}(x_1 + x_2, x_1 + x_2; \cdot, \cdot) = \text{wv}(x_1, x_1; \cdot, \cdot) + \text{wv}(x_2, x_2; \cdot, \cdot) + 2 \text{Re} \text{wv}(x_1, x_2; \cdot, \cdot).$$

Le terme d'interférence $\text{Re} \text{wv}(x_1, x_2; \cdot, \cdot)$ est certes oscillant, mais il est bien présent ! Pour le gommer, on peut « lisser » l'image en la convolant avec un masque. On obtient ainsi la *transformation de Wigner-Ville lissée*. Si le masque $2D$ est lui-même la transformée de Wigner-Ville d'un signal « fenêtre » $t \mapsto W(t)$, on a :

$$\text{wv}(x, x; \cdot, \cdot) * \text{wv}(W, W; \cdot, \cdot) = \left| \int_{\mathbb{R}} x(\tau) W^*(t - \tau) e^{-2j\pi\tau} d\tau \right|^2 \geq 0,$$

ce qui est appréciable (car on a une image positive, qui n'est rien d'autre que le carré du module du spectrogramme de x fenêtré par W). On peut également envisager (pour estomper les termes d'interférence) des techniques *ad hoc* de *réassignation d'image*, telles celles développées à Lyon par P. Flandrin il y a quelques années. Mais il n'y pas ici de miracle : la lecture (souvent confuse) des images des transformées de Wigner-Ville ne permet pas d'en tirer tout le profit que l'on souhaiterait en tirer. Sur la figure 1.10 ci-dessous, on a mis en évidence (sur la transformée de la somme de deux *chirps*) les termes d'interférence (oscillants).

Résumons ici avec un constat et un peu de prospective (et moins de pessimisme). Une analyse plus complète des signaux 1D nécessite de faire apparaître, outre le temps et la fréquence (comme c'est le cas pour l'analyse spectrale fende l'auto-corrélation fenêtrée via les algorithmes MUSIC ou ESPRIT, la prise de spectrogramme, la transformée de Wigner-Ville avec ses atouts mais aussi ses défauts en matière de lisibilité, *etc.*) un troisième paramètre : l'échelle. L'analyse « temps-échelles » s'appelle *analyse en ondelettes*. Une analyse « temps-fréquences-échelles » serait optimale, mais quasiment impossible à visualiser (il faut quatre dimensions pour visualiser le graphe d'une fonction de trois variables!). L'analyse en ondelettes (temps-échelles) sera, elle, introduite au semestre 2.

1.4. L'analyse des images discrètes

Nous donnons dans cette brève section (pour clôre ce chapitre) une courte introduction aux questions relatives à l'analyse des images discrètes.

Une image *discrète* est dans ce cours une matrice à N_1 lignes et N_2 colonnes dont les entrées sont des nombres réels (codés par exemple sous MATLAB en double précision)

³³. Ce calcul est opéré bien sûr par `fft(. , NN)`, avec $NN > N$. Les valeurs de ν où le calcul se trouve réalisé sont alors $\nu = [1/2 : 1/NN : 1/2 - 1/NN]$.

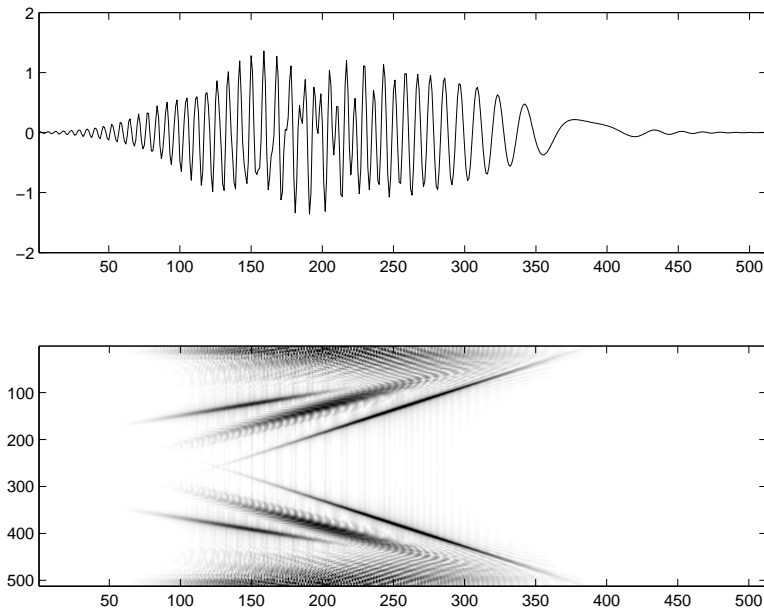


FIGURE 1.10. Transformée de Wigner-Ville de la somme de deux *chirps* et termes d'interférence

entre 0 et 1. Chaque entrée $I(\ell_1, \ell_2)$ de la matrice figure la *brillance* du pixel (plus la brillance au pixel (ℓ_1, ℓ_2) est importante, plus la valeur numérique de cette entrée est proche de 1).

Il faut noter que les images encodées sous MATLAB, par exemple en chargeant une image suivant

```
I=imread('image.format');
```

se présentent comme des variables de taille $(N_1, N_2, 3)$ lorsqu'il s'agit d'images couleur (format RGB), ou comme des matrices de taille (N_1, N_2) , mais dont les entrées sont encodées au format `int8` (entiers entre 0 et 255, $2^8 = 256$). Il faut donc convertir l'image ainsi

```
>> II = rgb2gray (I)
%[si I est une image couleur au format RGB]
>> III=double(II);
```

pour obtenir la matrice à entrées réels flottants de $[0, 1]$ que l'on souhaite.

La transformation de Fourier 2D opère bien sûr sur de telles images I . Elle est implémentée sous MATLAB via les routines

```
>> Ihat = fft2 (I) ;
>> Ihat = fft2 (I,N1,N2); %[zero padding]
```



FIGURE 1.11. Non stationnarité d'une image

Son inverse est réalisée *via* `ifft2`. On associe par `fft2` à la matrice d'entrées $I(\ell_1, \ell_2)$, où $0 \leq \ell_j \leq N_j$ ($j = 1, 2$), la matrice d'entrées

$$\hat{I}(k_1, k_2) := \sum_{\ell_1=0}^{N_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{N_2-1} I(\ell_1, \ell_2) W_{N_1}^{k_1 \ell_1} W_{N_2}^{k_2 \ell_2}$$

$$(W_{N_1} = e^{-2j\pi/N_1}, W_{N_2} = e^{-2j\pi/N_2}), \quad 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1.$$

La formule d'inversion est alors (pour $0 \leq \ell_1 \leq N_1 - 1$ et $0 \leq \ell_2 \leq N_2 - 1$)

$$I(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{I}(k_1, k_2) \overline{W_{N_1}^{k_1 \ell_1}} \overline{W_{N_2}^{k_2 \ell_2}}.$$

Mais la transformation de Fourier discrète n'est pas un bon outil en analyse d'images, ce pour deux raisons majeures :

- d'une part, c'est une transformation complexe (ceci n'était pas grave en 1D, mais devient plus lourd à gérer en 2D car nous devons travailler dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{N_1 N_2}$ de dimension $2N_1 N_2$);
- d'autre part, et c'est ici beaucoup plus grave, la transformation de Fourier 2D ne respecte pas les symétries, qui jouent un rôle très important dans la structure des données images.

Pour symétriser les choses, on exploite le fait que

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \cos(\omega)$$

est paire (donc respecte les symétries) et on préfère donc introduire la *transformée en cosinus discrète* (2D) des images (`dct2`) associant à l'image $[I(\ell_1, \ell_2)]$ (où l'on a $0 \leq \ell_1 \leq N_1 - 1$, $0 \leq \ell_2 \leq N_2 - 1$) l'image \hat{I}_{\cos} définie par

$$\hat{I}_{\cos}(k_1, k_2) = \alpha_{1,k_1} \alpha_{2,k_2} \sum_{\ell_1=0}^{N_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{N_2-1} I(\ell_1, \ell_2) \cos\left(\frac{\pi k_1 (2\ell_1 + 1)}{2N_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k_2 (2\ell_2 + 1)}{2N_2}\right)$$

(où $\alpha_{1,k_1} = \sqrt{1/N_1}$ si $k_1 = 0$, $\sqrt{2/N_1}$ sinon, $\alpha_{2,k_2} = \sqrt{1/N_2}$ si $k_2 = 0$ et $\sqrt{2/N_2}$ sinon) lorsque $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ et $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$. Les formules inverses sont alors

$$I(\ell_1, \ell_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \alpha_{1,k_1} \alpha_{2,k_2} \hat{I}_{\cos}(k_1, k_2) \cos\left(\frac{\pi k_1 (2\ell_1 + 1)}{2N_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k_2 (2\ell_2 + 1)}{2N_2}\right).$$

Cette opération inverse est assurée par la routine `idct2`.

La prise de transformation en cosinus discrète d'une image rend compte de la structure périodique d'une image. Hormis les images texturées, les images ne sauraient en général présenter le caractère de stationnarité que l'on retrouve en 1D dans les signaux de communication (à fréquences immuables dans le temps). Voici comment « lire » l'image \hat{I}_{\cos} :

- le coin supérieur gauche est occupé par les composants BF (analyse horizontale) et BF (analyse verticale) ;
- le coin inférieur droit est occupé par les composants HF (analyse verticale) et HF (analyse horizontale) ;
- le coin inférieur gauche est occupé par les composants HF (analyse verticale) et BF (analyse horizontale) ;
- le coin supérieur droit est occupé par les composants BF (analyse verticale) et HF (analyse horizontale) ;

(« BF » pour basses fréquences, « HF » pour hautes fréquences).

L'analyse fenêtrée s'impose donc souvent (hormis pour les images texturées). Par exemple, le découpage de l'image en blocs 8×8 , puis la prise de `dct` de chacun de ses blocs, suivie de la restitution du bloc à la même position, après éventuellement une compression de sa `dct` (par quantification : on atténue plutôt les hautes fréquences), est la brique de base de l'algorithme de compression `jpeg` classique. D'autres analyses peuvent parfois avoir plus de sens : par exemple l'analyse de Haar permettant de transformer une image de taille $2^N \times 2^N$ en une mosaïque de 4 images $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ en isolant (par le jeu des différentiations discrètes dans les directions horizontale ou verticale, prises sur les blocs 2×2 en laquelle est subdivisée l'image) les « détails horizontaux », les « détails obliques », les « détails verticaux » (respectivement DH, DO, DV) et le résumé R (version moyennisée bloc par bloc). Voici cet algorithme très simple (Haar) et son inversion `HaarInverse` :

```

fonction [RR,DH,DV,DO]=Haar(input);
[M,N] = size(input);
AUX1 = input(1:2:M,1:2:N);
AUX2 = input(1:2:M,2:2:N);
AUX3 = input(2:2:M,1:2:N);

```

```

AUX4 = input(2:2:M,2:2:N);
RR=(AUX1+AUX2+AUX3+AUX4)/2;
DH=(AUX1+AUX2-AUX3-AUX4)/2;
DV=(AUX1+AUX3-AUX2-AUX4)/2;
DO=(AUX1-AUX2-AUX3+AUX4)/2;

function I=HaarInverseAux(I1,I2,I3,I4);
[M,M]=size(I1);
I=zeros(2*M,2*M);
I(1:2:2*M,1:2:2*M)=I1;
I(1:2:2*M,2:2:2*M)=I2;
I(2:2:2*M,1:2:2*M)=I3;
I(2:2:2*M,2:2:2*M)=I4;

function I=HaarInverse(RR,DH,DV,DO)
I1=(RR+DH+DV+DO)/2;
I2=(RR+DH-DV-DO)/2;
I3=(RR-DH+DV-DO)/2;
I4=(RR-DH-DV+DO)/2;
I=HaarInverseAux(I1,I2,I3,I4);

```

On trouve là le prototype de l'algorithme sur lequel se fondent les méthodes de compression telles jpeg2000. Des dérivations sur des blocs de taille plus grande (moyennisations locales par les dérivées partielles discrétisées d'une gaussienne) peuvent être envisagées (voir les TP).

Parmi les opérateurs différentiels (pensés bien sûr dans le cadre discret) impliqués dans l'analyse d'image, il faut souligner de rôle du laplacien $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ (symétrique, notons le) dans la mise en évidence de « lignes de rupture » (ou de contraste) d'une image (détection des contours). On a en effet la formule de Stokes (ou encore, dans ce cas particulier, « de la divergence ») : pour tout compact K du plan (de bord C^1 par morceaux), pour toute fonction-test φ (de classe C^∞) :

$$\iint_K \Delta \varphi(x, y) dx dy = \int_{\partial K} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} \delta_{\partial K},$$

ou encore (en un sens physique faisant intervenir l'action de la dérivation par le biais de la formule d'intégration par parties, comme dans la formule de Dirac $(d/dt)[H] = \delta(t)$ en 1D) :

$$\Delta[\chi_K] = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} [\delta_{\partial K}],$$

où χ_K désigne la fonction valant 1 sur K et 0 ailleurs et $\delta_{\partial K}$ la mesure 1-dimensionnelle chargeant le bord de K .



FIGURE 1.12. Transformation de Haar sur l'image de la figure 1.11

CHAPITRE 2

Le traitement des signaux/images en temps continu/discret

2.1. La notion de filtre digital ; filtres digitaux rationnels

2.1.1. Filtres ou masques digitaux

L'opération majeure en traitement de l'information (1D ou 2D) est le *filtrage* digital.

DÉFINITION 2.1 (filtres digitaux). Un filtre digital 1D \mathcal{L} (on dit aussi une *boite noire*) est une application de l'espace $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ des suites de nombres complexes indexées par \mathbb{Z} et de longueur finie (c'est-à-dire dont toutes les entrées, hormis un nombre fini, sont nulles) dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des suites de nombres complexes indexées par \mathbb{Z} qui a les deux propriétés suivantes :

- \mathcal{L} est une opération \mathbb{C} -linéaire : si $x = (x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites de $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ et λ et μ deux nombres complexes, la « réponse » $\mathcal{L}[\lambda x + \mu y]$ de \mathcal{L} à la suite $\lambda x + \mu y$ est la suite $\lambda \mathcal{L}[x] + \mu \mathcal{L}[y]$;
- pour toute suite $x = (x(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$, la réponse de \mathcal{L} aux deux suites $(x(k \pm 1))_{k \in \mathbb{Z}}$ décalées dans le temps (discret) respectivement de -1 unité de temps (vers le passé) ou de $+1$ unité de temps (vers le futur) est égale à la suite $(\mathcal{L}[x](k \pm 1))_{k \in \mathbb{Z}}$, autrement dit à la réponse de \mathcal{L} à la suite x , décalée dans le temps (vers le passé ou le futur) de la même manière que l'était la suite originelle x .

La définition est similaire dans le cadre 2D.

DÉFINITION 2.2 (masques digitaux). Un filtre digital 2D \mathcal{L} (on dit aussi un *masque*) est une application de de l'espace $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}$ des tableaux de nombres complexes indexés par \mathbb{Z}^2 et de taille finie (c'est-à-dire dont toutes les entrées, hormis un nombre fini, sont nulles) dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ des tableaux de nombres complexes indexés par \mathbb{Z}^2 qui a les deux propriétés suivantes :

- \mathcal{L} est une opération \mathbb{C} -linéaire, au sens suivant : si $I = (I(k_1, k_2))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2}$ et $J = (J(k_1, k_2))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2}$ sont deux tableaux de $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}$ et λ et μ deux nombres complexes, la « réponse » $\mathcal{L}[\lambda I + \mu J]$ de \mathcal{L} au tableau $\lambda I + \mu J$ est le tableau $\lambda \mathcal{L}[I] + \mu \mathcal{L}[J]$;
- pour tout tableau $I = (I(k_1, k_2))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}$, la réponse de \mathcal{L} aux quatre tableaux $(I(k_1 \pm 1, k_2))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}$, $(I(k_1, k_2 \pm 1))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}$ décalés dans l'espace (discret) respectivement de 1 unité dans la direction verticale (en avant ou en arrière) ou d'une unité dans la direction horizontale (en avant ou en arrière) est égale respectivement au tableau $(\mathcal{L}[I](k_1 \pm 1, k_2))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}$ ou $(\mathcal{L}[I](k_1, k_2 \pm 1))_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}$ autrement dit à la réponse de \mathcal{L} au tableau

I , décalée dans l'espace (verticalement ou horizontalement, en avant ou en arrière) de la même manière que l'était le tableau originel I .

On remarque que la réponse h d'un tel filtre ou masque \mathcal{L} à l'impulsion δ_0 ou $\delta_{(0,0)}$ à l'origine (des temps ou de l'espace), c'est-à-dire la suite ou le tableau dont l'unique entrée non nulle est celle correspondant à l'origine et vaut 1, commande la réponse de \mathcal{L} à toute autre suite. On a en effet, suivant que l'on est dans le cas $1D$ ou $2D$:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[x](k) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x(\ell) h(k - \ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h(\ell) I(k - \ell) \quad (x \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}) \\ \mathcal{L}[I](k_1, k_2) &= \sum_{\ell_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_2 \in \mathbb{Z}} I(\ell_1, \ell_2) h(k_1 - \ell_1, k_2 - \ell_2) \\ &= \sum_{\ell_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_2 \in \mathbb{Z}} h(\ell_1, \ell_2) I(k_1 - \ell_1, k_2 - \ell_2) \quad (I \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}). \end{aligned}$$

Autrement dit, l'action de \mathcal{L} est une convolution discrète (sur les signaux de longueur finie ou les tableaux de taille finie). La réponse $h = \mathcal{L}[\delta_0]$ ou $h = \mathcal{L}[\delta_{(0,0)}]$ est dite *réponse impulsionnelle* du filtre ou du masque. Son spectre (si on pense h comme un signal ou une image à temps discret) est appelé *transformée de Fourier* du filtre. La *fonction de transfert* (ou encore *impédance*, voire *admittance* du filtre ou du masque) est la fonction (ou plutôt en général la distribution, car il se peut fort bien que ce ne soit ni une fonction, ni même une mesure)

$$H : \nu \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{2j\pi k\nu}, \quad H : (\nu_1, \nu_2) \mapsto \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} h(k_1, k_2) e^{2j\pi(k_1\nu_1 + k_2\nu_2)}.$$

La raison pour laquelle on privilégie dans cette définition le signe $+$ dans les exponentielles (au lieu du signe $-$ comme cela était le cas dans la définition de la transformée de Fourier) tient à des considérations de nature électronique : si l'entrée dans une cellule électrique est par exemple une intensité ou une différence de potentiel quantifiée par un signal analogique oscillant $t \mapsto \exp(2\pi j\nu t)$, la valeur de la fonction de transfert précéemment en cette fréquence ν est définie comme le rapport entre le signal analogique de sortie $\varphi(\nu) e^{2j\pi\nu t}$ et le signal d'entrée. La fonction de transfert est ainsi la fonction $\nu \mapsto \varphi(\nu)$; les fréquences ν si l'on adopte ce point de vue sont considérées affectées du signe $+$.

On introduit trois notions fondamentales concernant les filtres ou masques :

- (1) La première concerne uniquement le cas $1D$ (car il est délicat de définir passé et futur pour un tableau $2D$ vu qu'il y a deux directions d'espace. C'est la notion de *réalisabilité* : un filtre digital $1D$ est dit *réalisable* si et seulement si sa réponse impulsionnelle est un signal à temps discret $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que les nombres $h(k)$ sont tous nuls pour $k \leq -k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$. On dit aussi, au vu de la relation entre entrées et sorties :

$$\mathcal{L}[x](k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x(\ell) h(k - \ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h(\ell) I(k - \ell),$$

que le filtre est à *capacité de mémoire finie* ; le calcul de la sortie à l'instant k ne nécessite en effet, outre la connaissance du passé de l'entrée à l'instant k , que la connaissance des valeurs de l'entrée au futur proche $x(k+1), \dots, x(k+k_0)$. Lorsque la connaissance des valeurs de l'entrée

dans le futur lointain est nécessaire, on considère que le filtre n'est pas réalisable. Dans le cas particulier $k_0 = 0$, on dit que le filtre est *causal*; dans ce cas, seule la connaissance du passé-présent de l'entrée à l'instant k est nécessaire pour disposer de la connaissance de la sortie à cet instant.

- (2) La seconde vaut dans les deux cas (1D ou 2D) : le filtre ou masque est dit *stable* si sa réponse impulsionnelle est un signal à temps discret (ou une image à temps discret) stable, autrement dit $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < +\infty$ ou $\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |h(k_1, k_2)| < +\infty$. Ceci équivaut à dire que l'action du filtre \mathcal{L} s'étend en une action continue de l'espace $l^\infty(\mathbb{Z})$ ou $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ des signaux ou images bornées en module dans lui-même. Ceci signifie qu'il existe une constante C (en fait ici égale à $\sum_k |h(k)|$ ou à $\sum \sum_{k_1, k_2} |h(k_1, k_2)|$) telle que

$$\forall x \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, \quad \sum_k |\mathcal{L}[x](k)| \leq C \sup_k |x(k)|$$

$$\text{ou } \forall I \in C_0^{\mathbb{Z}^2}, \quad \sum_{k_1} \sum_{k_2} |\mathcal{L}[I](k_1, k_2)| \leq C \sup_{k_1, k_2} |I(k_1, k_2)|.$$

Autrement dit, la stabilité d'un filtre ou d'un masque \mathcal{L} est la propriété rendant compte de la préservation par \mathcal{L} du fait que les signaux ou images soient bornées en module.

- (3) La troisième notion concerne aussi indifféremment les filtres digitaux ou les masques. On dit que \mathcal{L} est *stationnaire* si l'action de \mathcal{L} sur $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}$ s'étend en un opérateur continu de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z}^2)$ des signaux ou tableaux d'énergie finie dans lui-même. Ceci signifie qu'il existe une constante \tilde{C} telle que

$$\forall x \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, \quad \sum_k |\mathcal{L}[x](k)|^2 \leq \tilde{C} \sum_k |x(k)|^2$$

$$\text{ou } \forall I \in C_0^{\mathbb{Z}^2}, \quad \sum_{k_1} \sum_{k_2} |\mathcal{L}[I](k_1, k_2)|^2 \leq \tilde{C} \sum_{k_1} \sum_{k_2} |I(k_1, k_2)|^2.$$

Dans ce cas, la réponse impulsionnelle h est cette fois nécessairement dans $l^2(\mathbb{Z})$ et la fonction

$$\nu \mapsto \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{2j\pi k\nu} \right|^2, \quad (\nu_1, \nu_2) \mapsto \left| \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} h(k_1, k_2) e^{2j\pi(k_1\nu_1 + k_2\nu_2)} \right|^2$$

est appelée *spectre d'énergie* du filtre ou masque, la racine carrée de ce spectre d'énergie étant appelée *distorsion d'amplitude*. La terminologie s'explique ici ainsi : si l'on introduit le spectre X de x (ou le spectre \hat{I} de I), on constate que l'action du filtre au niveau des spectres se traduit par

$$\widehat{\mathcal{L}[x]}(\nu) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-2j\pi k\nu} \right) X(\nu)$$

$$\widehat{\mathcal{L}[I]}(\nu_1, \nu_2) = \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} h(k_1, k_2) e^{-2j\pi(k_1\nu_1 + k_2\nu_2)} \right) \hat{I}(\nu_1, \nu_2).$$

En prenant le module ou le carré du module dans ces relations, on comprend le pourquoi des qualificatifs *distorsion d'amplitude* ou *spectre d'énergie*. Il résulte de la formule de Plancherel que la transformée de Fourier d'un filtre stationnaire (donc aussi son spectre d'énergie et la distorsion

d'amplitude) sont des fonctions 1-périodiques essentiellement bornées en module sur $[-1/2, 1/2[$ ou $[-1/2, 1/2]^2$. C'est d'ailleurs le sup du module de cette transformée de Fourier, à savoir la fonction $\nu \mapsto |H(\nu)|$ ou $(\nu_1, \nu_2) \mapsto |H(\nu_1, \nu_2)|$ qui réalise cette fois la constante \tilde{C} dans les inégalités de stationnarité (2.3).

2.1.2. Ce qu'il faut savoir à propos des fractions rationnelles

Les fractions rationnelles en une variable X constituent un outil omniprésent en traitement du signal ou de l'information. Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes P et Q en une variable (à coefficients complexes) que, pour des raisons pratiques qui seront expliquées plus loin, on présentera sous la forme

$$(2.4) \quad F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = X^q \frac{B(X^{-1})}{A(X^{-1})}$$

où A et B sont deux polynômes avec $B(0) \neq 0$, $A(0) = 1$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Une fraction rationnelle est donc encodée sous MATLAB en encodant l'entier q et les deux polynômes :

```
>> A = fliplr ([1 A(2) ... A(N)]);
>> B = fliplr ([B(1) B(2) ... B(M)]);
>> q
```

On rappelle que les coefficients d'un polynôme déclaré sous MATLAB sont donnés dans l'ordre des coefficients des monômes rangés suivant les puissances décroissantes, d'où la raison de l'appel à `fliplr` ci-dessus.

Les *pôles* de la fraction rationnelle F sont les points du plan complexe où la fonction $z \mapsto |F(z)|$ prend la valeur $+\infty$. Chacun de ces pôles est affecté d'un ordre entier $\nu(\alpha) \in \mathbb{N}^*$: l'ordre du pôle α est l'unique entier $\nu(\alpha)$ strictement positif tel que $|F(z)| \sim \gamma_\alpha / |z - \alpha|^{\nu_\alpha}$ (avec $\gamma_\alpha \in]0, +\infty[$) lorsque z tend vers le point α dans \mathbb{C} . Le plus souvent, les pôles sont d'ordre $\nu(\alpha) = 1$; on dit alors qu'ils sont *simples*.

Trois choses importantes sont ici à retenir :

- (1) Les pôles $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de la fraction rationnelle (s'il en existe bien sûr!), peuvent être rangés dans l'ordre des modules croissants :

$$0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_p| < +\infty.$$

En construisant les cercles concentriques de centre l'origine qui contiennent au moins l'un de ces pôles (il peut fort bien y en avoir plusieurs, distincts, sur un même cercle), on partitionne le plan complexe en un nombre fini de couronnes (autour de l'origine) dont les intérieurs sont disjoints (voir la figure 2.1). La dernière de ces couronnes (la plus éloignée de l'origine) est la seule qui soit non bornée; c'est la couronne $\{z; |z| > \max_k |\alpha_k|\}$; la plus proche de l'origine est soit le disque ouvert $\{z; |z| < \min_k |\alpha_k|\}$ si 0 n'est pas pôle, soit $\{z; 0 < |z| < \min_{k>1} |\alpha_k|\}$ si $0 = \alpha_1$ est pôle de F .

- (2) Il existe, pour la fraction rationnelle F , ce que l'on appelle une *décomposition en éléments simples* (dans $\mathbb{C}(X)$), qui est unique, de la forme

$$(2.5) \quad F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \frac{\gamma_{k,\ell}}{(X - \alpha_k)^\ell},$$

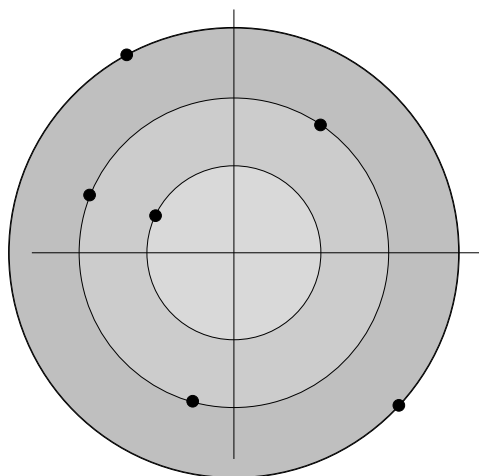


FIGURE 2.1. Pôles d'une fraction rationnelle et partitionnement du plan en couronnes

où E est un polynôme et les $\gamma_{k,\ell}$ sont des constantes complexes parfaitement déterminées en fonction des pôles $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de F et de leurs ordres $\nu(\alpha_1), \dots, \nu(\alpha_p)$. Cette décomposition s'obtient aisément ainsi : on trouve E comme le quotient de la division euclidienne $P = QE + R$ de P par Q et les $\gamma_{k,\ell}$, $\ell = 1, \dots, \nu(\alpha_j)$ en utilisant l'algorithme de division suivant les puissances croissantes cette fois de $X \mapsto P(\alpha_k + Y)$ par $X \mapsto Q(\alpha_k + Y)/Y^{\mu(\alpha_k)}$, où $\mu(\alpha_k) \geq \nu(\alpha_k)$ désigne la multiplicité de α_k comme zéro de Q ; cette division donne :

$$\gamma_{k,\nu(\alpha_k)} Y^{\mu(\alpha_k) - \nu(\alpha_k)} + \dots + \gamma_{k,1} Y^{\mu(\alpha_k) - 1} + \dots$$

et fournit donc les coefficients voulus. Bien sûr, il faut connaître les pôles de la fraction rationnelle F , mais la méthode de Newton permet d'en donner des valeurs approchées (ce sont les zéros de Q). On donnera plus tard des algorithmes permettant de décider uniquement à partir des coefficients de Q comment s'organisent ces pôles α_j par rapport au cercle de centre l'origine et de rayon 1.

- (3) Dans l'intérieur de chacune des couronnes C introduites à l'item (1) en lesquelles le plan est partitionné, il existe une manière de développer $z \mapsto F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^C z^k$$

de manière à ce que, pour tout z intérieur à C , $\sum_k |a_k^C| |z|^k < +\infty$. Les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique

$$\nu \mapsto F(|z| e^{2j\pi\nu})$$

sont les $(a_k^C |z|^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ lorsque z est un point arbitraire dans l'intérieur de la couronne C , ce qui permet d'explicitier le développement dans cette couronne, ce que l'on peut aussi faire d'ailleurs en partant de la décomposition

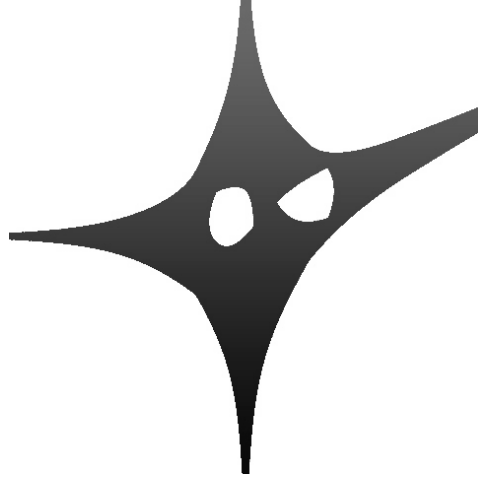


FIGURE 2.2. Logarithmes des modules des zéros d'un polynôme :
 $P(X, Y) = 1 + 5XY + X^2 - Y^3 + 3X^2Y - X^2Y^2$

en éléments simples (2.5) de F . Par exemple, la fraction $1/(X - 1)$ a les deux développements :

$$\frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{si } |z| < 1$$

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} \quad \text{si } |z| > 1.$$

Ces deux développements n'ont rien à voir ! Pour une fraction rationnelle, il y a donc autant de développements possibles que de couronnes dans la partition. Le développement dans l'unique couronne non bornée retiendra ultérieurement notre attention.

En deux variables, les choses sont autrement plus compliquées. Cela tient au fait que les zéros (dans \mathbb{C}^2 ou bien dans $(\mathbb{C}^*)^2$) d'un polynôme P en deux variables (X, Y) (ou d'une expression polynomiale en X, Y, X^{-1}, Y^{-1}) ne sont jamais isolés. Pour développer en série (de deux variables cette fois)

$$\frac{1}{P(z_1, z_2)} = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1, k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

il faut se représenter l'image de $\{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2; P(z_1, z_2) = 0\}$ par l'application
 $(z_1, z_2) \mapsto (\log |z_1|, \log |z_2|) \in \mathbb{R}^2.$

Cette représentation est possible avec MATLAB. On obtient un ensemble dont la forme rappelle celle d'une amibe en biologie (voir la figure 2.2). Il y a autant de développements possibles pour $(z_1, z_2) \mapsto 1/P(z_1, z_2)$ que de composantes C (elles sont toutes convexes) dans le complémentaire de l'ensemble ainsi représenté (par exemple six développements dans notre exemple). On trouve chaque fois le développement valide dans $\{(z_1, z_2); (\log |z_1|, \log |z_2|) \in C\}$ en prenant un point

(r_1, r_2) dans C et en calculant les coefficients de Fourier de

$$(\nu_1, \nu_2) \longmapsto \frac{1}{P(e^{r_1+2j\pi\nu_1}, e^{r_2+2j\pi\nu_2})}.$$

La liste de ces coefficients de Fourier $(\gamma_r^C(k_1, k_2))_{k_1, k_2}$ conduit au développement

$$\frac{1}{P(z_1, z_2)} = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_r^C(k_1, k_2)}{e^{k_1 r_1 + k_2 r_2}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1, k_2}^C z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

lorsque $(\log |z_1|, \log |z_2|) \in C$. Les développements dans les composantes non bornées (il en a quatre dans notre exemple) sont faciles à calculer et seront amenés à jouer un rôle en traitement d'image. On voit cependant qu'autant le maniement de l'algèbre des fractions rationnelles s'avère un outil commode et bien utile, on le verra, dans le traitement des signaux 1D, autant, en ce qui concerne le traitement des images, les choses s'avèrent du point de vue des outils mathématiques empruntés à l'algèbre beaucoup plus délicates !

2.1.3. Filtres rationnels 1D ; modèles AR, modèles ARMA, critère de stabilité de Shur

Soit $q \in \mathbb{Z}$, $\{a_1, \dots, a_{d_1}\}$ et $\{b_0, \dots, b_{d_2}\}$ deux familles respectivement de d_1 et $d_2 + 1$ nombres complexes, avec $b_0 \neq 0$. On considère la transformation qui à une suite discrète d'entrées $e \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ associe une suite de sorties $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de manière à ce que la relation entrées/sorties soit gérée par le jeu de formules :

$$(2.6) \quad s(k) + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_{\ell} s(k - \ell) = \sum_{\ell=0}^{d_2} b_{\ell} e(k + q - \ell) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Une telle transformation (dans le cas $q = 0$) est générée sous MATLAB par la routine

```
>> s = filter (B,A,e);
```

Ici les vecteurs lignes $B=[b_0 \dots]$ et $A=[1 \ a_1 \ \dots]$ figurent les vecteurs lignes où se trouvent déclarés les listes de coefficients $(a_{\ell})_{\ell=1, \dots, d_1}$ et $(b_{\ell'})_{\ell'=0, \dots, d_2}$. Le calcul de la suite des sorties s à partir de la suite e est fait sous l'hypothèse que les valeurs initiales $e(-1), \dots, e(-\max(d_1, d_2))$ et $s(-1), \dots, s(-\max(d_1, d_2))$ sont nulles. On peut envisager également d'imposer des valeurs initiales pour l'entrée e et récupérer autant de valeurs « finales » pour la sortie s en vue de l'enchaînement de telles transformations, ce suivant la routine :

```
>> [s,sfinal] = filter(B,A,e,einit);
```

Un outil particulièrement important pour étudier cette transformation est un outil de nature pour l'instant *formelle*, la *z-transformée* (des signaux à temps discret ou des images discrètes).

DÉFINITION 2.3 (*z-transformée d'un signal à temps discret, (z_1, z_2) -transformée d'une image discrète*). Soit $x = (x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ un signal à temps discret. La *z-transformée* de x est la série formelle (en la variable z considérée pour l'instant comme formelle) définie par :

$$zT[x] := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) z^{-k}.$$

De même, si $(I(k_1, k_2))_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2}$ est une image discrète, la (z_1, z_2) -transformée de I est la série formelle (en les deux variables z_1 et z_2 considérées ici comme formelles) :

$$zT[I] := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} I(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}.$$

Si l'on utilise cette notion ici, on constate qu'un moyen commode de « stocker » les relations entrée/sortie (2.6) et de prendre les z -transformées du signal d'entrée e et du signal de sortie s . On constate que le jeu de formules (2.6) équivaut à l'égalité suivante entre séries formelles¹ :

$$(2.7) \quad zT[s] \times \left(1 + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_\ell z^{-\ell}\right) = zT[e] \times z^q \times \sum_{\ell=0}^{d_2} b'_\ell z^{-\ell}.$$

Il s'agit en fait ici du cas particulier du résultat (plus général) suivant : si \mathcal{L} est un filtre digital de réponse impulsionnelle $h = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et si $e = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$, la réponse $s = h * e$ du filtre digital \mathcal{L} à l'entrée est donnée par le biais de sa z -transformée :

$$zT[s] = zT[e] \times \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k},$$

où la série formelle $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k}$ (qui correspond à la z -transformée de la réponse impulsionnelle du filtre \mathcal{L}) est aussi appelée *z -transformée du filtre digital \mathcal{L}* . La même remarque vaut en deux dimensions pour les masques : si \mathcal{L} est un masque de réponse impulsionnelle $(h(k_1, k_2))_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2}$ et si $I \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}^2}$ est un tableau de taille finie, la réponse $\mathcal{L}[I]$ du masque \mathcal{L} au tableau I est donnée par le biais de sa z -transformée :

$$zT[\mathcal{L}[I]] = zT[I] \times \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} h(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2},$$

où la série formelle $\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} h(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}$ est dite *z -transformée du masque \mathcal{L}* .

Revenons à notre exemple, à savoir l'explicitation en termes de boîte noire de la transformation des signaux à temps discret régie par le jeu de formules (2.6). La fraction rationnelle

$$F(X) = X^q \times \frac{\sum_{\ell'=0}^{d_2} b_{\ell'} X^{-\ell'}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_\ell X^{-\ell}}$$

admet, on l'a vu, parmi tous ses développements en série de Laurent (sériés par le partitionnement en couronnes du plan complexe assujetti à la répartition des pôles de F), un seul développement se présentant sous la forme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k}$, où $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ figure la réponse impulsionnelle d'un filtre réalisable. Si la fraction rationnelle F n'a aucun pôle sur le cercle unité, elle admet un certain développement de Laurent (convergent) dans l'unique couronne C_1 contenant le cercle unité. Ce développement s'exprime

$$F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{C_1}(k) z^{-k},$$

1. Deux séries formelles sont par définition égales si tous les coefficients des puissances de z impliquées dans leur expression sont égales.

où h_{C_1} figure la réponse impulsionnelle d'un filtre stable (mais non réalisable en général). Le fait que l'on ait l'égalité (2.7) au niveau des z -transformées implique que la relation entrée-sorties s'exprime alors sous la forme :

$$s(k) = (h_{C_1} * e)(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Le jeu de relations (2.6) correspond donc à l'action d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est h_{C_1} et la transformée de Fourier est la fonction 1-périodique

$$\nu \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{C_1}(k) e^{-2j\pi k\nu} = e^{2j\pi q\nu} \frac{\sum_{\ell'=0}^{d_2} b_{\ell'} e^{-2\pi j\ell'\nu}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_{\ell} e^{-2\pi j\ell\nu}}$$

(on exprimerait de manière analogue la fonction de transfert du filtre en prenant la valeur de cette fonction en $-\nu$). On obtient ce résultat en spécifiant l'identité jusque là formelle (2.7) en $z = \exp(2j\pi\nu)$ ($\nu \in \mathbb{R}$). Le graphe de cette fonction de transfert sous MATLAB s'obtient (lorsque $q = 0$) grâce à la routine :

```
>> [H,W] = freqz(B,A,N);
```

Notons d'ailleurs ici que les routines

```
>> B=fir1(N,Wn,'high');
```

```
>> B=fir1(N,Wn,'low');
```

```
>> B=fir1(N,[W1,W2],'bandpass');
```

permet le « design » de tels filtres ($a_{\ell} = 0$ pour tout $\ell \geq 1$), non nécessairement réalisables (mais par contre stables) réalisant, lorsque le seuil Wn entre 0 et 1 est précisé, des filtres passe-haut ou passe-bas de fréquence de coupure $\nu = Wn/2$, voire, si deux seuils $0 < W1 < W2 < 1$ sont précisés, un filtre passe-bande coupant les composantes fréquentielles hors de la bande ainsi précisée.

Le filtre ainsi construit n'est réalisable que si tous les pôles de la fraction rationnelle F se trouvent à l'intérieur du disque unité. On reviendra plus loin sur une condition (portant sur les coefficients $(a_{\ell})_{\ell=1,\dots,d_1}$ assurant pareille condition. Si la fraction rationnelle F n'a pas de dénominateur (c'est-à-dire si tous les a_{ℓ} sont nuls lorsque $\ell \geq 1$, c'est bien sûr le cas (donc pour les filtres générés par la routine `fir1` ci-dessus). Cette construction de filtres digitaux réalisant un jeu de relations entrées/sorties de la forme (2.6) nous conduit aux définitions suivantes :

DÉFINITION 2.4 (filtres digitaux rationnels et leurs classification). On appelle filtre digital rationnel toute transformation entrées/sorties sur les signaux à temps discret opérant sous la forme régie par un jeu de formules du type (2.6). Ce filtre est stable si la fraction rationnelle

$$F(X) = X^q \cdot \frac{\sum_{\ell'=0}^{d_2} b_{\ell'} X^{-\ell'}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_{\ell} X^{-\ell}}$$

n'a aucun pôle sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$. Il n'est réalisable (et stable en même temps) que si tous les pôles de F se trouvent dans le disque unité ouvert $\{|z| < 1\}$. La réponse impulsionnelle de ce filtre (lorsqu'il est stable) s'obtient en développant

F en série de Laurent dans la couronne ouverte C_1 contenant le cercle unité :

$$F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_\ell(k) z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{C_1}(k) z^{-k} \quad (1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1).$$

Lorsque tous les b_ℓ sont nuls pour $\ell \geq 1$, on dit que le filtre digital rationnel ainsi considéré est un filtre AR (« *All Recursive*² »). Dans le cas contraire (où les a_ℓ pour $\ell \geq 1$ ne sont pas tous nuls, ni tous les $b_{\ell'}$ pour $\ell' \geq 1$), on dit que le filtre digital rationnel ainsi considéré est un filtre ARMA (« *All Recursive with Moving Averaging*³ »). Lorsque tous les a_ℓ sont nuls pour $\ell \geq 1$, on retiendra simplement le qualificatif MA (« *Moving Averaging* »).

Comme on l'a vu, il est très important de donner, étant donné un filtre ARMA dont les paramètres $q, (a_\ell)_{\ell=1, \dots, d_1}, (b_{\ell'})_{\ell'=0, \dots, d_2}$ sont connus, un critère assurant la possibilité de réaliser un tel filtre digital rationnel comme un filtre stable. Ceci n'est possible que si tous les zéros du polynôme

$$A(X) = 1 + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_\ell X^\ell$$

sont à l'extérieur du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$, ou encore que tous les zéros du polynôme

$$P(X) = X^{d_1} + \sum_{\ell=1}^{d_1} a_\ell X^{d_1-\ell}$$

sont à l'intérieur du disque unité. Il existe précisément un algorithme (du à Schur et Cohn) assurant qu'il en est ainsi, étant donné un polynôme P de degré N (ici $N = d_1$) et fournissant une réponse uniquement en termes de conditions sur les coefficients de P (sans avoir à calculer les zéros complexes de ce polynôme⁴). Voici cet algorithme, générant à partir du polynôme initial P deux suites de polynômes $[Q_0, \dots, Q_N]$ et $[Q_0^*, \dots, Q_N^*]$ dont la connaissance permettra (en général) ensuite d'emporter la décision (voir l'algorithme 1) : Si tous les nombres $Q_j(0)$,

Algorithm 1 Schur-Cohn($[Q_0, \dots, Q_N], [Q_0^*, \dots, Q_N^*]$)

- 1: $Q_0 \leftarrow P$
 - 2: **for** $j = 1$ **jusqu'à** N **do**
 - 3: $Q_{j-1}^*(z) \leftarrow z^{N-j+1} \overline{Q_{j-1}}(1/z)$
 - 4: $Q_j(z) \leftarrow \overline{Q_{j-1}(0)} Q_{j-1}(z) - \overline{Q_{j-1}^*(0)} Q_{j-1}^*(z)$
 - 5: **end for**
-

$j = 1, \dots, N$ déduits des polynômes ainsi construits (on vérifiera que ces nombres sont par construction même des Q_j des nombres réels) sont non nuls, une condition

2. En effet, dans ce cas, le calcul de la sortie s à partir de l'entrée e à partir du jeu de relations (2.6) est un calcul complètement récursif.

3. La terminologie est encore claire : la présence d'un numérateur significatif avec des coefficients b_ℓ non tous nuls pour $\ell \geq 1$ traduit une « moyennisation glissante » du signal d'entrée avant le calcul du signal de sortie suivant un mécanisme totalement récursif.

4. Ce calcul peut bien sûr être opéré par la méthode d'approximation de Newton ; mais demeure l'imprécision numérique qui peut parfois rendre délicate à valider l'affirmation suivant laquelle un zéro donné de P se trouve bien dans $D(0,1)$ (il pourrait en effet, comme c'est souvent le cas, être très proche du cercle unité et la décision pourrait alors s'avérer aventureuse).

nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de P soient dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ est que

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad \prod_{\ell=1}^j Q_\ell(0) < 0.$$

Ce test est connu comme le test de Schur-Cohn.

2.1.4. Filtres digitaux miroir en quadrature ; une sensibilisation à l'analyse temps-échelles

a) *Une relation de trigonométrie bien classique.* La relation de trigonométrie élémentaire :

$$(2.8) \quad \cos^2(\pi\nu) + \sin^2(\pi\nu) \equiv 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

sera notre point de départ dans cette sous-section⁵. Les deux fonctions

$$\begin{aligned} \nu &\mapsto [\cos^2(\pi\nu)] \chi_{[0,1/2[}(\nu) + [\cos^2(\pi(\nu + 1/2))] \chi_{[1/2,1[}(\nu) \\ \nu &\mapsto [\sin^2(\pi\nu)] \chi_{[0,1/2[}(\nu) + [\sin^2(\pi(\nu + 1/2))] \chi_{[1/2,1[}(\nu) \end{aligned}$$

sont deux fonctions 1-périodiques de somme identiquement 1 sur \mathbb{R} : la première correspond à ce qui pourrait être le spectre d'énergie d'un filtre passe-bas, tandis que la seconde correspond à ce qui pourrait être le spectre d'énergie d'un filtre passe-haut. En effet, on a $\cos(0) = 1$ tandis que $\sin(0) = 0$. La somme de ces deux fonctions est égale à 1, et, parce que l'on interprète ces deux fonctions comme des spectres d'énergie, on parle à leur sujet de *filtres miroirs en quadrature*.

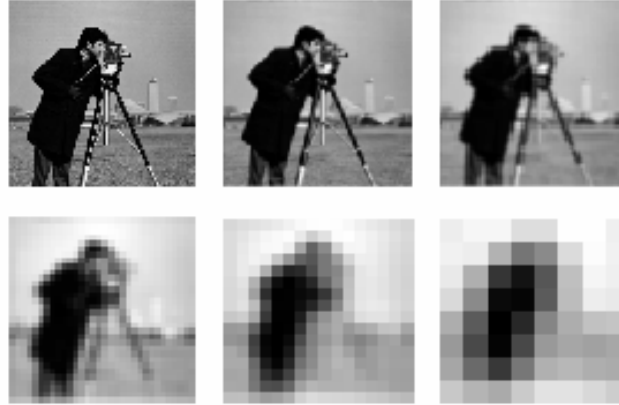
Avant de généraliser cette situation, décrivons quelques idées découlant de la théorie de David Marr sur la vision.

b) *Les travaux de Marr et l'algorithme pyramidal de Burt-Adelson.* Toute information physique, qu'elle dépende d'un paramètre (le temps, auquel cas on parle de signal) ou de plusieurs (dans le cas de deux, on parle d'image), doit être quantifiée de manière digitale aux fins d'être traitée numériquement ; c'est là l'un des premiers problèmes de la modélisation, on l'a vu à maintes reprises dans ce chapitre et tout au long de cet ouvrage. Le mécanisme de quantification numérique nécessitant une discrétisation de l'espace des temps ou du support bidimensionnel portant l'image, on a le plus souvent affaire à un mécanisme de *stockage* local d'information en vue d'une moyennisation locale.

La première phase du mécanisme de la vision rétinienne⁶ consiste précisément en cette phase de *prise de résumé* de l'information : étant donné un observateur s'étant reculé à une distance d de l'objet qu'il observe, se forme au creux de la rétine de son œil cette moyennisation locale de l'information perçue. Il est aussi naturel de concevoir que si la grille correspondant à l'échantillonnage de l'objet observé est \mathbb{Z}^n (1 est la distance entre deux pixels voisins s'il s'agit d'une image), la grille de lecture de cette information, ainsi localement moyennisée, n'est plus \mathbb{Z}^n , mais $(\kappa d\mathbb{Z})^n$ (il

5. Dont l'objectif est de présenter des aspects plus récents de l'opération de filtrage, prélude à l'analyse temps-échelles ou mieux temps-fréquences-échelles telle qu'elle sera évoquée au semestre 9 dans le cours « *Outils hilbertiens avancés et ondelettes* ».

6. C'est, par exemple, au point de vue développé en neurosciences par le chercheur britannique David Marr, 1945-1980, que l'on se réfère dans cette schématisation grossière.

FIGURE 2.3. Algorithme pyramidal : résumés successifs $R[x], R[R[x], \dots$

y a à la fois moyennisation et décimation proportionnelle à d). Ce mécanisme est simple à modéliser du point de vue mathématique lorsque $n = 1$ sur l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ des signaux digitaux d'énergie finie (la modélisation serait en tout point identique sur l'espace des images digitales d'énergie finie) : on se donne un filtre digital passe-bas de réponse impulsionnelle une suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels avec $h(0) \neq 0$, $h(k) = h(-k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (ce afin de respecter les symétries), $h(k) = 0$ si $|k| \geq M$ et les conditions supplémentaires $\sum_k h(2k) = \sum_k h(2k+1) = 1/2$ (on verra plus loin pourquoi) ; l'opérateur, qui ainsi moyennise et décime, peut être considéré comme l'opérateur $R = R^{(h)}$ de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$

$$(2.9) \quad R^{(h)} : x = x^{(0)} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_{\ell} h(\ell - 2k) \right)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Implémenté sur des signaux digitaux de longueur finie, cet opérateur de moyennisation-décimation (noté ici R_p , la dépendance en h étant implicite) transforme un signal digital de longueur $2^p + 1$ en un signal digital de longueur $2^{p-1} + 1$.

Mais le mécanisme de la vision se double d'une seconde opération, celle qui consiste en la redistribution (effectuée cette fois au niveau du cerveau de notre observateur) des moyennes ainsi stockées. Il s'agit là d'une opération tout à fait analogue à celle qui s'effectue au terme de la transmission d'une image prise par un satellite, *compressée* au niveau du satellite de manière à ce que la quantité de données à transmettre soit décimée, puis recomposée sur terre à partir d'une redistribution de ces données. Si nous revenons à notre modèle, nous voyons que cette redistribution des valeurs du *résumé* $R^{(h)}[x]$ sur le maillage temporel original (c'est-à-dire avant décimation) se fait suivant l'algorithme

$$(2.10) \quad R^* = 2(R^{(h)})^* : (x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto 2 \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_{\ell}^{(1)} h(k - 2\ell) \right)_{k \in \mathbb{Z}},$$

et l'on vérifie immédiatement que c'est bien deux fois l'action de l'adjoint de R , ce qui justifie la notation utilisée. C'est ici que nous notons que les conditions imposées à la suite $(h(k))_k$ assurent que, dans le processus de redistribution, la somme des paramètres de pondération au nœud k du maillage, soit $\sum_{\ell} h(k - 2\ell)$,

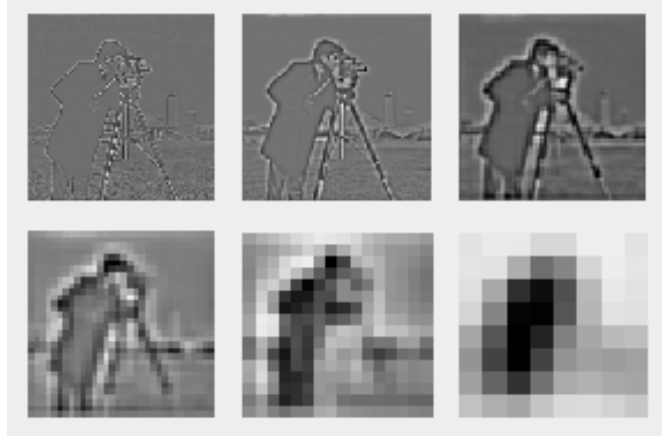


FIGURE 2.4. Algorithme pyramidal : détails successifs
 $D_0 = d_0^* = x - 2R^*R[x], \dots, D_{p-1} = d_{p-1}^*$ et résumé final

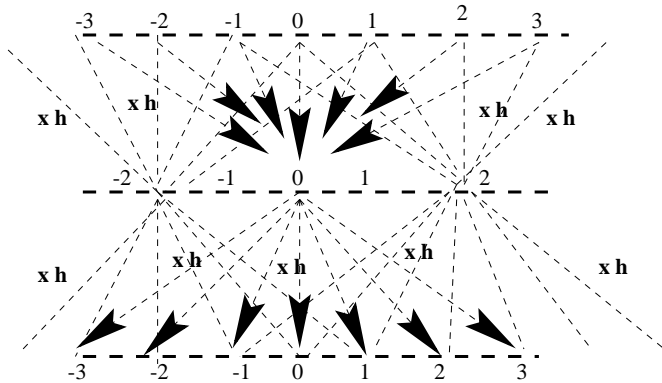


FIGURE 2.5. Algorithme pyramidal : la trame en « sablier »

est indépendante du nœud. Cette fois, il faut cependant se souvenir que la quantité d'information est multipliée par deux (car on redistribue le résumé aux nœuds du maillage originel) et que, par conséquent, si l'on implémente cet algorithme sur l'espace des signaux digitaux de longueur $2^{p-1} + 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, nous générons, h étant donnée, une application R_p^* de cet espace dans l'espace des signaux digitaux de longueur $2^p + 1$. L'algorithme 4 ci-dessous, dit *algorithme pyramidal*⁷, synthétise la décomposition d'une information digitale (ici $1D$) s de longueur $2^p + 1$, faisant apparaître les détails $D_0 = d_0^*, D_1 = d_1^*, \dots, D_{p-1} = d_{p-1}^*$ oubliés lors de la prise de résumé aux échelles de lecture successives $2^0, 2^1, \dots, 2^{p-1}$.

L'architecture *pyramidale* de l'algorithme (sous la forme d'un « sablier ») est illustrée sur la figure 2.5. L'algorithmique est esquissée sur l'algorithme 2.

7. On doit cet utile algorithme en traitement d'image à Peter J. Burt et Edward H. Adelson (1983).

Algorithm 2 DECOMPOSITION_PYRAMIDALE $([X], [R], [D_0], \dots, [D_{p-1}], p)$

```

1:  $[X] \leftarrow s$ 
2: for  $k = 0$  jusqu'à  $p - 1$  do
3:    $[R] \leftarrow \mathcal{R}_{p-k}[X]$ 
4:    $[D_k] \leftarrow [X] - \mathcal{R}_{p-k}^*[R]$ 
5:    $[X] \leftarrow [R]$ 
6: end for

```

c) De l'algorithme pyramidal à la décomposition avec une paire de filtres-miroirs. Commençons par revenir un instant sur la correspondance entre signaux analogiques et signaux à temps discrets (et donc le problème de la discrétisation des signaux analogiques). Comme on l'a indiqué dès le début de ce cours (sous-section 1.1.1), la discrétisation des signaux analogiques passe par un processus de moyennisation (donc de filtrage passe-bas) local. Voici un moyen de mettre en œuvre un tel processus. Soit φ un signal analogique d'énergie finie dont le spectre $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est continu (au sens mathématique du terme) en $f = 0$ et non nul en ce point, tel que les translatés $t \mapsto \varphi(t - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) forment un système orthonormé. Si un tel « motif » φ est bien localisé autour de l'origine, il peut être exploité comme brique de base pour convertir de manière raisonnable (c'est-à-dire en respectant les corrélations) certains signaux analogiques d'énergie finie en un signaux digitaux : au signal analogique

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi(t - k) \quad \left(\text{avec } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < +\infty \right),$$

on associe le signal digital

$$x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

(et réciproquement). Le fait que les translatés $t \mapsto \varphi(t - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) forment un système orthonormé se traduit (du fait de la formule de Plancherel) par la condition

$$(2.11) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(f + k)|^2 \equiv 1 \quad \forall f \in \mathbb{R}.$$

Le sous-espace vectoriel fermé V_0 de l'espace des signaux analogiques d'énergie finie engendré par les translatés $t \mapsto \varphi(t - k)$ de φ n'est bien sûr pas tout l'espace des signaux d'énergie finie car le fait d'imposer φ présuppose le fait que les signaux analogiques envisagés sont ceux que l'on lit à une « échelle » de lecture fixée (ici 1, correspondant au pas de discrétisation des signaux à temps discret⁸). Le sous-espace V_0 figure donc le sous-espace de référence constitué des signaux analogiques que l'on peut envisager de restituer fidèlement une fois fixé (comme ici) le pas d'échantillonnage normalisé à 1. Il faut aussi ajouter que le choix du motif φ (en particulier sa forme) peut aussi dépendre de la classe de signaux analogiques que l'on prétend analyser ou traiter : signaux acoustiques, signaux stationnaires en télécommunications, signaux hautement on stationnaires comme en analyse ou traitement des signaux bio-médicaux, signaux géophysiques, etc.

EXEMPLE 2.1. Nous donnons ici trois exemples importants :

8. En fait, il faut penser ce « pas d'échelle » ainsi normalisé à la valeur 1 comme $1/F_e$, où F_e désigne la fréquence d'échantillonnage (en Hertz) du signal analogique que l'on étudie dans sa version discrétisée (ce signal analogique ayant été échantillonné à F_e Hertz).

- Le premier (le plus simple) est celui de la fonction caractéristique $\chi_{[0,1[}$, dont les translatés $(\chi_{[k,k+1[})_{k \in \mathbb{Z}}$ engendrent le sous-espace $V_0^{[\text{haar}]}$ des signaux analogiques d'énergie finie qui sont constants sur tout intervalle $[k, k + 1[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Le défaut de ce sous-espace est qu'il s'agit d'un sous-espace dont les éléments sont des signaux analogiques irréguliers. L'avantage cependant est que le signal φ est plutôt optimal du point de vue de sa localisation près de l'origine. Le spectre de φ est la fonction $\Phi : f \mapsto \exp(-\pi j f) \text{sinc}(f)$ (qui vaut 1 en $f = 0$).
- Le second exemple concerne l'espace $V_0^{[\text{shannon}]}$ des signaux analogiques d'énergie finie dont le spectre est inclus dans $[-1/2, 1/2]$. La fonction φ que l'on prend dans ce cas est la fonction $\varphi = \text{sinc}$; on sait d'après la formule de Shannon que tout signal analogique x appartenant à $V_0^{[\text{shannon}]}$ s'exprime précisément sous la forme

$$x : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \text{sinc}(t - k)$$

avec $x_k = x(k)$ (théorème d'échantillonnage de Shannon, théorème 1.5, formule (1.39)). Cette nouvelle fonction $\varphi = \text{sinc}$ n'est certes pas aussi bien « localisée » autour de 0 (comme l'est $\chi_{[0,1[}$), mais elle « vit » tout de même essentiellement dans l'intervalle temporel $[-\pi, \pi]$. Son spectre est la fonction $\Phi : f \mapsto \chi_{[-1/2, 1/2]}(f)$ qui vaut 1 en 0 (et est continue au sens mathématique en ce point). C'est la localisation fréquentielle de φ (et non plus sa localisation temporelle) qui est dans ce cas très bonne.

- Le troisième exemple concerne l'espace $V_0^{[1\text{-spline}]}$ des signaux analogiques d'énergie finie affines par morceaux avec nœuds aux entiers $k \in \mathbb{Z}$. Ce sous-espace est important car c'est dans ce sous-espace que sont pris les signaux analogiques permettant de visualiser graphiquement un signal à temps discret comme un signal analogique. Le graphisme des logiciels tels MATLAB consiste en effet à relier les points discrets $(k, x(k))$ ($k \in \mathbb{Z}$) figurant le graphe d'un signal à temps discret par des segments de droite (la ligne droite étant le chemin le plus économique car le plus court d'un point à un autre dans le plan). Malheureusement ici la fonction « triangle » $t \mapsto \max(0, 1 - |t|)$ ne convient pas comme choix de fonction φ car ses translatés ne forment pas cette fois un système orthonormé : il y a là en effet de la redondance évidente. Il convient de prendre (on pourra le vérifier en exercice) le signal φ dont le spectre est

$$\Phi : f \mapsto \sqrt{\frac{3}{2 + \cos(2\pi f)}} \times \text{sinc}^2 f.$$

Ce signal est bien dans $V_0^{[1\text{-spline}]}$ car on vérifie que $f \mapsto \text{sinc}^2(f)$ est le spectre du signal $t \mapsto \max(0, 1 - |t|)$ dont les translatés par les entiers engendrent $V_0^{[1\text{-spline}]}$. Il a le défaut d'être moins bien localisé que $t \mapsto \max(0, 1 - |t|)$, mais ses translatés forment une base orthonormée du sous-espace de référence $V_0^{[1\text{-spline}]}$. Le spectre de φ vaut encore 1 en $f = 0$ dans ce dernier cas et est continue (au sens mathématique) en tout point f de \mathbb{R} .

Pour pouvoir conduire une analyse des signaux d'énergie finie à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (pensés donc maintenant comme des signaux analogiques de la forme

$t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi(t-k)$ appartenant à un certain sous-espace de référence $V_0 \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (une fois qu'un « bon » motif analogique φ a été choisi) comme a été conduite l'exploration *via* l'algorithme pyramidal de Burt-Adelson, il faut imposer que le motif $t \mapsto \varphi(t/2)$ (transformé de φ par « zoom arrière ») soit encore un élément de notre espace de référence V_0 . Ceci signifie qu'il doit exister une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty$ et que

$$\frac{1}{2} \varphi(t/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(t-k).$$

En prenant les spectres des deux membres dans cette relation, on trouve

$$(2.12) \quad \Phi(2f) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k f} \right) \Phi(f) \quad \forall f \in \mathbb{R}.$$

Si l'on adopte maintenant le point de vue « discret » et non plus « analogique », on observe que la fonction⁹

$$(2.13) \quad \nu \mapsto \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k \nu}$$

s'interprète comme la transformée de Fourier d'un filtre digital $\mathcal{L}^{\text{passe-bas}}$ dont la réponse impulsionnelle est la suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, où $h(k) = \sqrt{2} \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En effet, on a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k = \sqrt{2} \neq 0$. Ce filtre est stationnaire lorsque (ce qui se produit dans bien des cas) la fonction (2.13) est une fonction essentiellement bornée en module (voir la caractérisation de la stationnarité d'un filtre digital à la fin de la section 2.1.1).

Si l'on note V_1 le sous-espace fermé de V_0 engendré par les translatés du « zoom-arrière » $t \mapsto \varphi(t/2)$ du motif φ , on sait (d'après le théorème de Pythagore, c'est là tout l'intérêt de travailler dans un monde où l'on dispose d'une corrélation, celui des signaux – analogiques ou à temps discret – d'énergie finie que V_0 se décompose comme la somme orthogonale :

$$V_0 = V_1 \oplus W_1,$$

où W_1 désigne le supplémentaire orthogonal de V_1 dans V_0 . Le signal analogique

$$x : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi(t-k)$$

(attaché au signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$) se décompose donc comme la somme de deux signaux analogiques, tous deux dans V_0 , orthogonaux entre eux (donc non-corrélés), à savoir :

- la projection orthogonale $P_{V_1}[x]$ de x sur V_1 ;
- la projection orthogonale $P_{W_1}[x]$ sur W_1 .

Or il se trouve que les signaux analogiques $t \mapsto \mathcal{L}^{\text{passe-bas}}[\varphi](t-2k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) forment une base orthonormée de V_1 , tandis qu'une base orthonormée de W_1 est, elle, réalisée par les signaux $t \mapsto \mathcal{L}^{\text{passe-haut}}[\varphi](t-2k)$, où le filtre $\mathcal{L}^{\text{passe-haut}}$ est le filtre digital

9. Le facteur $\sqrt{2}$ figure ici pour une question de normalisation (c'est la norme euclidienne du vecteur $(1,1)$ de \mathbb{R}^2) ; il convient de ne pas se focaliser dans un premier temps sur sa présence pourtant nécessaire.

dont la réponse impulsionnelle est la suite $(g(k))_{k \in \mathbb{Z}} = ((-1)^k \overline{h(1-k)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Le fait que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h(1-k)} = 0$$

(donc que le filtre de réponse impulsionnelle $(g(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ puisse être considéré comme un filtre « passe-haut ») tient au fait que

$$\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k\nu} \right]_{\nu=1/2} = 0$$

car on dispose de la relation

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k\nu} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k(\nu+1/2)} \right|^2 \equiv 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

(obtenue en combinant (2.11) et (2.12)). Les deux filtres $\mathcal{L}^{\text{passe-bas}}$ et $\mathcal{L}^{\text{passe-haut}}$ ainsi construits sont dits *miroirs en quadrature* car, si l'on considère leurs transformées de Fourier m_0 et m_1 définies par

$$\begin{aligned} m_0 : \nu &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-2j\pi k\nu} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2j\pi k\nu} \\ m_1 : \nu &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) e^{-2j\pi k\nu} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_{1-k}} e^{-2j\pi k\nu}, \end{aligned}$$

on s'aperçoit que, pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} m_0(\nu) & m_1(\nu) \\ m_0(\nu+1/2) & m_1(\nu+1/2) \end{bmatrix}$$

est unitaire.

De plus, les deux signaux analogiques $P_{|V_1}[x]$ et $P_{|W_1}[x]$ s'expriment à partir du signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (tel que $x : t \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \varphi(t-j)$) sous la forme :

$$\begin{aligned} P_{|V_1}[x] : t &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \mathcal{L}^{\text{passe-bas}}[\varphi](t-2k) \\ P_{|W_1}[x] : t &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \mathcal{L}^{\text{passe-haut}}[\varphi](t-2k) \end{aligned}$$

où les signaux à temps discret $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont déduits du signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ par les relations du type décimation/filtrage :

$$\begin{aligned} (2.14) \quad r_k &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell \overline{h(\ell-2k)} = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell \overline{\alpha_{\ell-2k}} \\ d_k &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell \overline{g(\ell-2k)} = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell (-1)^{\ell-2k} \overline{\alpha_{1-(\ell-2k)}} \\ &= \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell (-1)^\ell \overline{\alpha_{2k+1-\ell}} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

On retrouve ici les processus de décimation/filtrage soutenant la construction des résumés successifs dans l'algorithme pyramidal de Burt-Adelson (relations (2.9)). Suivant la démarche inspirée précisément de cet algorithme pyramidal, le signal digital $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (de longueur la moitié de la longueur du signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ lorsque ce dernier est de longueur finie) s'interprète comme une version

résumé du signal à temps discret originel $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Ce signal $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ¹⁰ se doit être compris comme un signal non pas indexé par \mathbb{Z} , mais par $2\mathbb{Z}$ (car il s'agit d'un signal à l'échelle 2 et non plus à l'échelle de départ 1).

De même le signal digital $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (de longueur aussi la moitié de la longueur du signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ lorsque ce dernier est de longueur finie) s'interprète comme une version *détails à l'échelle 2* du signal à temps discret originel $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Ce signal $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ¹¹ se doit être compris comme un signal non pas indexé par \mathbb{Z} , mais par $2\mathbb{Z}$ (car il s'agit d'un signal à l'échelle 2 et non plus à l'échelle de départ normalisée à 1).

En considérant les adjoints R^* et D^* des opérateurs

$$R : (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (r_k)_{k \in \mathbb{Z}} \quad D : (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (d_k)_{k \in \mathbb{Z}},$$

(considérés comme des opérateurs de l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ des signaux à temps discrets et d'énergie finie dans lui-même) on constate que la suite $(R^*R[(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}]_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ figure la liste des coordonnées du signal analogique $P_{|V_1}[x]$ (lorsque $x : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi(t-k)$) dans la base orthonormée de V_0 constituée des motifs translatés $t \mapsto \varphi(t-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$), tandis que la suite $(D^*D[(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}]_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ figure la liste des coordonnées du signal analogique $P_{|W_1}[x]$ (lorsque $x : t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi(t-k)$) dans cette même base orthonormée de V_0 . La formule :

$$\text{Id}_{l^2(\mathbb{Z})} = R^*R + D^*D$$

est donc juste la transcription en termes de coordonnées dans la base orthonormée $(t \mapsto \varphi(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ du sous-espace de référence V_0 de la formule de décomposition orthogonale $x = P_{|V_1}[x] + P_{|W_1}[x]$ (pour tout signal analogique x appartenant à V_0).

On a posé ici les premiers jalons de ce qui sera l'analyse temps-échelles-fréquences des signaux à temps discret. Le motif φ dont les translatés engendrent comme une base orthonormée l'espace de référence V_0 est dit *père de l'analyse*, tandis que le motif $\psi = \mathcal{L}^{\text{passe-haut}}[\varphi] \in W_1$ est dit *ondelette-mère* de l'analyse¹². Le signal à temps-discret $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ représente la *liste des coefficients d'ondelette du signal à temps discret* $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$; il encode les « *détails du signal au premier niveau (échelle de référence 1)* ». Le signal $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ s'interprète comme une version « *résumé* » du signal à temps discret $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ cette fois à l'échelle 2 (un cran de zoom arrière).

L'action de ces opérateurs de décomposition R et D peut être itérée et l'on construit ainsi des décompositions temps-échelles-fréquences des signaux à temps discret aux fins d'analyse ou de traitement. En traitement du signal, ce procédé était connu comme le recours à des *bancs de filtres*. On a ajouté ci l'opération consistant aussi à explorer l'information suivant la gamme des échelles, inspirés en cela par les travaux de Marr sur la vision et l'algorithme pyramidal de Burt-Adelson.

EXEMPLE 2.2. Revisitons ici les deux premiers exemples introduits dans la liste d'exemples 2.1.

- Dans le premier cas (V_0^{haar}), le calcul montre que

$$\Phi(2f) = \frac{1 + e^{-2j\pi f}}{2} \Phi(f).$$

10. Il vaudrait d'ailleurs mieux le noter $(r_{2k})_{2k \in 2\mathbb{Z}}$.

11. Il vaudrait d'ailleurs mieux le noter $(d_{2k})_{2k \in 2\mathbb{Z}}$.

12. On appelle aussi parfois *ondelette-mère* ce signal ramené à l'échelle 1/2 (et normalisé en termes d'énergie), c'est-à-dire le signal analogique $t \mapsto \mathcal{L}^{\text{passe-haut}}[\varphi](t/2)/\sqrt{2}$. L'important ici est la forme du signal, pas son échelle.

Le filtre $\mathcal{L}^{\text{passe-bas}}$ est le filtre

$$(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \frac{x(k) + x(k-1)}{\sqrt{2}}.$$

Le filtre $\mathcal{L}^{\text{passe-haut}}$ est le filtre

$$(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \frac{h(k) - h(k-1)}{\sqrt{2}}.$$

On retrouve prise de moyenne et dérivation discrète implicitement en relation avec la formule de trigonométrie (2.8). L'ondelette mère est la fonction valant $1/\sqrt{2}$ sur $[0, 1[$ et $-1/\sqrt{2}$ sur $[1, 2[$ (ou la fonction valant $1/2$ sur $[0, 1/2[$ et $-1/2$ sur $[1/2, 1[$ si on la ramène à l'échelle $1/2$).

- Dans le second cas ($V_0^{\text{[shannon]}}$), le calcul montre que

$$\Phi(2f) = \chi_{[-1/4, 1/4]}(f) \Phi(f)$$

Le spectre du filtre $\mathcal{L}^{\text{passe-bas}}$ s'obtient en 1-périodisant sur \mathbb{R} la fonction

$$\nu \in [-1/2, 1/2[\mapsto \chi_{[-1/4, 1/4]}(\nu).$$

Ce n'est plus un filtre réalisable et on a $h(2k) = (-1)^k / (\sqrt{2}\pi k)$ pour $|k| \geq 1$, $h(0) = 1/\sqrt{2}$, $h(2k+1) = 0$. Le filtre passe-haut $\mathcal{L}^{\text{passe-haut}}$ s'en déduit immédiatement.

- On doit à Ingrid Daubechies (1992) la construction, pour chaque entier $N \in \mathbb{N}^*$, d'un polynôme trigonométrique

$$f \mapsto m_0^{(N)}(f) = \gamma_N \left(\frac{1 - e^{-2j\pi f}}{2} \right)^N \left(1 + \gamma_{N,1} e^{-2\pi j f} + \dots + \gamma_{N,N-1} e^{-2\pi j(N-1)f} \right)$$

de manière à ce que le motif de spectre

$$\Phi_N : f \mapsto \prod_{j=1}^{\infty} m_0^{(N)}(f/2^j)$$

puisse être considéré comme le père φ_N d'une telle analyse. Le cas $N = 1$ correspond au père de l'analyse de Haar ($\gamma_{1,1} = 1$). De plus, ce père est de support inclus dans un intervalle borné de \mathbb{R} (dont la taille bien sûr augmente de manière linéaire avec N). Les filtres $\mathcal{L}_N^{\text{passe-bas}}$ et $\mathcal{L}_N^{\text{passe-haut}}$ associés (dits *filtres de Daubechies d'ordre N*, tabulés sous MATLAB comme `daubN`) sont aujourd'hui couramment utilisés aux fins d'analyse et de traitement des signaux ou des images au travers du procédé de décomposition suivant une paire de filtres miroir en quadrature décrit plus haut.

Les algorithmes *Split and Merge*, outils clef par exemple en traitement d'image pour la réalisation des moteurs de compression tels `jpeg2000`, reposent sur le traitement des signaux ou des images à partir d'une décomposition préalable du type de celle qui vient d'être décrite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto [(r_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (d_k)_{k \in \mathbb{Z}}]$ itérée (au sens où on reprend sur les signaux à temps discret r et d l'action des deux filtres miroir en quadrature opérant cette fois sur les signaux à temps discret r et d considérés séparément).

2.2. La transformation de Laplace et le calcul symbolique

2.2.1. La transformation de Laplace des signaux analogiques causaux « fonction »

Soit $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ un signal analogique fonction que l'on suppose nul sur $] -\infty, 0[$ (un tel signal est dit causal). Si, de plus, il existe un nombre réel λ tel que

$$(2.15) \quad \int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{\lambda t} dt < \infty,$$

on définit la *transformée de Laplace* du signal fonction x comme la fonction de la variable complexe p définie par

$$(2.16) \quad \mathcal{L}[x] : p \mapsto \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt.$$

Cette transformée de Laplace $\mathcal{L}[x]$ n'est pas en général définie dans tout le plan complexe. Si $t \mapsto x(t)$ vérifie (2.15), la transformée de Laplace $\mathcal{L}[x]$ est définie dans le demi-plan

$$\operatorname{Re} p > \lambda_{\min}(x) := \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}; \int_0^{\infty} e^{\lambda t} |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

Attention : dès que λ est un nombre réel strictement plus grand que $\lambda_{\min}(x)$, on a bien $\int_0^{\infty} e^{\lambda t} |x(t)|^2 dt < +\infty$, mais rien n'exclut que $\int_0^{\infty} e^{\lambda_{\min}(x)t} |x(t)|^2 dt = +\infty$.

EXEMPLE 2.3 (L'exemple majeur des signaux $t \mapsto H(t) e^{p_0 t} t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$ ($p_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$)). Voici dans cet exemple les premiers signaux à introduire lorsque l'on prétend dresser un « dictionnaire » des transformées de Laplace. On se donne $p_0 = \lambda_0 + 2\pi j f_0$ un nombre complexe et on considère les signaux causaux du type :

$$x_{p_0, \alpha} : t \in \mathbb{R} \mapsto H(t) e^{\lambda_0 t} e^{2\pi j f_0 t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0),$$

où

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \forall \alpha > 0.$$

La fonction $\Gamma : \{\operatorname{Re} \alpha > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mentionnée ici (et apparaissant au titre de la normalisation) vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ et interpole donc les valeurs de la fonction $\alpha \mapsto (\alpha - 1)!$ aux points entiers $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Certaines valeurs prises par Γ sont importantes, telles $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. La fonction Γ est telle que

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |y|^k |\Gamma(\alpha + iy)| = 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

La transformée de Laplace du signal causal $x_{p_0, \alpha}$ est définie dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p > \lambda_0 = \operatorname{Re} p_0\}$ et vaut :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[x_{p_0, \alpha}] : p \in \{\operatorname{Re} p > \lambda_0 = \operatorname{Re} p_0\} &\mapsto \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \frac{1}{(p-p_0)^\alpha} := \frac{1}{|p-p_0|^\alpha} e^{-j\alpha \arg_{]-\pi, \pi[}(p-p_0)}. \end{aligned}$$

Par exemple, la transformée de Laplace de la fonction d'Heaviside H est

$$(2.18) \quad \mathcal{L}[H] : p \in \{\operatorname{Re} p > 0\} \mapsto \frac{1}{p}.$$

La transformée de Laplace de $t \mapsto H(t)t^{-1/2}/\sqrt{\pi}$ est la fonction

$$\mathcal{L}[x_{0,1/2}] : p \in \{\operatorname{Re} p > 0\} \mapsto 1/\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-j(\arg]_{-\pi, \pi}(p)/2}.$$

Bien sûr, tous les signaux-fonction causaux n'ont pas de transformée de Laplace : par exemple, un signal $t \mapsto x(t)$ ayant une croissance supra-exponentielle lorsque t tend vers l'infini (comme par exemple $t \in [0, +\infty[\mapsto e^{\alpha t^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive, il ne saurait avoir de transformée de Laplace car il n'existe aucun $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la condition (2.15) soit satisfaite.

2.2.2. Le cas des signaux causaux « distribution »

Soit maintenant un signal causal x qui n'est plus un signal fonction, mais la dérivée d'ordre $M \in \mathbb{N}^*$ d'un signal analogique fonction causal $t \mapsto u(t)$. Ceci signifie, on le rappelle que la « valeur » en t_0 du signal x se fait en calculant, étant donné un motif positif d'intégrale 1 bien localisé près de l'instant $t = 0$ (par exemple une la gaussienne $t \mapsto e^{-\pi t^2}$, vecteur propre de la prise de spectre) :

$$(2.19) \quad x(t_0) \simeq_{\epsilon \ll 1} \int_0^\infty \frac{d^M u}{dt^M}(t) \frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{t-t_0}{\epsilon}\right) dt =: (-1)^M \int_0^\infty u(t) \frac{d^M}{dt^M} \left[\frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{t-t_0}{\epsilon}\right) \right] dt.$$

Un tel signal causal distribution $x = d^M/dt^M[u]$ admet une transformée de Laplace si le signal causal u dont x est la « dérivée » d'ordre M (au sens où l'on a la relation (2.19)) en admet une, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^\infty |u(t)|^2 e^{\lambda t} dt < +\infty$. Dans ce cas, la transformée de Laplace du signal $x = d^M u/dt^M$ est définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \lambda_{\min}(u)$ (que l'on convient par commodité de noter aussi $\lambda_{\min}(x)$) par :

$$(2.20) \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^M u}{dt^M}\right] : \{p \in \operatorname{Re} p > \lambda_{\min}(u)\} \mapsto (-1)^M \int_0^\infty u(t) \frac{d^M}{dt^M} [e^{-pt}] dt = p^M \mathcal{L}[u](p).$$

Ainsi, la transformée de Laplace du signal distribution $P(d/dt)[\delta_0] = P[d/dt](dH/dt)$ (où $P(d/dt)$ est un opérateur différentiel $a_0(d/dt)^M + \dots + a_{M-1}d/dt + a_M$ est la fonction polynomiale :

$$p \in \{\operatorname{Re} p > 0\} \mapsto \mathcal{L}\left[P(d/dt)[\delta_0]\right] = P(p)p \times 1/p = P(p).$$

2.2.3. Convolution des signaux causaux et transformation de Laplace

Deux signaux analogiques causaux x_1 et x_2 (qu'il s'agisse de signaux fonction ou de signaux distribution) se convolent toujours en un signal causal $x_1 * x_2$ (qui en général doit être pensé comme un signal distribution lorsque x_1 et x_2 sont des signaux distribution). La *convoluée* (ou parfois *convoluée*) de x_1 et x_2 est formellement définie par :

$$(2.21) \quad \begin{aligned} t \in \mathbb{R} &\mapsto \int_{\mathbb{R}} x_1(t-\tau) x_2(\tau) d\tau = \\ &= H(t) \int_0^t x_1(t-\tau) x_2(\tau) d\tau = H(t) \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Mais lorsque x_1 et x_2 sont des signaux distribution, il convient de penser différemment la définition formelle (2.21) pour qu'elle prenne un sens. On introduit pour

cela un motif φ positif et d'intégrale 1 bien localisé autour de l'instant $t = 0$ et on définit la « valeur » du signal $x_1 * x_2$ à l'instant t_0 par

$$(2.22) \quad (x_1 * x_2)(t_0) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{\tau_1 + \tau_2 - t_0}{\epsilon}\right) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 & (\epsilon \ll 1) \text{ si } t_0 \geq 0. \end{cases}$$

Si par exemple $x_1 = d^{M_1} u_1 / dt^{M_1}$ et $x_2 = d^{M_2} u_2 / dt^{M_2}$, où u_1 et u_2 sont des signaux analogiques causaux donnés comme des signaux fonction, il faut comprendre, lorsque $t_0 \geq 0$, la « valeur » $(x_1 * x_2)(t_0)$ comme l'expression obtenue après intégrations par parties

$$(2.23) \quad (x_1 * x_2)(t_0) \simeq_{\epsilon \ll 1} (-1)^{M_1 + M_2} \iint_{\mathbb{R}^2} u_1(\tau_1) u_2(\tau_2) \frac{\partial^{M_1 + M_2}}{\partial \tau_1^{M_1} \partial \tau_2^{M_2}} \left[\varphi\left(\frac{\tau_1 + \tau_2 - t_0}{\epsilon}\right) \right] d\tau_1 d\tau_2.$$

EXEMPLE 2.4 (la convolée avec une dérivée de l'impulsion à l'origine). Si $x_1 = P(d/dt)[\delta_0] = P(d/dt)[dH/dt]$ (où $P = a_0 d^M / dt^M + \dots + a_{M-1} d/dt + a_M \text{Id}$ est un opérateur différentiel) et que $x_2 = x$ est un signal analogique causal, on voit en exploitant la relation (2.23) et en se souvenant de ce qu'est la « dérivée » d'un signal analogique $t \mapsto x(t)$, que l'on a la formule :

$$(2.24) \quad P(D)[\delta_0] * x = a_0 \frac{d^M x}{dt^M} + \dots + a_{M-1} \frac{dx}{dt} + a_M x$$

pour tout signal analogique causal $t \mapsto x(t)$ (la dérivation des signaux analogiques étant toujours entendue ici au sens des physiciens, à savoir celui qui donne un sens, *via* l'idée d'intégration par parties, à la formule de Dirac $dH/dt = \delta_0(t)$). La dérivation des signaux analogiques causaux est donc un exemple de convolution. Dériver M fois un signal analogique causal x revient à convoluer ce signal avec la dérivée d'ordre M de l'impulsion de Dirac à l'origine δ_0 .

EXEMPLE 2.5 (la convolée avec la fonction d'Heaviside). Au contraire de ce qui se passe dans l'exemple (2.4), « intégrer » un signal analogique causal $t \mapsto x(t)$, c'est le convoluer avec la fonction d'Heaviside $t \mapsto H(t)$ (puisque $dH/dt = \delta_0$), c'est-à-dire réaliser le signal défini formellement par

$$(2.25) \quad \begin{aligned} (H * x)(t_0) &= (x * H)(t_0) = \int_{\mathbb{R}} x(t - \tau) H(\tau) d\tau = H(t_0) \int_0^{t_0} x(\tau) d\tau \\ &\simeq_{\epsilon \ll 1} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}} x(\tau_2) \varphi\left(\frac{\tau_1 + \tau_2 - t_0}{\epsilon}\right) d\tau_2 \right] d\tau_1. \end{aligned}$$

La transformation de Laplace joue un rôle « opérationnel » majeur en analyse et traitement des signaux (ainsi d'ailleurs qu'en automatique) du fait du résultat immédiat (au moins formellement) suivant :

PROPOSITION 2.1 (convolution et transformation de Laplace). *Si $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont deux signaux analogiques causaux (du type fonction ou dérivée à un ordre fini d'une fonction causale $t \mapsto u(t)$) ayant tous les deux une transformée de Laplace, il en est de même de leur convolée $x_1 * x_2$. De plus, la transformée de Laplace de $x_1 * x_2$ est définie dans un demi-plan droit qui contient toujours au moins l'intersection des deux demi-plans $\{\text{Re } p > \lambda_{\min}(x_1)\}$ et $\{\text{Re } p > \lambda_{\min}(x_2)\}$ où sont*

respectivement définies les transformées de Laplace $p \mapsto \mathcal{L}[x_1](p)$ et $p \mapsto \mathcal{L}[x_2](p)$ des signaux x_1 et x_2 , et l'on a la relation fondamentale :

$$(2.26) \quad \forall p \in \left\{ \operatorname{Re} p > \max(\lambda_{\min}(x_1), \lambda_{\min}(x_2)) \right\}, \quad \mathcal{L}[x_1 * x_2](p) = \mathcal{L}[x_1](p) \times \mathcal{L}[x_2](p).$$

DÉMONSTRATION. Ceci se voit immédiatement si l'on raisonne au niveau formel ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_1 * x_2](p) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\{t-\tau \geq 0\}} x_1(\tau) e^{-p\tau} x_2(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} d\tau dt \\ &= \left(\int_0^{+\infty} x_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) \times \left(\int_0^{+\infty} x_2(\tau') e^{-p\tau'} d\tau' \right). \end{aligned}$$

Pour une preuve qui ne soit plus seulement formelle, mais soit valide lorsque x_1 et x_2 sont des signaux causaux pensés comme des signaux analogiques distribution, on pensera à remplacer φ par $t \mapsto e^{-pt}$ dans la formule (2.22), ce qui est licite puisque calculer $\mathcal{L}[x_1 * x_2](p)$ revient précisément à « tester » le signal causal $x_1 * x_2$ contre le signal analogique $t \mapsto e^{-pt}$. \square

C'est au niveau du traitement des signaux analogiques que cette proposition s'avère utile. Le passage d'un signal analogique causal $t \mapsto x(t)$ au travers d'une *boite noire* (ce qui correspond, comme on l'a vu dans le premier chapitre du cours à la fois dans le contexte analogique et dans le contexte discret, à une opération de convolution avec un certain signal causal) se traduit, au niveau des transformées de Laplace, par une opération de multiplication (beaucoup plus simple à gérer que ne l'est l'opération de convolution). *C'est à partir de cette correspondance entre signaux causaux et transformées de Laplace que l'on envisage en traitement du signal autant qu'en automatique la réalisation de « boites noires » ayant une finalité fixée (filtrer les signaux d'entrée dans une bande fréquentielle, moyenniser les signaux d'entrée ou bien les dériver, etc.)*

EXEMPLE 2.6 (la dérivation « fractionnaire »). Il est fréquent en automatique d'avoir à introduire la dérivation des signaux analogiques à un ordre qui ne soit pas nécessairement un ordre entier (par exemple devoir définir $(d^{1/2}/dt^{1/2})[x]$ lorsque x est un signal analogique. Au niveau des transformées de Laplace, cette opération correspond à la multiplication par $p \mapsto p^{1/2} = \sqrt{|p|} e^{j(\arg - \pi, \pi)^{1/2}}$ puisque l'opérateur de dérivation d/dt correspond, lui, à la multiplication par p (dans la correspondance fournie par la transformation de Laplace des signaux analogiques causaux). On s'empresse alors d'écrire $p^{1/2} = p \times p^{-1/2}$ et l'on voit alors que l'opérateur de dérivation fractionnaire $d^{1/2}/dt^{1/2}$ se réalise en enchainant les convolutions :

$$x \mapsto \tilde{x} = x * x_{0,1/2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(t - \tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau$$

et

$$\tilde{x} \mapsto \delta'_0 * x = \frac{d\tilde{x}}{dt}.$$

L'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre 1/2 intègre en fait dans sa réalisation un opérateur intégral, donc régularisant (le premier des deux opérateurs de convolution ci-dessus).

2.2.4. Les filtres analogiques causaux rationnels

Nous allons nous limiter à une classe particulière d'opérateurs de convolution des signaux causaux avec un signal analogique causal digital donné. Ce seront précisément les opérateurs qui seront réalisables « algébriquement », c'est-à-dire concrètement par des montages en parallèle ou en série de cellules électroniques (en traitement du signal par exemple) ou mécaniques (en automatique).

DÉFINITION 2.5 (filtre analogique causal rationnel). On appelle *filtre analogique causal rationnel* tout opérateur L de convolution (c'est-à-dire « boîte noire ») agissant sur les signaux analogiques causaux comme $x \mapsto h * x$, où h est un signal analogique causal ayant pour transformée de Laplace $\mathcal{L}[h]$ une fonction rationnelle $p \mapsto \mathbf{F}_L(p)$. Le signal analogique causal h est alors appelé *réponse impulsionnelle du filtre analogique causal* L , tandis que la fonction rationnelle $p \mapsto \mathcal{L}[h](p) = \mathbf{F}_L(p)$ est dite *fonction de transfert* du filtre analogique causal rationnel considéré L .

À tout filtre analogique causal rationnel L correspond de manière unique une fraction rationnelle \mathbf{F}_L . Connaître cette fraction rationnelle (c'est-à-dire connaître la fonction de transfert $p \mapsto \mathbf{F}_L(p)$ de ce filtre L), c'est connaître aussi la réponse impulsionnelle de ce filtre analogique rationnel L . En effet, comme toute fraction rationnelle, la fraction rationnelle \mathbf{F}_L admet un nombre au plus fini de pôles $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ (supposés ici distincts), chacun affecté d'un ordre $\nu(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, p$. La décomposition en éléments simples de \mathbf{F}_L dans $\mathbb{C}(X)$ s'exprime, on l'a déjà vu lors de l'étude des filtres rationnels digitaux, sous la forme

$$\mathbf{F}_L(p) = \mathbf{E}_L(p) + \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \frac{\gamma_{k,\ell}}{(p - \alpha_k)^\ell},$$

où \mathbf{E}_L est une fonction polynomiale et les $\gamma_{k,\ell}$ sont des constantes complexes parfaitement déterminées (en développant grâce à l'algorithme de division des développements limités suivant les puissances croissantes

$$Y \mapsto F_L(\alpha_k + Y) = \frac{P_L(\alpha_k + Y)}{Q_L(\alpha_k + Y)} = \sum_{\ell=-K_j}^{+\infty} u_{k,\ell} Y^\ell$$

suivant les puissances $Y \mapsto Y^\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, ce pour chaque pôle α_k de F_L); la partie entière polynomiale \mathbf{E}_L s'obtient, elle, comme le quotient $[P_L : Q_L]$ dans l'algorithme de division euclidienne.

La transformée de Laplace du filtre L est bien la fonction rationnelle $p \mapsto \mathbf{F}_L(p)$ mais, attention, seulement dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p > \max_k(\operatorname{Re} \alpha_k)\}$, car il n'y a que dans ce demi-plan droit que la transformée de Laplace de L est définie!

Il suit de la correspondance de Laplace vue précédemment que la réponse impulsionnelle h_L du filtre L est le signal analogique causal :

$$h_L := \mathbf{E}_L(d/dt)[\delta_0] + \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \gamma_{k,\ell} x_{\alpha_k,\ell},$$

c'est-à-dire, si $\alpha_k = \lambda_k + 2\pi j f_k$ ($k = 1, \dots, p$), le signal analogique causal

$$h_L : t \mapsto \mathbf{E}_L(d/dt)[\delta_0](t) + H(t) \sum_{k=1}^p e^{\lambda_k t} e^{2j\pi f_k t} \left(\sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \frac{\gamma_{k,\ell}}{(\ell-1)!} t^{\ell-1} \right).$$

2.2.5. Notions de stabilité et de spectre d'un filtre rationnel analogique causal

Un filtre analogique causal L (rationnel ou non) est dit *stable* s'il transforme tout signal analogique causal fonction d'entrée $x_e : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ borné en module sur $[0, +\infty[$ en un signal analogique de sortie qui soit aussi un signal fonction $x_s : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ lui aussi borné en module, avec de plus contrôle des normes du type $\sup_{[0, \infty[} |x_s| \leq C_L \sup_{[0, \infty[} |x_e|$, où la constante C_L ne dépend que du filtre L . Le fait qu'un filtre soit stable équivaut à dire que sa réponse impulsionnelle (causale) soit un signal analogique fonction stable (d'où la cohérence de la terminologie). Dans le cas particulier des filtres analogiques causaux rationnels, on a donc la caractérisation suivante de la stabilité :

PROPOSITION 2.2 (critère de stabilité pour les filtres analogiques causaux rationnels). *Un filtre analogique causal rationnel est stable si et seulement si $\mathbf{E}_L \equiv 0$ et tous les pôles α_k ($k = 1, \dots, p$) de la fonction de transfert \mathbf{F}_L sont de partie réelle strictement négative.*

REMARQUE 2.1 (une clause de stabilité faible). Il arrive que l'on tolère pour \mathbf{F}_L la présence de pôles sur l'axe imaginaire, mais il faut alors que ces pôles soit simples : dans ce cas, le filtre L envoie encore les signaux fonction d'entrée qui sont bornés en module et d'autre part limités dans le temps (c'est-à-dire nuls si $t > T$ pour un certain seuil $T > 0$) en des signaux fonction bornés en module sur $[0, +\infty[$. On dit alors que le filtre analogique rationnel causal L est *faiblement stable*. On peut se contenter de cette clause de stabilité « au sens faible » car dans la pratique, les signaux d'entrée que l'on considère ont une durée de vie limitée dans le temps.

Lorsque le filtre rationnel analogique est stable, sa fonction de transfert \mathbf{F}_L coïncide bien avec la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle de L dans tout le demi-plan $\{\operatorname{Re} p \geq 0\}$ et la fonction $f \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{F}_L(2\pi j f)$ est le spectre de la réponse impulsionnelle causale h_L . Si le filtre est seulement faiblement stable, le spectre de h_L s'exprime comme la somme du spectre d'un signal analogique stable avec le signal

$$f \mapsto \sum_{\{k; \lambda_k=0\}} \gamma_{k,1} \delta_{f_k}(f).$$

Dans ce cas, ce spectre n'est plus un signal fonction du fait de la présence d'impulsions de Dirac aux fréquences f_k . Si \mathbf{F}_L ne présente pas de pôles de partie réelle strictement positive, le spectre de h_L est encore la somme du spectre d'un signal stable avec le signal (qui n'est évidemment plus un signal fonction, ni même un signal mesure) :

$$f \mapsto \mathbf{E}_L(2\pi f) + \sum_{\{k; \lambda_k=0\}} \sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \frac{\gamma_{k,\ell}}{(\ell-1)!(-2j\pi)^{\ell-1}} \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}} [\delta_{f_k}](f).$$

Si \mathbf{F}_L a des pôles de partie réelle strictement positive, il n'est plus question par contre de parler de spectre du signal h_L .

On retient donc ici la définition suivante :

DÉFINITION 2.6 (spectre ou transformée de Fourier d'un filtre rationnel analogique causal). Si \mathbf{F}_L est la fonction de transfert d'un filtre rationnel analogique causal stable, on appelle *spectre de L* le spectre de la réponse impulsionnelle (stable)

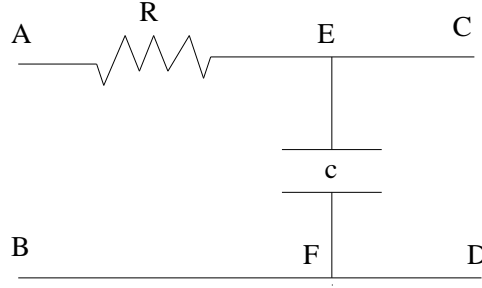


FIGURE 2.6. Une cellule RC

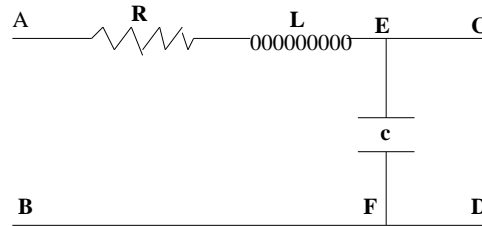


FIGURE 2.7. Une cellule RLC

de L , c'est-à-dire le signal $f \mapsto \mathbf{F}_L(2\pi jf)$. Si \mathbf{F}_L n'a aucun pôle de partie réelle strictement positive, on peut encore parler du spectre de L , mais il s'agit dans ce cas d'un signal-distribution qui est la somme du spectre d'un signal stable et du signal

$$f \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}_L(2\pi f) + \sum_{\{k; \lambda_k=0\}} \sum_{\ell=1}^{\nu(\alpha_k)} \frac{\gamma_{k,\ell}}{(\ell-1)!(-2j\pi)^{\ell-1}} \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}} [\delta_{f_k}](f).$$

Dans tous les autres cas, on ne saurait parler du spectre de L .

2.2.6. Exemples de réalisation de filtres rationnels stables à l'aide de cellules électriques

La réalisation de filtres analogiques causaux rationnels stables se fait par le biais de la construction de cellules électriques, puis de montages (en série ou en parallèle). La loi d'Ohm commande le calcul des fonctions de transfert des filtres ainsi réalisés. Nous donnons ici juste quelques exemples basiques.

Dans le premier exemple (cellule « RC », voir la figure 2.6) la loi d'Ohm permet d'observer que l'on a la relation suivante au niveau des différences de potentiel :

$$V_A(t) - V_B(t) = (Rc(d/dt) + \text{Id})[V_C(t) - V_D(t)]$$

(si le condensateur de capacité c est non chargé à l'instant $t = 0$ et si R est la mesure de la résistance). Le passage de $V_C - V_D$ à $V_A - V_B$ correspond donc à l'action d'un filtre stable de fonction de transfert

$$\mathbf{F}_L(p) = \frac{1}{1 + Rcp}$$

Dans le second exemple (cellule « RLC », voir la figure 2.7) nous avons ajouté

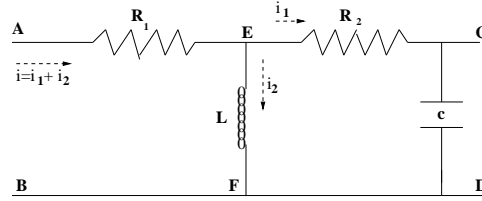


FIGURE 2.8. Une cellule RRLC

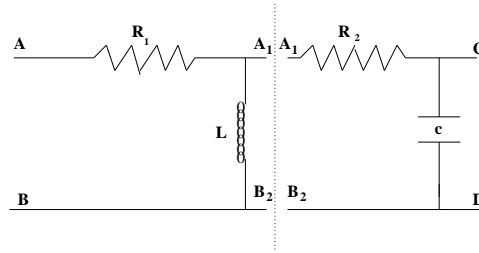


FIGURE 2.9. Une cellule RLRC

une bobine d'impédance \mathbf{L}), la loi d'Ohm permet cette fois d'observer que l'on a la relation suivante au niveau des différences de potentiel :

$$V_A(t) - V_B(t) = (\mathbf{L}c(d/dt)^2 + Rc(d/dt) + Id)[V_C(t) - V_D(t)]$$

(toujours si le condensateur de capacité c est non chargé à l'instant $t = 0$). Le passage de $V_C - V_D$ à $V_A - V_B$ correspond donc à l'action d'un filtre (toujours stable) de fonction de transfert

$$\mathbf{F}_L(p) = \frac{1}{1 + Rcp + \mathbf{L}cp^2}.$$

On peut bien sûr réaliser toute sorte de montage en série ou en parallèle (voire les deux) pour réaliser les fractions rationnelles voulues (devant correspondre à la fonction de transfert du filtre qu'il faut concevoir). Par exemple, pour ce qui est du montage réalisé sur la figure 2.8, la sortie $V_A - V_B$ s'obtient à partir de l'entrée $V_C - V_D$ suivant l'action d'un filtre L dont la fonction de transfert est

$$\mathbf{F}_L(p) = \frac{\mathbf{L}p}{\mathbf{L}cR_1p^2 + R_1R_2cp + R_1}.$$

Pour ce qui est du montage (en série) réalisé sur la figure 2.9, la sortie $V_A - V_B$ s'obtient par contre (toujours à partir de l'entrée $V_C - V_D$) suivant l'action d'un filtre L dont la fonction de transfert est

$$\mathbf{F}_L(p) = \frac{1}{R_2cp + 1} \frac{\mathbf{L}p}{R_1 + \mathbf{L}p} = \frac{\mathbf{L}p}{R_2Lcp^2 + (R_1R_2c + \mathbf{L})p + R_1}.$$

2.2.7. Digitalisation des filtres rationnels causaux analogiques

Les signaux analogiques causaux sont, on le sait, toujours discrétisés aux fins de leur étude. On dispose dans la pratique de signaux à temps discret correspondant à des signaux analogiques échantillonnés avec un pas temporel $1/F_e$. Le filtre de

réponse impulsionnelle H (de fonction de transfert $p \mapsto 1/p$) est le filtre intégrateur qui au signal causal analogique $t \mapsto x(t)$ fait correspondre le signal

$$(d/dt)^{-1}[x] : t \mapsto H(t) \int_0^t x(t - \tau) d\tau.$$

On observe que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & (d/dt)^{-1}[x]((k+1)/F_e) - (d/dt)^{-1}[x](k/F_e) = \\ & = \int_{k/F_e}^{(k+1)/F_e} x(\tau) d\tau \simeq \frac{x((k+1)/F_e) + x(k/F_e)}{2F_e} \end{aligned}$$

si l'on utilise en première approximation la formule des trapèzes pour exprimer numériquement l'intégrale (cette méthode est une méthode d'ordre 3, l'erreur commise est donc ici en $(1/F_e^3)$). Si l'on introduit les deux signaux à temps discret $\tilde{x}_{F_e} := (x(k/F_e))_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\tilde{y}_{F_e} := (y(k))_{k \in \mathbb{Z}} = ((d/dt)^{-1}[k=x](k/F_e))_{k \in \mathbb{Z}}$, on voit que, au niveau des z -transformées, on dispose de la relation

$$(1 - z^{-1}) zT[\tilde{y}_{F_e}] = \frac{1}{2F_e} (1 + z^{-1}) zT[\tilde{x}_{F_e}].$$

La multiplication par $1/p$ au niveau des transformées de Laplace (c'est-à-dire lorsque l'on se place dans le cadre des signaux causaux analogiques) se traduit par la multiplication par

$$z \mapsto \frac{1}{2F_e} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

au niveau des signaux à temps discret correspondants (lorsque la fréquence d'échantillonnage est égale à F_e).

L'homographie B_{F_e} :

$$z \in D(0, 1) \rightarrow 2F_e \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = 2F_e \frac{z - 1}{z + 1} \in \{\operatorname{Re} p > 0\}$$

transforme de manière conforme (c'est-à-dire en respectant les angles orientés des figures) et bijective le disque unité ouvert $D(0, 1)$ en le demi-plan $\{\operatorname{Re} p < 0\}$. Elle transforme l'extérieur de ce disque en le demi-plan $\{\operatorname{Re} p > 0\}$ (qui est le domaine de définition de la transformée de Laplace de H , réponse impulsionnelle du filtre analogique causal intégrateur).

PROPOSITION 2.3 (correspondance bilinéaire analogique/digital au niveau des filtres rationnels). *Si F_e désigne la fréquence d'échantillonnage des signaux analogiques, le filtre rationnel digital $L_{F_e, \text{dig}}$ correspondant au filtre analogique causal rationnel de fonction de transfert \mathbf{F}_L est le filtre rationnel dont la z -transformée est définie par*

$$zT[L_{F_e, \text{dig}}] : z \mapsto \mathbf{F}_L \left(2F_e \frac{z - 1}{z + 1} \right).$$

La routine sous **MATLAB** opérant cette transformation (et donnant les polynômes A et B impliqués dans l'expression de $L_{F_e, \text{dig}}$ sous la forme $L_{F_e, \text{dig}} = z^q B(z^{-1})/A(z^{-1})$ ($q \in \mathbb{Z}$) est la routine

`>> [A,B] = bilinear [P,Q,Fe];`

lorsque $\mathbf{F}_L(p) = P_L(p)/Q_L(p)$. Une fois ce filtre digital réalisé, il est implémentable dans le cadre des signaux à temps discret (le pas d'échantillonnage étant normalisé à $1/F_e$) *via* les routines

```
>> sortie = filter(B,A,entree);
>> sortie = filter(B,A,entree,init);
>> [sortie,final] = filter(B,A,init);
```

déjà décrites. C'est ainsi que sont transformés en filtres rationnels digitaux les filtres rationaux analogiques classiques (Butterworth, Tchebychev, elliptiques, *etc.*) dont la construction des fonctions de transfert est donnée dans la sous-section suivante.

2.2.8. Les filtres de Butterworth et l'exigence de « non-détérioration » des composantes dans la bande passante à préserver

Si \mathbf{F}_L est la fonction de transfert d'un filtre analogique rationnel sans pôles de partie réelle strictement positive, on rappelle que la *transformée de Fourier* (ou *spectre*) de ce filtre L est la spectre de la réponse impulsionnelle h_L de ce filtre. Lorsque le filtre L est stable, cette transformée de Fourier est le signal analogique continu (au sens mathématique du terme) et borné en module :

$$f \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\infty} h(t) e^{-2j\pi ft} dt = \mathbf{F}_L(2\pi jf).$$

C'est le spectre d'un signal stable.

Supposons justement que L soit un filtre stable ou faiblement stable et que

$$\mathbf{F}_L(p) = \frac{1}{\sum_{\ell=0}^N a_{\ell} p^{\ell}}$$

avec $a_0 = 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Un tel filtre est dit *passer-bas* d'ordre N . En effet, comme $f \rightarrow \mathbf{F}_L(2\pi jf)$ tend manifestement vers 0 lorsque $|f|$ tend vers ∞ , un tel filtre a bien vocation à « couper » les hautes fréquences. On introduit, lorsque les coefficients a_{ℓ} sont réels, la fraction

$$p \mapsto \mathbf{F}_L(p) \times \mathbf{F}_L(-p) = \frac{1}{\left(\sum_{\ell=0}^N a_{\ell} p^{\ell}\right) \left(\sum_{\ell=0}^N a_{\ell} (-p)^{\ell}\right)}$$

de manière à ce que

$$|\mathbf{F}_L(2j\pi f)|^2 = \frac{1}{\left(\sum_{\ell=0}^N a_{\ell} (2j\pi f)^{\ell}\right) \left(\sum_{\ell=0}^N a_{\ell} (-2j\pi f)^{\ell}\right)} = \frac{1}{1 + \sum_{\ell=1}^N \tilde{a}_{\ell} |2\pi f|^{2\ell}}.$$

Il est clair que si l'on souhaite réaliser un filtre coupant les hautes fréquences au seuil f_c (fréquence de coupure) et tel que les composantes basses fréquences ($|f| < f_c$) du signal sur lequel on fait agir le filtre soit le mieux préservées, il faut, N étant fixé, ajuster les paramètres du filtre \mathbf{F}_{L_N} de manière à ce que tous les $\tilde{a}_{\ell} = \tilde{a}_{N,\ell}$ soient nuls si $k = 1, \dots, N-1$: plus en effet une fonction réelle valant 1 en 0 a de nombreux dérivés successifs (à partir du premier) nuls en 0, plus le graphe de cette fonction se retrouve « plat » (proche de la droite horizontale d'ordonnée 1) au voisinage de 0. Pareille exigence revient à faire en sorte que

$$|\mathbf{F}_{L_N}(2j\pi f)|^2 = \frac{1}{1 + |f/f_c|^{2N}}.$$

Soit donc

$$\mathbf{F}_{L_N}(p) \times \mathbf{F}_{L_N}(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^N p^{2N} / (2\pi f_c)^{2N}}.$$

Les N pôles de la fraction rationnelle $\mathbf{F}_{L_N}(X)$ doivent être par conséquent pris parmi les $2N$ zéros complexes du polynôme $1 + (-1)^N (X/(2\pi f_c))^{2N}$. Le tri des N pôles à conserver s'opère en prenant en compte que l'on souhaite réaliser un filtre L_N stable ou tout au moins faiblement stable. On ne conserve donc que les N zéros présentant une partie réelle $\cos \gamma_{N,\ell}$ ou $\cos \delta_{N,\ell}$ (suivant que N est impair ou pair) négative ou nulle. En ne prenant en compte que ces N zéros, on construit ainsi un filtre (dit *de Butterworth d'ordre N*) dont la fonction de transfert est

$$\mathbf{F}_{L_N}(p) = \frac{1}{1 + p/(2\pi f_c)} \times \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{[N/2]} \left(1 - 2(\cos \gamma_\ell) p/(2\pi f_c) + (p/(2\pi f_c))^2\right)}$$

si N est impair, les angles γ_ℓ , $\ell = 1, \dots, [N/2]$ désignant ceux parmi les $2N$ angles $\pi q/N$, $q = 0, \dots, 2N - 1$ qui ont un cosinus négatif ou nul (en ne les comptant qu'une fois), et

$$\mathbf{F}_{L_N}(p) = \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{N/2} \left(1 - 2(\cos \delta_\ell) p/(2\pi f_c) + (p/(2\pi f_c))^2\right)}$$

si N est pair, les angles δ_ℓ , $\ell = 1, \dots, [N/2]$ désignant ceux parmi les $2N$ angles $\pi(2q+1)/(2N)$, $q = 0, \dots, 2N - 1$ qui ont un cosinus négatif ou nul (en ne les comptant qu'une fois). Ce filtre est stable dans le cas où N est impair, mais seulement faiblement stable lorsque N est pair. Le *design* de tels filtres (après transcription en des filtres digitaux) s'opère ainsi sous MATLAB :

```
>> [BN,AN] = butter(N,Wc,'high');
>> [BN,AN] = butter(N,Wc,'low');
>> [BN,AN] = butter(N,[Wc1,Wc2],'stop');
```

Ici Wc est à prendre dans $[0, 1]$, ce segment étant interprété comme l'intervalle $[0, F_e/2]$ (prenant en compte le théorème de Shannon). Ceci signifie que $1/2$ est la fréquence F_e choisie pour la conversion des filtres analogiques en filtre digitaux *via* la routine `bilinear` évoquée plus haut (sous-section 2.2.7). Le filtre obtenu ainsi est directement la version digitale (ainsi normalisé) du filtre de Butterworth d'ordre N . Sur la figure 2.10, on a représenté (avec la routine `freqz`) le module du spectre du filtre digital \mathcal{L}_N correspondant à L_N pour $N = 8$ et $N = 13$. On note que la bande passante est parfaitement préservée, mais que la zone de transition n'est pas aussi brutale qu'on le souhaiterait. Un autre type de filtre (ceux de Tchebychev) va nous permettre de pallier à ce défaut (mais en en faisant surgir un autre!).

2.2.9. Les filtres de Tchebychev : comment forcer la brulalité de la coupure ?

Pour construire une deuxième gamme de filtres (dits de Tchebychev), on se fixe deux paramètres : toujours un ordre $N \in \mathbb{N}^*$, mais aussi cette fois une marge de tolérance $\epsilon > 0$. La fonction de transfert que l'on souhaite sera toujours une fraction rationnelle à coefficients réels, de manière à ce que

$$\mathbf{F}_L(p) \times \mathbf{F}(-p) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{\epsilon,N,k} p^{2k}},$$

mais cette fois, on tâche de choisir au mieux les coefficients $\tilde{a}_{\epsilon,N,k}$ de manière :

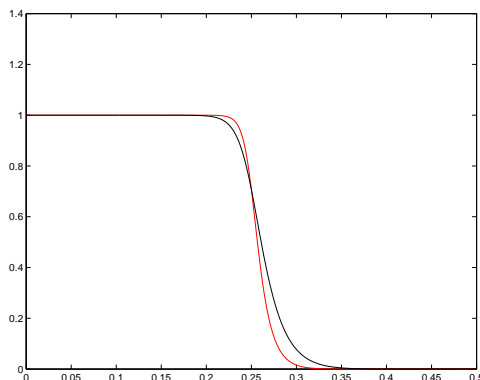


FIGURE 2.10. Module du spectre des filtres de Butterworth : $N = 8, 13$, $f_c = (1/4) F_e$

– d'une part à ce que

$$\forall f \in [0, f_c], \quad \frac{1}{1 + \epsilon} \leq |\mathbf{F}_L(2\pi f)|^2 ;$$

– d'autre part que l'on ait au point f_c :

$$\left| \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{\epsilon, N, k} (-2j\pi f_c)^{2k} \right|^2 = \epsilon ;$$

– qu'enfin (c'est l'exigence la plus importante ici), la pente en f_c de la fonction

$$f \mapsto \left| \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{\epsilon, N, k} (-2j\pi f_c)^{2k} \right|^2$$

soit maximale.

Un résultat important en approximation uniforme des fonctions (que l'on admettra ici), le théorème d'alternance de Tchebychev, assure que ceci est réalisé si l'on choisit les coefficients $a_{\epsilon, N, k}$ de manière à ce que

$$\left| \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{\epsilon, N, k} (-2j\pi f_c)^{2k} \right|^2 = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \Theta_{2N}(f/f_c) \right),$$

où Θ_{2N} est le polynôme de Tchebychev d'ordre $2N$, donné par la relation trigonométrique

$$\cos(2N\theta) = \Theta_{2N}(\cos \theta).$$

Le *filtre de Tchebychev d'ordre N et de tolérance ϵ* est ainsi le filtre $L_{\epsilon, N}$ réalisé de manière à satisfaire la relation algébrique :

$$\mathbf{F}_{L_{\epsilon, N}}(p) \times \mathbf{F}_{L_{\epsilon, N}}(-p) = \frac{1}{1 + \epsilon \Theta_N^2(p/(2j\pi f_c))}$$

(compte tenu de la formule de duplication du cosinus). Il faut à nouveau faire le tri des pôles et ne conserver que ceux qui se trouvent dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p \leq 0\}$ (c'est-à-dire la moitié). Le filtre est stable si N est impair, faiblement stable si N

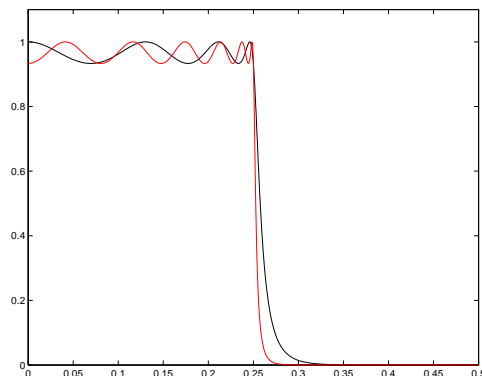


FIGURE 2.11. Module du spectre des filtres de Tchebychev : $N = 7, 12$, $R_p = .6$, $f_c = (1/4) F_e$

est pair (comme pour les filtres de Butterworth). Du point de vue de MATLAB, la valeur de la tolérance ϵ est conditionnée par le choix de R_p tel que

$$\epsilon = 1 - 10^{-R_p(\epsilon)}.$$

Cette valeur R_p doit être comprise comme la quantification en décibels de ce que l'on appelle la marge de *ripple* du filtre (d'où la signification de la terminologie R_p pour « *ripple* »). Les routines permettant le *design* d'un tel filtre (toujours transcrit en filtre digital *via* la routine `bilinear`) sont :

```
>> [B,A] = cheby1 (N,Rp,Fc,'low');
>> [B,A] = cheby1 (N,Rp,Fc,'high');
>> [B,A] = cheby1 (N,Rp, [Fc1,Fc2], 'stop');
```

Sur la figure 2.11, on a représenté (avec la routine `freqz`) le module du spectre du filtre digital \mathcal{L}_N correspondant à $L_{\epsilon,N}$ pour $R_p = .6$, $N = 7$ et $N = 12$. On note que la bande passante n'est plus préservée, mais que la zone de transition est nettement plus courte que dans ce cas des filtres de Butterworth. D'autres types de filtres, plus élaborés, fonction cette fois d'un ordre N et de deux paramètres de *ripple* (les filtres *elliptiques*, construits à partir des fonctions elliptiques) permettent (partiellement) de concilier l'exigence qui a présidé à la réalisation des filtres de Butterworth avec celle qui a présidé à la réalisation des filtres de Tchebychev. Mais, faute de temps, nous n'en parlerons pas ici.

Index

- admittance, 58
- aliasing*, phénomène de, 39
- amplitude
 - d'un signal analogique, 1
- analogique
 - signal, 1
- audio, signaux, 3
- autocorrélation
 - fenêtrée, 41
- bilinéaire
 - correspondance entre filtres rationnels analogiques et digitaux, 84
- bilinear**, routine, 84
- boite noire, 57
- Burt-Adelson, algorithme pyramidal de, 70
- butter**, routine, 86
- Butterworth
 - filtres de, 86
- causalité, d'un filtre digital, 58
- causalité, d'un filtre digital ou d'un masque, 59
- chirp* (gaussien), 49
- cheby1**, 88
- coefficients d'ondelette
 - d'un signal à temps-discret, à une échelle fixée, 74
- conservation de l'énergie
 - par prise de spectre, 18
- convolée ou convoluée
 - de deux signaux analogiques T -périodiques, 35
- convolution
 - de deux signaux distribution analogiques causaux, 77
 - de deux signaux-fonction analogiques, 31
- convolution discrète
 - de deux suites de longueur finie, 29
- corrélation
 - de deux signaux d'énergie finie à temps discret, 33
 - de deux signaux analogiques d'énergie finie, 17
- cosinus discrète, transformée en, des images (**dct2**), 54
- créneau
 - fonction, 2
- cyclique
 - N -convolution discrète, 30
- décomposition en éléments simples, 60
- dérivé
 - d'un signal analogique, 28
- Daubechies
 - filtres de, 75
- Discrete Fourier Transform (ordre N), **dftN**, 10
- distorsion d'amplitude (d'un filtre ou d'un masque), 59
- double précision
 - codage en (sous **MATLAB**), 1
- énergie
 - d'un signal d'énergie finie, 17
- énergie finie
 - signal à temps discret d' , 32
 - signal analogique d' , 4
- ergodicité, 6
- ergodique
 - produit scalaire, 6
- Fast Fourier Transform, routines **fft**, **ifft**, 11
- fenêtrage doux
 - des signaux analogiques, 3
- fft2**, **ifft2**, transformation de Fourier rapide 2D, 53
- filtre digital, 57
- filtre, analogique causal rationnel, 80
- filtres
 - bancs de, 74
- format **.wav**, 3
- formule d'inversion
 - pour la prise de spectre des signaux à temps discret d'énergie finie, 34
 - pour la prise de spectre des signaux analogiques d'énergie finie, 20

- pour les signaux stables de spectre aussi stable, 12
- fractionnaire, dérivation, 79
- Fraunhofer
 - diffraction de, 18
- Gabor
 - classe de signaux analogiques de, 9
 - Dennis, 9
- gaussienne, 2
 - dérivées d'une, 2
- gaussienne, spectre d'une, 8
- Gibbs
 - phénomène de, 39
- Haar
 - analyse de, 54
- Hamming
 - fenêtrage doux de, 4
- Hamming, Hanning, fenêtrage de, 38
- harmoniques fondamentales relatives à la période T , 23
- Heaviside
 - spectre de la fonction d', 27
- Hermite
 - polynôme de, 2
- Hertz
 - signal échantillonné à F Hertz, 3
- Hertz, unité de fréquence, 3
- Hilbert
 - transformée de, 27
- impédance, 58
- impulsion
 - à l'origine, 25
- impulsionnelle
 - réponse, 58
 - réponse, d'un filtre analogique causal rationnel, 80
- indicateur fréquentiel MUSIC, 46
- intercorrélacion
 - fenêtrée, 42
- inversion
 - de la prise de spectre des signaux à temps discret d'énergie finie, 34
 - de la prise de spectre des signaux analogiques d'énergie finie, 20
- jpeg, 54
- jpeg2000, 75
- Laplace, transformée de, des signaux analogiques causaux, 76
- laplacien
 - détection de contours *via* la prise de, 55
- masque, 57
- modulation
 - effet sur la prise de spectre, 8
- Moyal, formule de, 51
- normale
 - loi, 2
- norme
 - d'un signal d'énergie finie, 17
- ondelette-mère
 - d'une analyse, 74
- optique
 - transformation de Fourier, 18
- père
 - d'une analyse, 74
- Parseval, relations de
 - pour deux signaux à temps discret d'énergie finie, 34
 - pour deux signaux analogiques T -périodiques d'énergie finie sur $[-T/2, T/2]$, 23
 - pour deux signaux analogiques d'énergie finie sur \mathbb{R} , 20
- phase
 - d'un signal analogique, 1
- Pisarenko, méthode d'analyse spectrale de, 47
- pôle, d'une fraction rationnelle, 60
- power spectral density*, psd, 42
- presque partout, égalité entre signaux analogiques, 2
- pyramidal, algorithme, 69
- rationnel
 - filtre analogique causal, 80
- rationnel, filtre digital, 65
- réalisabilité, d'un filtre digital, 58
- Riemann-Lebesgue, propriété de, 7
- ripple*
 - marge de, pour un filtre de Tchebychev, 88
- Schur-Cohn, test de stabilité de, 67
- Shannon-Nyquist, théorème
 - d'échantillonnage de, 21
- signaux rationnels stables
 - spectre des, 9
- sinuscardinal, fonction, 4
- spectre
 - d'un filtre rationnel analogique causal, 81
 - d'un signal à temps discret, 33
 - d'un signal analogique d'énergie finie, 19
 - d'un signal analogique stable, 6
 - de la convolée de deux signaux fonction analogiques, 31
 - de la dérivée d'un signal analogique, 28
- spectre d'énergie (d'un filtre ou d'un masque), 59
- spectre du produit terme-à-terme
 - de deux signaux à temps discret d'énergie finie, 35
- stabilité

- au sens faible, pour un filtre analogique
 - causal, 81
 - d'un signal à temps discret, 32
 - d'un signal analogique, 4
- stationnarité
 - d'un filtre ou masque digital, 59
- Tchebychev, filtres de, 87
- tempéré
 - signal analogique, 28
- temps discret, signal à, 32
- transfert
 - fonction de, d'un filtre analogique causal
 - rationnel, 80
- transfert, fonction de, 58
- translation
 - effet sur la prise de spectre, 8
- Valeur Principale, signal analogique, 26
- Ville
 - Jean, 50
- wavread**, routine, 3
- Welch
 - psd au sens de, 42
- Wigner
 - Eugène, 50
- Wigner-Ville
 - transformée de, 50
- z-transformées (1D ou 2D), 63
- zeropadding**, 3