Feuille de TD 7 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 45)

<u>THEMES</u> : Théorème de Runge (version 1).

<u>Sources</u> : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : théorème de Runge. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe bornée. Montrer que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions holomorphes sur Ω (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

Exercice 2 (**) : théorème de Runge. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $A = \{a_k\}$ une collection de points dans $\mathbb{C}$, la règle étant qu'il existe un et un seul point de A dans chaque composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Montrer que toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles dans A.

Exercice 3 (*) : enveloppe d'holomorphie. Donner un exemple d'un compact K et de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 contenant tous les deux K et tels que les enveloppes d'holomorphie $\widehat{K}_{\Omega_1}$ et $\widehat{K}_{\Omega_2}$ diffèrent.

Exercice 4 (**) : théorème de Runge (mais aussi formule de Cauchy). Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe au voisinage de K. En utilisant le théorème de Runge, montrer que f s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles simples, tous dans $\mathbb{C} \setminus K$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Cauchy : montrer pour cela qu'étant donné un ouvert Ω contenant K, il existe un nombre fini N de courbes de Jordan (polygonales) de support dans Ω telles que K soit dans l'union des ouverts qu'elles enserrent.

Exercice 5 (*) : élémentaire. Montrer élémentairement que la fonction $z \mapsto 1/z$ ne peut être limite uniforme de polynômes dans l'anneau $\{1 \leq |z| \leq 2\}$. Cela est-il bien en concordance avec le théorème de Runge ?

Exercice 6 (***) : Autour du théorème de Runge.

(a). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < b_n < a_n < n$. Montrer qu'il existe un polynôme p_n tel que $|p_n(z)| \geq n$ si $\operatorname{Im} z = b_n$ et $z \in \overline{B(0,n)}$, et $|p_n(z)| \leq 1/n$ pour $z \in \overline{B(0,n)}$ et soit $\operatorname{Im} z \leq 0$, soit $\operatorname{Im} z \geq a_n$.

(b) Déduire du **(a)** l'existence d'une suite de polynômes $(p_n)_n$ convergeant simplement vers la fonction nulle, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais non uniforme au voisinage d'aucun point de l'axe réel.

(c) Construire une suite de polynômes convergeant simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et vers 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 7 (**) : Runge et dualité. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de mesure nulle. Montrer que les fractions rationnelles à pôles hors de K sont denses dans $C(K)$.

Exercice 8 (**) : Runge et dualité. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe et K de mesure nulle. Montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans $C(K)$. Que retrouve-t-on si K est un intervalle de $\mathbb{R}$?

Exercice 9 (**) : Runge et enveloppe d'holomorphie. Prouver que les items suivants sont équivalents, étant donnés deux ouverts $\Omega_1 \subset \Omega_2$ de $\mathbb{C}$.

- Toute fonction holomorphe dans Ω_1 est limite uniforme sur tout compact d'une suite de restrictions à Ω_1 de fonctions holomorphes sur Ω_2.
- Si $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = K \cup F$ avec K compact, F fermé dans Ω_2 et $K \cap F = \emptyset$, alors $K = \emptyset$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_1} = \Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$.
- Pour tout compact K de Ω_1, $\Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$ est aussi un compact de Ω_1.