Semestre 6, Année 2006-2007 SESSION 2

UE : MAP603

Date : 28 Juin 2007, 14h-17h Durée : 3h

Documents non autorisés

Barème : toutes les questions sont notées sur 20 points, ce qui fait un total de 220 points ; la note est considérée sur 200.

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

1. *On considère la fonction $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \qquad \Delta(t) = \max(0, 1 - |t|)\,.$$

Vérifier que la transformée de Fourier de Δ est la fonction

$$\widehat{\Delta} : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\Big)^2 .$$

(avec la convention $\dfrac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = 1$ si $\omega = 0$).

On a, par définition de la transformation de Fourier, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} \Delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} \Delta(t) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-i\omega t}\, dt + \int_0^1 (1-t) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= 2\int_0^1 (1-t)\cos(\omega t)\, dt = 2\Big[(1-t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\, dt \\
&= \frac{2}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) = \frac{4\sin^2(\omega/2)}{\omega^2} = \Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\Big)^2 .
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la fonction intégrable Δ étant une fonction continue de ω, on a aussi

$$\widehat{\Delta}(0) = \lim_{\substack{\omega \to 0 \\ \omega \neq 0}} \Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\Big)^2 = 1$$

et le résultat voulu est bien démontré.

2. *Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $\Psi(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} [\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi)]^2$. Montrer que la fonction Ψ est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et en déduire qu'il existe deux constantes strictement positives c et C telles que*

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}\,,\ c \le \Psi(\omega) \le C\,.$$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Si $\omega \in [-2\pi k_0, 2\pi k_0]$, alors, pour tout $|k| > k_0$, on a d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi)|^2 \leq \frac{16}{(\omega + 2k\pi)^4} \leq \frac{1}{\pi^4(|k| - k_0)^4}\,,$$

d'où l'on déduit (*via* le critère de Riemann) la convergence normale des deux séries de fonctions

$$\Big[[\widehat{\Delta}(\omega \pm 2k\pi)]^2\Big]_{k \geq k_0+1}$$

sur $[-2k_0\pi, 2k_0\pi]$. Les sommes de ces deux séries de fonctions définissent donc des fonctions continues sur $[-2k_0\pi, 2k_0\pi]$; comme Ψ s'obtient sur ce segment en ajoutant à ces deux sommes la fonction continue

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-k_0}^{k_0} [\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi)]^2\,,$$

la fonction Ψ est bien une fonction continue sur $[-2k_0\pi, 2k_0\pi]$. Comme k_0 était arbitraire, c'est en fait une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La périodicité de Ψ résulte de l'invariance du réseau $2\pi\mathbb{Z}$ par translation de 2π. Puisque Ψ est une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$, somme de fonctions positives, c'est une fonction positive bornée par une constante C (cette borne supérieure étant d'ailleurs atteinte sur $[0, 2\pi]$). D'autre part, Ψ ne s'annule pas car pour que Ψ s'annule en ω, il faudrait que $\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi) = 0$ pour tout entier k, ce qui imposerait $\sin(\omega/2 + k\pi) = 0$ pour tout entier k, soit $\omega = 2l\pi$ pour $l \in \mathbb{Z}$; mais, pour un tel $\omega = 2l\pi$, on sait que $\Psi(\omega) = \Psi(2l\pi) = \Psi(0) \geq 1 = \widehat{\Delta}^2(0)$. Comme fonction 2π-périodique continue et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction positive Ψ est donc minorée par une constante strictement positive c, cette borne inférieure étant atteinte sur $[0, 2\pi]$. On a bien l'encadrement $c \leq \Psi \leq C$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. *Vérifier, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la formule*

$$\int_0^1 \Big[(\Delta(t) + e^{i\omega}\Delta(t-1))e^{-i\omega t}\Big] e^{-2i\pi k t}\, dt = \widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi)\,.$$

On remarque que

$$\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi) \quad := \quad \int_{-1}^1 \Delta(t) e^{-i(\omega + 2k\pi)t}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \Delta(t)e^{-i\omega t}e^{-2i\pi kt}\,dt + \int_{-1}^0 \Delta(t)e^{-i\omega t}e^{-2i\pi kt}\,dt \\
&= \int_0^1 \Delta(t)e^{-i\omega t}e^{-2i\pi kt}\,dt + \int_0^1 \Delta(u-1)e^{-i\omega(u-1)}e^{-2i\pi ku}\,du \\
&= \int_0^1 \Big[(\Delta(t)+e^{i\omega}\Delta(t-1))e^{-i\omega t}\Big]e^{-2i\pi kt}\,dt\,.
\end{aligned}
$$

4. *En utilisant la formule de Parseval (que l'on rappellera) pour un élément de* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$*, déduire du résultat établi en* **(3)***, que, pour tout* $\omega \in \mathbb{R}$,

$$
\Psi(\omega) = \int_0^1 \Big|\Delta(t)+e^{i\omega}\Delta(t-1)\Big|^2\,dt = \frac{2}{3}\Big(1+\frac{\cos\omega}{2}\Big)\,.
$$

On fixe ici $\omega \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Parseval appliquée à la classe de fonction 1-périodique $\dot{g}$ dont un représentant est donné par

$$
g\ : t \in [0,1[\longmapsto (\Delta(t)+e^{i\omega}\Delta(t-1))e^{-i\omega t}\,,
$$

on a

$$
\int_0^1 |g(t)|^2 dt = \|\dot{g}\|^2_{\mathrm{per}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\dot{g})|^2\,,
$$

où

$$
c_k(\dot{g}) := \int_0^1 g(t)e^{-2ik\pi t}\,dt\,.
$$

On obtient ainsi l'égalité

$$
\Psi(\omega) = \int_0^1 \Big|\Delta(t)+e^{i\omega}\Delta(t-1)\Big|^2\,dt\,.
$$

La seconde formule est juste un calcul d'intégrale :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 [\Delta(t)]^2\,dt &= \int_0^1 [\Delta(1-t)]^2\,dt = \frac{1}{3} \\
\int_0^1 \Delta(t)\Delta(t-1)\,dt &= \int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{1}{6} \\
\int_0^1 \Big|\Delta(t)+e^{i\omega}\Delta(t-1)\Big|^2\,dt &= \frac{2}{3} + 2\,\mathrm{Re}\frac{e^{i\omega}}{6}\,,
\end{aligned}
$$

d'où le résultat (on a utilisé ici dans l'intégrant la relation $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(ab)$).

5. *Vérifier qu'il existe un élément* $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ *(avec* $c_k = c_{-k}$ *si* $k \in \mathbb{Z}$*) tel que la classe de la fonction* 2π*-périodique*

$$\omega \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\Psi(\omega)}} = \sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}$$

modulo les fonctions nulles presque partout soit la limite (dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))$*) de la suite* $(\dot{F}_n)_{n\geq 0}$*, où* $\dot{F}_n$ *a pour représentant la fonction* 2π*-périodique à valeurs réelles*

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega}\,;$$

on donnera explicitement les c_k*,* $k \in \mathbb{Z}$*, sous forme de leur expression intégrale.*

La fonction 2π-périodique réelle

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\Psi(\omega)}} = \sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}$$

est une fonction de classe C^∞, donc peut être considérée comme un représentant d'un élément $\dot{h}$ de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$ (que l'on peut aussi considérer comme un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$ en oubliant le fait que $\dot{h}$ admet un représentant à valeurs réelles). On sait que les classes des fonctions e_k : $\omega \longmapsto e^{ik\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, constituent une base hilbertienne du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big| h(\omega) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega}\Big|^2 d\omega = 0\,,$$

où

$$c_k = c_k(\dot{h}) := \langle \dot{h}\,,\, \dot{e}_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}\, e^{-ik\omega}\, d\omega$$

est le coefficient de Fourier complexe d'indice k ($k \in \mathbb{Z}$) de $\dot{h}$. Comme la fonction

$$\omega \in [-\pi,\pi] \longmapsto \sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}$$

est paire et réelle, on a $c_k = c_{-k} = \overline{c_k}$ (changer ω en $-\omega$ dans l'intégrale) et les c_k sont donc réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme trigonométrique

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega} = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} c_k \cos(k\omega)$$

(qui n'est rien d'autre que la n-ème somme partielle de Fourier de $\dot{h}$) est à valeurs réelles et la suite $(\dot{F}_n)_{n\geq 0}$ des éléments de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$ ainsi définie converge vers $\dot{h}$ dans le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$. La suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dans $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ puisque les c_k s'interprètent comme les coordonnées de $\dot{h}$ dans la base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$.

6. *Montrer que la suite des classes de fonctions*

$$t \longmapsto \sum_{k=-n}^{k=n} c_k \Delta(t-k)$$

converge dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ vers un élément $\dot{\varphi}$ (on utilisera le fait que la transformation de Fourier réalise, à un facteur multiplicatif près, une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ pour transporter le problème dans le domaine $\mathbb{R}_\omega$ des fréquences).

Si $p \geq n$ sont deux entiers positifs, la fonction

$$\sum_{n\leq |k|\leq p} c_k \Delta(t-k)$$

a pour transformée de Fourier

$$\omega \longmapsto \widehat{\Psi}(\omega) \times \Big(\sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big)$$

car

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta(t-k)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta(t-k) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Delta(u) e^{-i\omega(u+k)\omega}\, du \\ &= e^{-ik\omega} \int_{\mathbb{R}} \Delta(u) e^{-i\omega u}\, du = e^{-ik\omega}\, \widehat{\Delta}(\omega)\,. \end{aligned}$$

Grâce à la formule de Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k \Delta(t-k) \Big|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\Delta}(\omega)|^2 \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big|^2 d\omega \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{\Delta}(\omega)|^2 \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big|^2 d\omega \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\widehat{\Delta}(\omega + 2k\pi)|^2 \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \Psi(\omega) \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big|^2 d\omega \\ &\leq C \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{n\leq |k|\leq p} c_k e^{-ik\omega} \Big|^2 d\omega \end{aligned}$$

D'après la conclusion de la question **(5)**, on voit que si n est choisi assez grand, l'expression ci-dessus peut être rendue arbitrairement petite. La suite

$$\Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k \Delta(t-k)\Big)_{n\geq 0}$$

est donc de Cauchy dans le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ (qui est complet). Cette suite est bien convergente dans cet espace vers un élément $\dot{\varphi}$, dont la transformée de Fourier (au sens L^2) a d'ailleurs pour représentant

$$\omega \longmapsto \widehat{\Delta}(\omega)\sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}\,.$$

7. *Soit φ un représentant de $\dot{\varphi}$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$. Montrer (en justifiant chaque égalité) que, si l_1, l_2 sont deux entiers*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-l_1)\varphi(t-l_2)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{[\widehat{\Delta}(\omega)]^2}{\Psi(\omega)}\, e^{i(l_1-l_2)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} \frac{[\widehat{\Delta}(\omega+2k\pi)]^2}{\Psi(\omega)}\, e^{i(l_2-l_1)\omega}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l_2-l_1)\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

et en déduire que la famille $(\dot{\varphi}_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$, où

$$\varphi_{0,l}(t) := \varphi(t-l) \qquad \forall\, l \in \mathbb{Z}\,,$$

constitue un système orthonormé de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ (on pensera à utiliser, après l'avoir rappelé, la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$).

Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, la transformée de Fourier (au sens L^2) de $\dot{\varphi}(t-l)$ est l'élément de L^2 dont un représentant est

$$\omega \longmapsto e^{-il\omega}\widehat{\varphi}(\omega) = e^{-il\omega}\widehat{\Delta}(\omega)\sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}} = \frac{e^{-il\omega}}{\sqrt{\Psi(\omega)}}\,\widehat{\Delta}(\omega)\,.$$

D'après la formule de Plancherel (dédoublée), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-l_1)\varphi(t-l_2)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi(t-l_1)}(\omega)\,\overline{\widehat{\varphi(t-l_2)}(\omega)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\Delta}(\omega)\,\overline{\widehat{\Delta}(\omega)}}{\sqrt{\Psi(\omega)}\sqrt{\Psi(\omega)}}\, e^{i(l_1-l_2)\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{|\widehat{\Delta}(\omega)|^2}{\Psi(\omega)}\,e^{i(l_1-l_2)\omega}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{0}^{2\pi}\frac{|\widehat{\Delta}(\omega+2k\pi)|^2}{\Psi(\omega)}\,e^{i(l_1-l_2)\omega}\,d\omega\,.
\end{aligned}
$$

En utilisant le théorème de Fubini (avec la mesure produit de la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et de la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$, il vient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{0}^{2\pi}\frac{|\widehat{\Delta}(\omega+2k\pi)|^2}{\Psi(\omega)}\,e^{i(l_1-l_2)\omega}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Delta}(\omega+2k\pi)|^2}{\Psi(\omega)}\,e^{i(l_1-l_2)\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{i(l_1-l_2)\omega}\,d\omega
\end{aligned}
$$

d'après la définition de Ψ. Comme les classes des fonctions $\omega \longmapsto e^{ik\omega}$ forment une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), d\omega)$, la famille $(\dot\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ constitue bien un système orthonormé de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$.

8. *On désigne par V_0 le sous-espace fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ engendré par les classes des fonctions $t \longmapsto \Delta(t-k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Vérifier que la famille $(\dot\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de V_0 et en déduire que, si $\dot f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$, on a*

$$
\mathrm{Proj}_{V_0}[\dot f] = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t,dt)}} \Big[\sum_{k=-n}^{k=n} u_k(\dot f)\dot\varphi(t-k)\Big]\,,
$$

où

$$
\forall\, k\in\mathbb{Z}\,, u_k(\dot f) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t-k)\,dt\,.
$$

La famille $(\dot\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ constitue un système orthonormé d'éléments de V_0. Il reste à montrer que cette famille est aussi un système total. Mais la relation

$$
\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\Delta}(\omega)\sqrt{\frac{3}{2+\cos\omega}}\,,\ \forall\omega\in\mathbb{R}
$$

se lit aussi

$$
\widehat{\Delta}(\omega) = \sqrt{\frac{2+\cos\omega}{3}}\,\varphi(\omega)\,,\ \forall\omega\in\mathbb{R}
$$

et l'on a donc, en notant $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de la fonction continue 2π-périodique

$$
\omega \longmapsto \sqrt{\frac{2+\cos\omega}{3}} = \sqrt{\Psi(\omega)}\,,
$$

la relation

$$\Delta = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},dt)}} \sum_{k=-n}^{k=n} d_k \varphi(t-k)$$

(il suffit pour cela de reprendre le raisonnement fait aux questions **(5)** et **(6)** en remplacant $1/\sqrt{\Psi}$ par $\sqrt{\Psi}$ et en échangeant les rôles de Δ et φ). On voit ainsi que $\dot{\Delta}$ (et donc toutes les classes $\dot{\Delta}(t-k)$, $k \in \mathbb{Z}$) s'approchent dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ par des combinaisons linéaires finies des $\dot{\varphi}_{0,l}$, $l \in \mathbb{Z}$. Le système $(\dot{\varphi}_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ est donc bien total dans V_0 et c'est donc une base hilbertienne de V_0. L'assertion

$$\mathrm{Proj}_{V_0}[\dot{f}] = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t,dt)}} \Big[\sum_{k=-n}^{k=n} u_k(\dot{f})\dot{\varphi}(t-k)\Big]$$

pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ avec

$$u_k := \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t-k)\,dt = \langle \dot{f}\,,\,\dot{\varphi}_{0,k}\rangle = \Big\langle \mathrm{Proj}_{V_0}[\dot{f}]\,,\,\dot{\varphi}_{0,k}\Big\rangle$$

résulte du fait que, pour tout $\dot{g} \in V_0$,

$$\dot{g} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ V_0}} \Big[\sum_{k=-n}^{k=n} \langle \dot{g}\,,\,\dot{\varphi}_{0,k}\rangle\,\dot{\varphi}_{0,k}\Big]\,.$$

On applique ce résultat à $\dot{g} = \mathrm{Proj}_{V_0}[\dot{f}]$.

9. *Vérifier que classe de la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t/2)}{\sqrt{2}}$ *définit un élément de* V_0 *et montrer la formule*

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\,\widehat{\varphi}(\omega)\,,$$

où

$$m_0(\omega) := \sqrt{\frac{2+\cos\omega}{2+\cos(2\omega)}}\,[\cos(\omega/2)]^2\,.$$

On notera dans la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *la suite des coefficients de Fourier complexes de* $\sqrt{2}\times\dot{m}_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))$. *Vérifier que les nombres* h_n *sont réels, puis, en remarquant que la fonction* m_0 *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *(et* 2π*-périodique), montrer que la suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un élément de* $l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$.

On a

$$\dot{\varphi} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ L^2(\mathbb{R})}} \sum_{k=-n}^{k=n} c_k \Delta(t-k)\,,$$

et donc

$$\frac{\dot\varphi(t/2)}{\sqrt{2}} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ L^2(\mathbb{R})}} \sum_{k=-n}^{k=n} c_k \frac{\Delta((t-2k)/2)}{\sqrt{2}}\,.$$

Or

$$\Delta(t/2) = \Delta(t) + \frac{1}{2}(\Delta(t-1)+\Delta(t+1))$$

(car cette fonction est la « dilatée » de la fonction Δ et prend respectivement les valeurs $1/2, 1, 1/2$ aux points $-1, 0, 1$, la valeur 0 en tous les autres points entiers) et par conséquent

$$\Delta((t-2k)/2) = \Delta(t-2k) + \frac{1}{2}(\Delta(t-2k-1)+\Delta(t-2k+1))\,.$$

On voit ainsi que la classe de la fonction

$$t \longmapsto \frac{\dot\varphi(t/2)}{\sqrt{2}}$$

est bien dans V_0. On a d'autre part

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(2\omega) &= \sqrt{\frac{3}{2+\cos(2\omega)}}\,\widehat{\Delta}(2\omega) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2+\cos(2\omega)}}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2+\cos(2\omega)}}\frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}\cos^2(\omega/2) \\
&= \sqrt{\frac{2+\cos\omega}{2+\cos(2\omega)}}\,\cos^2(\omega/2)\times\widehat{\varphi}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

d'où la formule demandée. Comme la fonction $\sqrt{2}m_0$ est réelle et paire, ses coefficients de Fourier $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont réels et satisfont $h_n = h_{-n}$. La fonction 2π-périodique $\sqrt{2}\,m_0$ étant de classe C^1, on a, par intégration par parties et pour $n\in\mathbb{Z}^*$,

$$h_n = \frac{1}{in}\,c_n(\sqrt{2}\,m_0')\,.$$

Puisque $(c_n(\sqrt{2}\,m_0'))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ (puisque m_0' est continue et 2π-périodique), l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1 < +\infty$ car

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|h_n| \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}}\times\|(c_n(\sqrt{2}\,m_0'))_{n\in\mathbb{Z}}\|_2\,.$$

10. *Soit V_1 le sous-espace vectoriel fermé de V_0 engendré par les classes des fonctions*

$$t \longmapsto \varphi_{1,l}(t) := \frac{\varphi(t/2 - l)}{\sqrt{2}}\,,\ l \in \mathbb{Z}\,.$$

Vérifier que les classes $\dot\varphi_{1,l}$, $l \in \mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne de V_1 et que si

$$\dot g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k\,\dot\varphi_{0,k}$$

est un élément de V_0, la projection orthogonale de $\dot g$ sur V_1 est donnée par

$$\mathrm{Proj}_{V_1}[\dot g] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \dot\varphi_{1,k}\,,$$

où

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\,,\ v_k := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu\, h_{\nu-2k}\,.$$

En faisant le changement de variables $t = 2u$, on constate que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{1,l_1}(t)\varphi_{1,l_2}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,l_1}(u)\varphi_{0,l_2}(u)\,du = \langle \varphi_{0,l_1}\,,\,\varphi_{0,l_2}\rangle$$

(les $\sqrt{2}$ au dénominateur se simplifient grâce au facteur 2 au numérateur) et le système $(\varphi_{1,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ est bien un système orthonormé de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t, dt)$ d'après le résultat établi à la question **(7)**. Ce système constitue donc un base hilbertienne du sous-espace vectoriel fermé de V_0 qu'il engendre, à savoir V_1 (c'est un système orthonormé total dans ce sous-espace V_1). Si $\dot v$ est un élément de V_1, on a

$$\dot v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot v\,,\,\dot\varphi_{1,k}\rangle\,\dot\varphi_{1,k}\,,$$

la convergence de la série étant entendue, comme à la question **(8)**, au sens L^2, c'est-à-dire

$$\dot v = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t,dt)}} \Big[\sum_{k=-n}^{n} \langle \dot v\,,\,\dot\varphi_{1,k}\rangle\,\dot\varphi_{1,k}\Big]\,.$$

En appliquant cette formule à $\dot v = \mathrm{Proj}_{V_1}[\dot g]$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_{V_1}[\dot g] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \mathrm{Proj}_{V_1}[\dot g]\,,\,\dot\varphi_{1,k}\rangle\,\dot\varphi_{1,k}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \dot g\,,\,\dot\varphi_{1,k}\rangle\,\dot\varphi_{1,k}\,.\end{aligned}$$

Si l'on pose $v_k := \langle \dot g\,,\,\varphi_{1,k}\rangle$, on constate, par continuité du produit scalaire et puisque

$$\dot g := \lim_{\substack{n\to+\infty\\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_t,dt)}} \Big[\sum_{\nu=-n}^{n} u_\nu \dot\varphi_{0,\nu}\Big]\,,$$

que

$$v_k = \lim_{n\to+\infty} \Big[\sum_{\nu=-n}^{n} u_\nu \int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,\nu}(t)\varphi_{1,k}(t)\,dt\Big]$$

pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Or, grâce à la formule de Plancherel, on a, pour tout $k,\nu\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,\nu}(t)\varphi_{1,k}(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega)e^{-i\nu\omega}\overline{\sqrt{2}\varphi(2\omega)e^{-2ik\omega}}\,d\omega\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} m_0(\omega)[\widehat{\varphi}(\omega)]^2 e^{-i(\nu-2k)\omega}\,d\omega\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} m_0(\omega)[\widehat{\varphi}(\omega)]^2 e^{-i(\nu-2k)\omega}\,d\omega\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{0}^{2\pi} m_0(\omega)[\widehat{\varphi}(\omega+2l\pi)]^2 e^{-i(\nu-2k)\omega}\,d\omega\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} m_0(\omega)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\widehat{\varphi}(\omega+2l\pi)]^2\Big) e^{-i(\nu-2k)\omega}\,d\omega\,,
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du théorème de Fubini appliqué avec la mesure produit de la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et de la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$. Or

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\widehat{\varphi}(\omega+2l\pi)]^2 = \frac{3}{2+\cos\omega}\sum_{l\in\mathbb{Z}}[\widehat{\Delta}(\omega+2l\pi)]^2 = 1$$

pour tout $\omega\in\mathbb{R}$ (d'après la question **(5)**). On a donc bien

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{0,\nu}(t)\varphi_{1,k}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,m_0(\omega)e^{-i(\nu-2k)\omega}\,d\omega = h_{\nu-2k}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
v_k &= \lim_{n\to+\infty}\Big[\sum_{\nu=-n}^{n} u_\nu\int_{\mathbb{R}}\varphi_{0,\nu}(t)\varphi_{1,k}(t)\,dt\Big]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big[\sum_{\nu=-n}^{n} u_\nu h_{\nu-2k}\Big]\\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu h_{\nu-2k}\,,
\end{aligned}$$

la convergence normale de la dernière série bilatère résultant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

11. *Montrer que l'on définit un opérateur linéaire continu de $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ dans lui-même en posant*

$$R[(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}] := \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu\, h_{\nu-2k}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\,;$$

on vérifiera pour cela les inégalités (que l'on justifiera) :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|\,|h_{\nu-2k}|\Big)^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|\,\sqrt{|h_{\nu-2k}|}\times\sqrt{|h_{\nu-2k}|}\Big)^2\\ &\leq \|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2\,|h_{\nu-2k}|\Big]\\ &\leq \|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1^2\,\|(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|^2\,.\end{aligned}$$

Vérifier que l'adjoint R^* de R est l'opérateur

$$(v_k)_{k\in\mathbb{Z}}\longmapsto\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} v_\nu\, h_{k-2\nu}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|\,|h_{\nu-2k}|\Big)^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|\,\sqrt{|h_{\nu-2k}|}\times\sqrt{|h_{\nu-2k}|}\Big)^2\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|h_{\nu-2k}|\Big)\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2|h_{\nu-2k}|\Big)\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|h_\nu|\Big)\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2|h_{\nu-2k}|\Big)\\ &\leq \|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2\,|h_{\nu-2k}|\Big]\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'invariance de la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ par translation. Par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2\,|h_{\nu-2k}| &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|u_\nu|^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_{\nu-2k}|\Big)\\ &\leq \|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1\|(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2^2\,.\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\|R[(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2 \leq \|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1\times\|(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2\,,$$

puisque

$$\begin{aligned}\|R[(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2^2 &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu h_{\nu-2k}\Big|^2 \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |u_\nu|\,|h_{\nu-2k}|\Big)^2 .\end{aligned}$$

Ceci prouve que R est bien un opérateur linéaire (la linéarité est évidente) et continu de $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ dans lui-même, de norme au plus $\|(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1$. Pour trouver l'adjoint de R, il suffit d'appliquer la formule d'adjonction, l'adjoint étant défini par la règle

$$\langle R[u]\,,\,v\rangle = \langle u\,,\,R^*[v]\rangle \qquad \forall u,v\in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\,.$$

Or, grâce au théorème de Fubini et à une interversion des indices muets ν et k,

$$\begin{aligned}\langle R[u]\,,\,v\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu h_{\nu-2k}\Big)v_k \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} u_\nu\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k h_{\nu-2k}\Big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} v_\nu h_{k-2\nu}\Big),\end{aligned}$$

ce qui prouve par identification (avec la formule d'adjonction) que l'adjoint R^* de R est bien l'opérateur

$$(v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \longmapsto \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} v_\nu\, h_{k-2\nu}\right)_{k\in\mathbb{Z}} .$$