Semestre 6, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT613

Date : 22 Avril 2008, 14h-17h Durée : 3h

Documents non autorisés

Exercice. Soient $\dot{f}$ et $\dot{g}$ deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_N \ : \theta \longmapsto g_N(\theta) := g(N\theta)$ définit encore un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} g(N\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi/N]} g(N\theta) e^{-ik\theta} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kl/N} \Big)\, d\theta\,.$$

En déduire que les coefficients de Fourier $c_k(\dot{g}_N)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont nuls si $k \in \mathbb{Z}$ n'est pas un multiple de N et que $c_{kN}(\dot{g}_N) = c_k(\dot{g})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant la transformation de Fourier et la formule de Parseval (que l'on rappellera), montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \Big(\int_{[0,2\pi]} f(\theta) \overline{g(N\theta)}\, d\theta \Big) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(\theta)\, d\theta \times \int_{[0,2\pi]} \overline{g(\theta)}\, d\theta\,.$$

Questions de cours. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(S_N[\dot{f}])_N$ des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\| \ \|_{\mathbb{T},1}$ (rappeler la définition de la N-ième somme de Fourier de $\dot{f}$) ;
2. Si $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(S_N[\dot{f}])_N$ des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\| \ \|_{\mathbb{T},2}$;
3. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(T_N[\dot{f}])_N$ des sommes de Féjer de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\| \ \|_{\mathbb{T},1}$ (rappeler la définition de la N-ième somme de Féjer $T_N[\dot{f}]$ de $\dot{f}$ et sa relation avec la suite $(S_k[\dot{f}])_{k\in\mathbb{N}}$) ;
4. si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(S_N[\dot{f}](\theta_0))_N$ converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite en θ_0 (si vous pensez que le jeu d'hypothèses s'avère incomplet, dites comment le compléter pour obtenir un énoncé correct) ;
5. si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(T_N[\dot{f}](\theta_0))_N$ des sommes de Féjer de $\dot{f}$ évaluées en θ_0 converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en θ_0.

Problème (en deux parties)

I. Les polynômes de Hermite.

I.1. Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'un élément $\dot{f}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$. Existe-t'il un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier soit la fonction caractéristique du segment $[-\Omega, \Omega]$ de l'espace des fréquences ? Sinon, dites pourquoi. Donner un exemple d'un élément $\dot{f}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

I.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$H_k(t) := (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}[e^{-t^2}] .$$

Vérifier (par récurrence sur k) que H_k est une fonction polynômiale de degré exactement k, avec

$$H_k(t) = 2^k t^k + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j}\, t^{k-j} \,,\ \ \alpha_{k,j} \in \mathbb{R} \,,\ \ j = 1, ..., k \,.$$

Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation

$$\frac{d}{dt}\Big[H_k(t) e^{-t^2}\Big] = -H_{k+1}(t) e^{-t^2} \,.$$

I.3. Pour tout couple d'entiers positifs (k, l) tel que $0 \leq k < l$, vérifier (en utilisant le procédé d'intégration par parties) que $\int_{\mathbb{R}} t^k H_l(t) e^{-t^2}\, dt = 0$ (on justifiera aussi la convergence ce cette intégrale, puis on fera d'abord le calcul dans les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$) ; en déduire

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(t) H_l(t) e^{-t^2}\, dt = 0$$

pour toute paire d'entiers positifs (k, l) telle que $0 \leq k < l$.

I.4. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale

$$t \longmapsto h_k(t) := \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{k/2} \sqrt{k!}}\, H_k(t)$$

(avec la convention $0! = 1$), dite k-ième polynôme de Hermite, est un élément de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\, dt)$ et que le système $(\dot{h}_k)_k$ est un système orthonormé du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $H := L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\, dt)$. On note $\langle\, ,\, \rangle_H$ le produit scalaire dans H, défini, on le rappelle, par

$$\langle \dot{f} \,,\, \dot{g} \rangle_H := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{g(t)}\, e^{-t^2}\, dt \qquad \forall\, \dot{f} \,, \dot{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\, dt) \,.$$

I.5. Soit $\dot{f} \in H$, tel que $\langle \dot{f}, \dot{h}_k \rangle_H = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et f un représentant de $\dot{f}$. Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) t^k e^{-t^2}\, dt = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-t^2}$ est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2}\, e^{-i\omega t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k \omega^k}{k!} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t) t^k e^{-t^2}\, dt \Big) = 0$$

(veiller à justifier proprement la première égalité). Montrer que nécessairement $\dot{f} = 0$. En déduire que $(\dot{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de H.

II. La diagonalisation de la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$.

II.1. Vérifier que la fonction

$$F \ : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; former une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont F est solution et en déduire quelle est la transformée de Fourier de la gaussienne

$$g \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,.$$

II.2. En utilisant la formule de Taylor au point x pour la fonction analytique $X \longmapsto e^{-X^2}$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-(x+h)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H_k(x) e^{-x^2}\, \frac{h^k}{k!}\,;$$

en déduire, en choisissant convenablement h en fonction de $t \in \mathbb{R}$, que l'on a, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, l'identité

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x)\,. \tag{$\dagger$}$$

Cette identité ($\dagger$) subsiste-t'elle si $t \in \mathbb{C}$ et pourquoi ? On pose par la suite $G(t, x) := e^{2tx - t^2}$ pour $(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

II.3. Pour tout $t, \omega \in \mathbb{R}$, on pose

$$U(t,\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} e^{-t^2+2xt-x^2/2}\, dx\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

En utilisant le résultat établi en **II.1** et le changement de variable affine $x \longmapsto x - 2t$ sous l'intégrale, vérifier que

$$\begin{aligned} U(t,\omega) &= \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} e^{2it\omega+t^2} = \sqrt{2\pi}\, G(it,\omega)\, e^{-\omega^2/2} \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} [H_k(\omega) e^{-\omega^2/2}]\,. \end{aligned}$$

II.4. En admettant que l'on puisse intervertir intégration et sommation dans l'expression

$$U(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x) e^{-x^2/2} \Big)\, dx$$

déduite de $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$, vérifier, pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$U(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\widehat{H_k e^{-t^2/2}}(-\omega)}{k!}\,.$$

En déduire que les classes dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ des fonctions

$$t \longmapsto H_k(t) e^{-t^2/2}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

sont des vecteurs propres de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ (si l'on décide de confondre les espaces des temps et des fréquences) ; quelle est pour chacun de ces vecteurs la valeur propre correspondante ?

II.5. Citer le résultat du cours permettant d'affirmer que si $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$, la transformation

$$T \ : \dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\dot{f})$$

est une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ (si l'on convient encore d'identifier les espaces des temps et des fréquences). Montrer qu'il existe une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ constituée de vecteurs propres pour T ; quelles sont les quatre valeurs propres possibles de T ? Vérifier que $T \circ T \circ T \circ T = \mathrm{Id}$. Retrouver ce dernier résultat en utilisant la formule d'inversion de Fourier.