Semestre 5, Année 2010-2011 SESSION 1

UE : MHT512

Date : 13 Décembre 2010, 14h-17h Durée : 3h

Documents non autorisés

Exercice 1

Soit f une fonction à valeurs complexes, intégrable sur $[0,1]$ relativement à la mesure de Lebesgue.

a. Énoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et montrer comment appliquer ce théorème pour prouver que la fonction

$$T(f)\ : x \in [0,1] \longmapsto \int_{[0,x]} f(t)\, dt$$

est continue sur $[0,1]$.

b. Énoncer le théorème de Fubini (dans le contexte général de la théorie de l'intégration abstraite) en précisant bien les clauses nécessaires à son application.

c. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T^{[k]}(f) = (T \circ T \circ \cdots \circ T)(f)$, où l'action de T est itérée k fois. Vérifier que $T^{[k]}(f)$ est la fonction continue sur $[0,1]$ définie par

$$T^{[k]}(f)(x) = \int_{[0,x]} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\, dt.$$

d. Énoncer l'inégalité de Hölder (dans le contexte général de la théorie de l'intégration abstraite).

e. Soit $p \in]1,+\infty[$. Soit K une fonction mesurable à valeurs complexes sur $[0,1]^2$ (par rapport à la tribu de Lebesgue) et telle que

$$\iint_{[0,1]^2} |K(x,t)|^p\, dxdt < +\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{L}^{p'}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dt)$, où $1/p' = 1 - 1/p$. Établir l'inégalité

$$\begin{aligned} &\left(\int_{[0,1]} \Big(\Big| \int_{[0,1]} K(x,t)\, f(t)\, dt \Big|^p \Big)\, dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{[0,1]\times[0,1]} |K(x,t)|^p\, dxdt \right)^{1/p} \times \left(\int_{[0,1]} |f(t)|^{p'}\, dt \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

et en déduire que pour dx presque tout $x \in [0,1]$, la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto K(x,t)f(t)$$

est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2

a. Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-tx^2} \frac{1}{1+x^2}$$

est intégrable sur $[0,\infty[$ et que

$$F\,:\; t \in [0,\infty[\mapsto \int_{[0,\infty[} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

est une fonction continue (citer avec précision le théorème du cours à invoquer). Montrer que F est positive décroissante et que $F(0) = \pi/2$.

b. Montrer que la fonction F est dérivable sur tout intervalle ouvert $]t_0,+\infty[$ (si $t_0 > 0$) et que, sur cet intervalle,

$$F'(t) = -\int_{[0,\infty[} x^2 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

(citer avec précision le théorème du cours à invoquer). En déduire que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

c. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,\infty[$ et vérifier que l'on a, pour tout $t > 0$,

$$F(t) - F'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{[0,\infty[} e^{-u^2}\,du.$$

d. Déduire du **c** (en utilisant la méthode de la variation de la constante pour la résolution d'une équation différentielle du premier ordre) que, pour tout $t > 0$,

$$F(t) = \Big(\frac{\pi}{2} - \int_{[0,\infty[} e^{-u^2}\,du \times \int_{[0,t]} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\Big)e^t. \tag{$*$}$$

e. Rappeler la formule de changement de variables pour les intégrales sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Déduire de la formule (*) la relation

$$\forall\, t > 0,\; F(t)e^{-t} = \frac{\pi}{2} - 2\int_{[0,\infty[} e^{-u^2}\,du \times \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du.$$

f. Déduire du résultat établi au **(e)** que

$$\int_{[0,\infty[} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Retrouver ce résultat en calculant de deux manières (recours à Fubini-Tonelli ou à l'intégration en coordonnées polaires) l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $(x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $dxdy$.

Exercice 3

a. Soit $P = (a,b) \times (c,d)$ un pavé borné de $\mathbb{R}^2$ dont la longueur d'un des côtés au moins ($b-a$ ou $d-c$) est un entier positif. En exprimant l'intégrale double en fonction de a,b,c,d, montrer que

$$\iint_P \exp(2i\pi(x+y))\,dxdy = 0.$$

b. Soit $Q = (A,B) \times (C,D)$ un pavé borné de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\overline{Q} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{P_k},$$

où les P_k, $k = 1, ..., N$, sont des pavés bornés de $\mathbb{R}^2$ d'intérieurs deux-à-deux disjoints. En calculant de deux manières différentes l'intégrale

$$\iint_Q \exp(2i\pi(x+y))\,dxdy,$$

montrer que si chacun des pavés P_k a <u>au moins</u> un côté de longueur un entier positif, il en est de même du pavé Q (*i.e.* $B-A \in \mathbb{N}$ ou $D-C \in \mathbb{N}$).