Semestre 5, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT512

Date : 18 Décembre 2007, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Problème I (intégration « pratique »)

1.a. *Pour quelles valeurs du paramètre réel λ la fonction*

$$t \in]0,+\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}e^{-t}$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ *par rapport à la mesure de Lebesgue ?*

D'après le critère de Riemann (cours de L2), la fonction $t \in]0,\infty[\longmapsto t^{\alpha}$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$) est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > -1$ et sur $[1,\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$. Pour que

$$t \in]0,+\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}e^{-t}$$

soit intégrable sur $]0,1]$, il faut et il suffit donc (puisque $e^{-t} \sim 1$ au voisinage de $t = 0^+$) que $\lambda - 1 > -1$, *i.e* $\lambda > 0$. Comme $e^{-t} = O(t^{-\lambda-1})$ au voisinage de $+\infty$ (car l'exponentielle impose sa limite, ici zéro, à toutes les fonctions puissance), on a $t^{\lambda-1}e^{-t} = O(t^{-2})$, d'où l'intégrabilité de cette fonction sur $[1,+\infty[$ quelque soit λ dans $\mathbb{R}$. La fonction proposée est donc intégrable sur $]0,\infty[$ si et seulement si $\lambda > 0$.

1.b. *Soit λ un nombre réel tel que la fonction*

$$t \in]0,\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}\, e^{-t}$$

soit intégrable sur $]0,\infty[$. *Citez (en indiquant comment vous les utilisez) les résultat du cours qui vous permettent d'affirmer que, pour tout nombre complexe z tel que* $\operatorname{Re} z = \lambda$, *la fonction*

$$t \in]0,\infty[\longmapsto t^{z-1}\, e^{-t}$$

est aussi intégrable sur $]0,+\infty[$, *et que l'on a la formule d'Euler*

$$\int_{]0,\infty[} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\, dt = \lim_{n\to+\infty} \Big[n^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\, du\Big].$$

Si z est un nombre complexe de partie réelle λ, on a

$$\forall\, t > 0\,,\ |t^{z-1}e^{-t}| = |e^{(z-1)\log t - t}| = t^{\lambda-1}\, e^{-t}\,,$$

d'où l'intégrabilité sur $]0,\infty[$ de la fonction continue (donc mesurable)

$$t\in]0,\infty[\longmapsto t^{z-1}e^{-t}$$

puisque son module est intégrable au vu de la condition sur λ. On sait que pour tout $u\in]-1,1[$,

$$\log(1-u) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k}\,, \tag{$\dagger$}$$

ce qui prouve que pour tout $t\in]0,\infty[$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}[t^{z-1}\chi_{]0,n]}(t)(1-t/n)^n] \\
= &\lim_{n\to+\infty}\Big(t^{z-1}\chi_{]0,n]}(t)\exp\Big[-n\log(1-t/n)\Big]\Big) \\
= &\lim_{n\to+\infty}\Big(t^{z-1}\chi_{]0,n]}(t)\exp\Big[-t-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k\,n^{k-1}}\Big]\Big) \\
= &\ t^{z-1}e^{-t}\,,
\end{aligned}$$

toutes les fonctions

$$t\in]0,\infty[\longmapsto t^{z-1}\chi_{]0,n]}(t)(1-t/n)^n\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,,$$

étant majorées en module par la fonction intégrable

$$t\in]0,\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}e^{-t}$$

du fait des signes négatifs dans le développement ($\dagger$). Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet donc d'affirmer

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{z-1}(1-t/n)^n\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_{]0,\infty[}\chi_{]0,n]}(t)t^{z-1}(1-t/n)^n\,dt \\
&= \int_{]0,\infty[}t^{z-1}e^{-t}\,dt\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité voulue. Pour obtenir la seconde, il suffit d'effectuer dans chaque intégrale

$$\int_0^n t^{z-1}(1-t/n)^n\,dt\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,,$$

le changement de variables $t=nu$ et d'appliquer la formule de changement de variables dans les primitives bien connue depuis le L1.

Pour tout nombre réel λ tel que l'intégrale $\int_{]0,\infty[} t^{\lambda-1}\, e^{-t}\, dt$ est convergente, on note dans la suite de ce problème

$$\Gamma(\lambda) := \int_{]0,+\infty[} t^{\lambda-1}\, e^{-t}\, dt\,.$$

1.c. *Énoncez la formule de changement de variables dans les intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Vérifiez que l'application $(u,v) \longmapsto (u/v, u+v)$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,\infty[^2$ dans lui-même dont vous calculerez l'inverse. Quel théorème du cours justifie l'égalité*

$$\forall\, \lambda \in]0,1[\,,\ \Gamma(\lambda)\times\Gamma(1-\lambda) = \iint_{]0,\infty[^2} (u/v)^\lambda e^{-(u+v)} \frac{dudv}{u}\ \ ?$$

En utilisant précisément la formule de changement de variables que vous venez de rappeler en préliminaire à cette question, démontrez que, pour tout $\lambda \in]0,1[$, l'intégrale

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t}$$

est convergente et que l'on a

$$\Gamma(\lambda)\times\Gamma(1-\lambda) = \int_{]0,+\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t}\,.$$

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi\ : U \longrightarrow V$ un C^1 difféomorphisme échangeant U et V, alors, pour qu'une fonction $(V,\mathcal{B})$-$(\mathbb{C},\mathcal{B})$-mesurable soit intégrable sur V relativement à la mesure de Lebesgue, il faut et il suffit que la fonction

$$x \in U \longmapsto f(\Phi(x))\,|\det(d_x\Phi)|$$

soit intégrable sur U et l'on a en prime l'égalité

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\Phi(x))\,|\det(d_x\Phi)|\, dx\,.$$

L'application $(u,v) \longmapsto (u/v, u+v)$ est bien de classe C^1 sur $]0,\infty[^2$. Elle est bijective de $]0,\infty[^2$ dans lui-même car on peut exhiber une application inverse en remarquant que si $(s,t) \in]0,\infty[^2$, il existe un et un seul couple $(u,v) \in]0,\infty[^2$ tel que $u/v = s$ et $u+v = t$, à savoir le couple

$$\Phi^{-1}(u,v) = \Big(\frac{st}{1+t}\,,\ \frac{s}{1+t}\Big)\,.$$

L'application Φ^{-1} étant clairement elle aussi de classe C^1 sur $]0,\infty[^2$, Φ est bien un C^1-difféomorphisme de cet ouvert dans lui-même.

C'est le théorème de Fubini-Tonnelli qui justifie l'égalité

$$\begin{aligned}
\forall\,\lambda\in]0,1[\,,\ \Gamma(\lambda)\times\Gamma(1-\lambda) &= \int_{]0,\infty[} t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt \times \int_{]0,\infty[} t^{(1-\lambda)-1}e^{-t}\,dt \\
&= \int_{]0,\infty[} u^{\lambda-1}e^{-u}\,du \times \int_{]0,\infty[} v^{-\lambda}e^{-v}\,dv \\
&= \int_{]0,\infty[^2} u^{\lambda-1}v^{-\lambda}e^{-u}e^{-v}\,dudv \\
&= \iint_{]0,\infty[^2} (u/v)^{\lambda}e^{-(u+v)}\,\frac{dudv}{u}
\end{aligned}$$

(cette égalité est vraie pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ mais les deux membres ne sont finis que si $\lambda\in]0,1[$ d'après le **1.a**). Si $(u,v)\in]0,\infty[^2$, on a (calcul immédiat du jacobien de Φ au point (u,v))

$$\det(d_{(u,v)}\Phi)=\frac{u+v}{v^2}\,.$$

On peut donc écrire, pour tout $\lambda\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,\infty[^2} (u/v)^{\lambda}e^{-(u+v)}\,\frac{dudv}{u} \\
= &\iint_{]0,\infty[^2} (u/v)^{\lambda}e^{-(u+v)}|\det(d_{(u,v)}\Phi)|\,\frac{vdudv}{u(1+u/v)}\,dudv \\
= &\iint_{]0,\infty[^2} \frac{(u/v)^{\lambda-1}}{1+u/v}e^{-(u+v)}|\det(d_{(u,v)}\Phi)|\,dudv \\
= &\iint_{]0,\infty[^2} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,e^{-s}\,dtds
\end{aligned}$$

en utilisant précisément la formule de changement de variables. Si l'on utilise une nouvelle fois le théorème de Fubini-Tonnelli, on voit que cette intégrale double est égale à

$$\int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt \times \int_0^{\infty} e^{-s}\,ds = \int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt\,.$$

Le fait que $\Gamma(\lambda)\times\Gamma(1-\lambda)$ soit fini d'après **1.a** (car $\lambda>0$ et $1-\lambda>0$ si $\lambda\in]0,1[$) implique donc (*via* le théorème de changement de variables rappelé plus haut) la convergence de l'intégrale

$$\int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt$$

(convergence que l'on pouvait d'ailleurs fort bien voir directement en utilisant le critère de Riemann, la condition $\lambda > 0$ étant indispensable pour l'intégrabilité en $t = 0$, la condition $\lambda < 1$ l'étant, elle, pour l'intégrabilité en $+\infty$).

1.d. *Énoncez précisément le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. En admettant l'égalité*

$$\forall\, \lambda \in]0,1[\,, \ \int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}\,,$$

exprimez en termes de fonctions classiques la fonction

$$\lambda \in]0,1[\longmapsto \int_{]0,+\infty[} (\log t) \times \Big(\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\Big)\, dt$$

(vous justifierez au préalable la définition de cette dernière intégrale ainsi que la validité des hypothèses du théorème du cours que vous avez rappelé en préambule à cette question).

Voici l'énoncé demandé. Supposons que I soit un intervalle de $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $\Omega \times I$ dans $\mathbb{C}$, telle que, pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $\lambda \longmapsto f(\omega, \lambda)$ soit dérivable sur I et que, pour chaque λ dans I, la fonction $\omega \longmapsto f(\omega, \lambda)$ soit intégrable sur Ω relativement à la mesure μ. Si, de plus, pour tout λ_0 dans I, il existe un voisinage $V(\lambda_0)$ de λ_0 dans I, une fonction $g_{\lambda_0} : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ intégrable relativement à la mesure μ avec

$$\forall \lambda \in V(\lambda_0)\,,\ \forall \omega \in \Omega\,,\ |f'_\lambda(\omega,\lambda)| \leq g_{\lambda_0}(\omega)\,,$$

alors l'intégrale dépendant du paramètre

$$\lambda \in I \longmapsto \int_\Omega f(\omega,\lambda)\, d\mu(\omega)$$

est dérivable sur I et de dérivée

$$\lambda \in I \longmapsto \int_\Omega f'_\lambda(\omega,\lambda)\, d\mu(\omega)\,.$$

Ici $\Omega =]0,\infty[$, $I =]0,1[$ et $f(t,\lambda) = t^{\lambda-1}/(1+t)$. On a donc

$$f'_\lambda(t,\lambda) = \log t \times \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,.$$

Si $\lambda \in]\alpha,\beta[$, avec $0 < \alpha < \beta < 1$, on a

$$\frac{|\log t| t^{\lambda-1}}{1+t} \leq \frac{|\log t|\ \max(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1})}{1+t}\,.$$

Le critère de Riemann, combiné avec le fait que $|\log t| = o(t^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$ au voisinage de $+\infty$ et que $|\log t| = o(t^{-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$ au voisinage de 0^+, montre que la fonction majorante

$$t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{|\log t|\ \max(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1})}{1+t}$$

est intégrable sur $]0,\infty[$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour affirmer que

$$\lambda \in]0,1[\longmapsto \int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\,dt}{1+t}$$

est dérivable sur $]0,1[$, de dérivée

$$\lambda \in]0,1[\longmapsto \int_{]0,\infty[} \log t\, \frac{t^{\lambda-1}\,dt}{1+t}\,.$$

En dérivant le second membre de l'identité admise (par rapport à λ), on trouve que cette dérivée est en fait la fonction

$$\lambda \in]0,1[\longmapsto \frac{-\pi^2\cos(\pi\lambda)}{(\sin(\pi\lambda))^2}\,,$$

d'où la formule (par identification des deux expressions de la dérivée) :

$$\forall\, \lambda \in]0,1[\,,\ \int_{]0,\infty[} \log t\, \frac{t^{\lambda-1}\,dt}{1+t} = -\frac{\pi^2\cos(\pi\lambda)}{(\sin(\pi\lambda))^2}\,.$$

Problème II (intégration « théorique »)

Dans les trois premières questions de ce problème, Ω désigne un ensemble abstrait, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$.

2.a. *Soient p et q deux nombres réels appartenant à $[1,+\infty[$. Soit $\dot{f}$ un élément de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$, $\dot{g}$ un élément de $L^q_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$. Qu'entend t-on par « représentant de $\dot{f}$ » et « représentant de $\dot{g}$ » ?*

Ce que l'on note $\dot{f}$ (*resp.* $\dot{g}$) est une classe d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ (*resp.* $\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$) des fonctions $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{R},\mathcal{B})$ mesurables, telles que $|f|^p$ (*resp.* $|f|^q$) soit intégrable relativement à la mesure μ, ce pour la relation d'équivalence

$$f\mathcal{R}\tilde{f} \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0\,.$$

Un « représentant » de $\dot{f}$ est par définition un élément de cette classe d'équivalence ; même chose pour la définition de ce qu'est un « représentant » de $\dot{g}$.

On note dans la suite $\| \ \|_r$ la norme de Minkowski sur $L^r_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, $r \in [1, \infty[$.

2.b. *On suppose (p et q étant choisis comme en* **2.a***) qu'il existe deux nombres entiers m et n strictement positifs tels que*

$$\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = 1\,.$$

Montrez que si f est un représentant de $\dot{f}$ et g un représentant de $\dot{g}$, alors $f^m g^n$ est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et que l'on a

$$\|f^m g^n\|_1 \leq \|\dot{f}\|_p^m \times \|\dot{g}\|_q^n\,. \tag{$*$}$$

Montrez ensuite (en citant précisément les résultats du cours auquel vous faites référence) que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, l'ensemble

$$A_{\epsilon,\eta}(f,g) := \Big\{\omega \in \Omega\,;\, |f(\omega)| \geq \epsilon \text{ et } |g(\omega)| \geq \eta\Big\}$$

est un élément de $\mathcal{T}$ et que l'on a

$$\mu\Big(A_{\epsilon,\eta}(f,g)\Big) \leq \frac{\|\dot{f}\|_p^m \times \|\dot{g}\|_q^n}{\epsilon^m \eta^n}\,.$$

L'négalité de Hölder avec les exposants $P = p/m$, $P' = q/n$ (qui sont conjugués car $1/P + 1/P' = 1$), donne

$$\int_\Omega |f|^m |g|^n \, d\mu \leq \Big(\int_\Omega (|f|^m)^{p/m} \, d\mu\Big)^{m/p} \times \Big(\int_\Omega (|f|^n)^{p/n} \, d\mu\Big)^{n/p} = \|\dot{f}\|_p^m \times \|\dot{g}\|_q^n\,.$$

Il en résulte donc l'intégrabilité sur Ω (relativement à la mesure μ) de la fonction $f^m g^n$ avec l'inégalité (*) demandée. Si $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ sont fixés, l'ensemble $A_{\epsilon,\eta}(f,g)$ est l'intersection des images réciproques (respectivement par f et g) des deux boréliens $\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]$ et $\mathbb{R} \setminus [-\eta, \eta]$; comme f^m et g^n sont $(\Omega, \mathcal{T})$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurables, ces images réciproques sont des éléments de $\mathcal{T}$ et leur intersection aussi puisque $\mathcal{T}$ est une tribu. La monotonie de la prise d'intégrale nous dit que

$$\epsilon^n \eta^m \int_{A_{\epsilon,\eta}(f,g)} d\mu \leq \int_{A_{\epsilon,\eta}(f,g)} |f|^m \, |g|^n \, d\mu \leq \|f^n g^m\|_1 \leq \|\dot{f}\|_p^m \|\dot{g}\|_q^n\,,$$

d'où l'inégalité

$$\mu\Big(A_{\epsilon,\eta}(f,g)\Big) \leq \frac{\|\dot{f}\|_p^m \times \|\dot{g}\|_q^n}{\epsilon^m \eta^n}\,.$$

2.c. *Enoncez le théorème de Riesz-Fisher. On suppose que $(\dot{f}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et que $(\dot{g}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $L^q_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ telles que*

$$\|\dot{f}_k\|_p^m \times \|\dot{g}_k\|_q^n \leq \frac{1}{k(k+1)}\,,\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*$$

et l'on choisit des représentants f_k (resp. g_k) pour les classes $\dot{f}_k$ (resp. $\dot{g}_k$). En utilisant l'inégalité (*) avec $\dot{f}_k$, $\dot{g}_k$, f_k, g_k à la place de $\dot{f}$, $\dot{g}$, f, g, montrez que pour μ-presque tout ω, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^m(\omega) g_k^n(\omega)$$

est convergente dans $\mathbb{R}$ et que sa somme se prolonge sur Ω en un élément G de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ de norme $\|G\|_1$ au plus égale à 1.

Le théorème de Riesz-Fisher permet d'affirmer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ est complet pour la norme $\|\ \|_p$ de Minkowski ($p\in[1,\infty]$). Un avatar de la preuve est le fait que de toute suite de Cauchy dans cet espace, on puisse extraire de la suite de leurs représentants une sous-suite convergeant μ-presque partout sur Ω. On a ici

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f^n g^m\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,,$$

ce qui prouve (en utilisant soit le théorème de Beppo Levi, soit le théorème de Fubini-Tonnelli, l'une des mesures en jeu étant la mesure de décompte sur $\mathbb{N}^*$) que

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f|^m |g^n|\Big)\, d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < +\infty\,.$$

Il en résulte (cela suit de l'inégalité de Markov) que la fonction

$$\omega \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} |f^m(\omega)|\,|f^n(\omega)|$$

est finie μ-presque partout et donc que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^m(\omega) g^n(\omega)$$

est absolument convergente (donc convergente car $\mathbb{R}$ est complet) pour μ-presque tout ω. On peut prolonger sa somme par 0 là où elle n'est pas convergente et la fonction G définie ainsi est la limite simple d'une suite de fonctions $(\Omega, \mathcal{T})$-mesurables, donc une fonction $(\Omega, \mathcal{T})$-mesurable. On a

$$\|G\|_1 \leq \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f|^m |g^n| \Big)\, d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

Or

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,,\ \ k \in \mathbb{N}^*\,,$$

ce qui prouve que la somme de la série majorante de terme général $1/k(k+1)$ vaut 1 (c'est la somme d'une série télescopique). On a donc $\|G\|_1 \leq 1$.

On spécifie à partir de maintenant $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = dt$ étant la mesure de Lebesgue. Les classes $\dot{f}$ et $\dot{g}$ sont donc maintenant des éléments respectivement de $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dt)$ et $L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dt)$ dont on prend des représentants f et g. On conserve les entiers m et n introduits dans la question **2.b**.

2.d. *Vérifiez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto [f(x-t)]^m \times (g(t))^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrez (en utilisant un lemme du cours que vous citerez avec soin ainsi qu'en vous inspirant de l'inégalité (*) établie en* **2.b***) que la fonction*

$$F\ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} [f(x-t)]^m\, g^n(t)\, dt$$

est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de Hölder (toujours appliquée avec $P = p/m$ et $P' = q/n$), on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^m\, |g(t)|^n\, dt \\ \leq\ & \Big(\int_{\mathbb{R}} (|f(x-t)|^m)^{p/m}\, dt \Big)^{m/p} \Big(\int_{\mathbb{R}} (|g(t)|^n)^{q/n}\, dt \Big)^{n/q} \\ =\ & \|f\|_p^m \|g\|_q^n \end{aligned}$$

puisque la mesure de Lebesgue dt est invariante par translation et par symétrie relativement à l'origine. La fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto [f(x-t)]^m \times (g(t))^n$$

est donc bien intégrable pour tout x. De plus, si x_1 et x_2 sont deux nombres réels, on a

$$|F(x_1) - F(x_2)| \ = \ \Big| \int_{\mathbb{R}} \Big[(f(x_1 - t))^m - (f(x_2 - t))^m \Big]\, g^n(t)\, dt \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| (f(x_1 - t))^m - (f(x_2 - t))^m \Big|^{p/m} dt \Big)^{m/p} \|g\|_q^n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big| (f(u))^m - (f(u - (x_1 - x_2)))^m \Big|^{p/m} dt \Big)^{m/p} \|g\|_q^n
\end{aligned}
$$

(en utilisant pour la dernière ligne l'invariance par translation et par symétrie par rapport à l'origine de la mesure de Lebesgue). Mais on sait que f^m est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{p/m}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dt)$ et que l'application

$$
x \longmapsto \|f^m - f^m(\cdot - x)\|_{p/m}
$$

est continue en $x = 0$ (continuité de la translation dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{p/m}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dt)$). Il existe donc, pour tout $\epsilon > 0$, un nombre $\eta > 0$ tel que

$$
\begin{aligned}
|x_1 - x_2| < \eta \implies & \int_{\mathbb{R}} \Big| (f(u))^m - (f(u - (x_1 - x_2)))^m \Big|^{p/m} dt \Big)^{m/p} \|g\|_q^n \\
& \leq (\|f^m - f^m(\cdot - x)\|_{p/m})^{m/p} \times \|g\|_q^n < \epsilon \,.
\end{aligned}
$$

Ceci prouve l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction F (qui est bornée en valeur absolue par $\|f\|_p^m \|g\|_q^n$).

2.e. *On suppose maintenant que f et g sont dt-presque partout nulles sur $]-\infty, 0[$. Montrez qu'il en est de même pour la fonction F. Montrez ensuite que, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, les trois intégrales*

$$
\int_{\mathbb{R}} F(x)\, e^{-\lambda x}\, dx \,, \quad \int_{\mathbb{R}} f^m(t)\, e^{-\lambda t}\, dt \,, \quad \int_{\mathbb{R}} g^n(t)\, e^{-\lambda t}\, dt
$$

sont convergentes et que l'on

$$
\int_{\mathbb{R}} F(x)\, e^{-\lambda x}\, dx = \Big(\int_{\mathbb{R}} f^m(t) e^{-\lambda t}\, dt \Big) \times \Big(\int_{\mathbb{R}} g^n(t) e^{-\lambda t}\, dt \Big) \,.
$$

Comme g est dt-presque partout nulle sur $]-\infty, 0[$, on peut écrire

$$
F(x) = \int_{[0,\infty[} f^m(x - t) g^n(t)\, dt \,.
$$

Si $x < 0$, alors $f^m(x - t)$ est dt-presque partout nulle sur $[0, +\infty[$, ce qui implique $F(x) = 0$. La fonction F est donc identiquement nulle sur $]-\infty, 0[$. Comme F est bornée et que

$$
\varphi_\lambda \ : x \longmapsto \chi_{[0,\infty[}(x) e^{-\lambda x}
$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)e^{-\lambda x}\,dx = \int_{[0,\infty[} F(x)e^{-\lambda x}\,dx$$

est convergente lorsque $\lambda > 0$. Comme f^m est dans $L^{p/m}$ et que φ_λ (toujours pour $\lambda > 0$) est dans $L^{q/n}$ avec $m/p+n/q = 1$, la fonction $f^m\varphi_\lambda$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité de Hölder, ce qui implique la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}} f^m(t)e^{-\lambda t}\,dt = \int_{[0,\infty[} f^m(t)e^{-\lambda t}\,dt\,.$$

Comme enfin g^n est dans $L^{q/n}$ et que φ_λ (toujours pour $\lambda > 0$) est dans $L^{p/n}$ avec $m/p+n/q = 1$, la fonction $g^n\varphi_\lambda$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité de Hölder, ce qui implique la convergence de

$$\int_{\mathbb{R}} g^n(t)e^{-\lambda t}\,dt = \int_{[0,\infty[} g^n(t)e^{-\lambda t}\,dt\,.$$

On remarque d'autre part que, grâce à Fubini-Tonnelli et au fait que f et g sont nulles dt-presque partout sur $]-\infty,0[$, on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{[0,\infty[\times[0,\infty[} |f^m(x-t)|\,|g^n(t)|\,e^{-\lambda x}\,dtdx \\
= \ & \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[0,\infty[} |f^m(x-t)|e^{-\lambda(x-t)}\,dx\Big)\,|g^n(t)|\,e^{-\lambda t}\,dt \\
= \ & \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[t,\infty[} |f^m(x-t)|e^{-\lambda(x-t)}\,dx\Big)\,|g^n(t)|\,e^{-\lambda t}\,dt \\
= \ & \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[0,\infty[} |f^m(u)|e^{-\lambda u}\,du\Big)\,|g^n(t)|\,e^{-\lambda t}\,dt \\
= \ & \int_{\mathbb{R}} |f^m(u)|e^{-\lambda u}\,du \times \int_{\mathbb{R}} |g^n(t)|e^{-\lambda t}\,dt < +\infty\,.
\end{aligned}$$

La clause de sécurité du théorème de Fubini étant remplie, on peut donc affirmer que l'on a aussi (sans les valeurs absolues cette fois), pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} F(x)e^{-\lambda x}\,dx = \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[0,\infty[} f^m(x-t)\,g^n(t)\,dt\Big)\,e^{-\lambda x}\,dtdx \\
= \ & \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[0,\infty[} f^m(x-t)e^{-\lambda(x-t)}\,dx\Big)\,g^n(t)\,e^{-\lambda t}\,dt \\
= \ & \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[t,\infty[} f^m(x-t)e^{-\lambda(x-t)}\,dx\Big)\,g^n(t)\,e^{-\lambda t}\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{[0,\infty[} \Big(\int_{[0,\infty[} f^m(u) e^{-\lambda u}\, du \Big)\, g^n(t)\, e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^m(u) e^{-\lambda u}\, du \times \int_{\mathbb{R}} g^n(t) e^{-\lambda t}\, dt\,, \end{aligned}$$

ce qui est exactement la formule demandée.