Semestre 5, Année 2007-2008 SESSION 2

UE : MHT512

Date : 4 Mars 2008, 14 h-17 h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Problème I (intégration « pratique »)

On pose, pour $(x,y) \in]0,\infty[^2$,

$$f(x,y) := \int_{]0,\infty[} \frac{t^x}{\exp(t^y)-1}\,dt \in [0,\infty]\,.$$

I.1. *Déterminer le sous-ensemble U de $]0,\infty[^2$ constitué des points (x,y) de $]0,\infty[^2$ tels que $f(x,y) < +\infty$ et vérifier que U est un ouvert de $]0,\infty[^2$ (pour décider de l'intégrabilité en $t=0$, on pensera à utiliser le développement limité à l'ordre 1 de $\exp u = 1 + u + o(u)$ pour la fonction exponentielle au voisinage de $u=0$).*

Un équivalent au voisinage de $t=+\infty$ de la fonction positive figurant sous l'intégrale étant

$$t \longmapsto t^x \exp(-t^y)$$

et y étant strictement positif, la présence du facteur exponentiel (devenant strictement inférieur à t^{-x-2} pour t assez grand puisque l'exponentielle impose sa limite à toutes les fonctions puissance) implique la convergence de l'intégrale en $+\infty$ indépendamment de la valeur de x. L'autre problème se posant ici est le problème en $t=0$. On constate qu'un équivalent de la fonction à intégrer lorsque t tend cette fois vers 0^+ est

$$t \longmapsto t^{x-y}$$

puisque $e^{t^y} = 1 + t^y + o(t^y)$ au voisinage de $t=0$ (en effet $y>0$). Le critère de comparaison (pour les intégrales impropres de fonctions positives), combiné avec le critère de Riemann, assure donc

$$U = \{(x,y) \in]0,\infty[^2\,;\, x-y > -1\}\,.$$

Ce sous-ensemble de $]0,\infty[^2$ est bien sûr un sous-ensemble ouvert de $]0,\infty[^2$ puisque l'inégalité intervenant dans la contrainte $x-y>-1$ est stricte.

I.2. *Énoncez précisément le théorème que vous devez invoquer pour montrer que la fonction f est de classe C^1 dans U. Exprimez sous forme d'intégrales fonction des paramètres x et y les deux dérivées partielles f'_x et f'_y de f dans U par rapport respectivement aux variables x et y (on veillera à expliquer soigneusement pourquoi les hypothèses du théorème cité sont remplies).*

Le théorème à utiliser ici est le théorème de dérivation des intégrales fonction de plusieurs paramètres réels (théorème 3.3 du cours). Les fonctions

$$t \longmapsto \frac{t^x}{\exp(t^y)-1}\,,\ (x,y)\in U$$

sont en effet toutes intégrables sur $]0,\infty[$ et les fonctions

$$\varphi_t\ : (x,y)\in U \longmapsto \frac{t^x}{\exp(t^y)-1}$$

sont bien, pour tout $t\in]0,\infty[$, de classe C^1 dans U avec comme dérivées partielles respectivement par rapport à x et y les fonctions

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\log t\times t^x}{\exp(t^y)-1} \\ (x,y) & \longmapsto & -\dfrac{\log t\times t^{x+y}\exp(t^y)}{(\exp(t^y)-1)^2}\,. \end{array}$$

Si $(x_0,y_0)\in U$, on pose

$$\overline{V}_{x_0,y_0} := [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]\times[y_0-\epsilon,y_0+\epsilon]\subset U$$

avec $x_0-y_0-4\epsilon>-1$ et $y_0-\epsilon>0$. Il est possible de construire une fonction positive g_{x_0,y_0} intégrable sur $]0,\infty[$ et telle que, pour tout (x,y) dans $\overline{V}_{x_0,y_0}$, pour tout $t\in]0,\infty[$, on ait

$$|(\varphi_t)'_x|+|(\varphi_t)'_y| = |\log t|\left(\frac{t^x}{\exp(t^y)-1}+\frac{t^{x+y}e^{t^y}}{(\exp(t^y)-1)^2}\right)\leq g_{x_0,y_0}(t)\,; \qquad (1)$$

il suffit en effet de poser (en se souvenant que $\log t\leq 0$ si $t\in]0,1]$ tandis que $\log t\geq 0$ si $t\geq 1$)

$$g_{(x_0,y_0)}(t) := |\log t|\left(\frac{t^{x_0-\epsilon}}{\exp(t^{y_0+\epsilon})-1}+\frac{t^{x_0+y_0-2\epsilon}e^{t^{y_0-\epsilon}}}{(\exp(t^{y_0+\epsilon})-1)^2}\right)$$

si $t\in]0,1]$ et

$$g_{(x_0,y_0)}(t) := |\log t|\left(\frac{t^{x_0+\epsilon}}{\exp(t^{y_0-\epsilon})-1}+\frac{t^{x_0+y_0+2\epsilon}e^{t^{y_0+\epsilon}}}{(\exp(t^{y_0-\epsilon})-1)^2}\right)$$

si $t>1$. Cette fonction est intégrable en $t=0$ car $x_0-y_0-4\epsilon>-1$ et que $|\log t|\times t^\alpha$ est intégrable en $t=0$ dès que $\alpha>-1$ et intégrable en $+\infty$ du fait de la présence de $\exp(t^{y_0-\epsilon})$ au dénominateur (qui « écrase » tout et impose donc sa limite au numérateur et par conséquent l'intégrabilité de l'expression). La clause d'application (1) du théorème à citer étant remplie, il en résulte que f est bien de classe C^1 dans U et que ses deux dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \int_{]0,\infty[} \frac{\log t \times t^x}{\exp(t^y)-1}\, dt \\ f'_y(x,y) &= -\int_{]0,\infty[} \frac{\log t \times t^{x+y} e^{t^y}}{(\exp(t^y)-1)^2}\, dt\,. \end{aligned}$$

I.3. *Énoncer précisément le théorème assurant la continuité des intégrales fonction d'un paramètre. Montrer ensuite que la fonction*

$$F \ : (x,y,\omega) \in U \times \mathbb{R} \longmapsto \int_{]0,\infty[} \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}\, dt$$

est une fonction continue de $U \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$.

C'est le théorème 3.1 du cours qu'il convient de citer et invoquer ici. Pour tout (x,y,ω) dans $U\times\mathbb{R}$, la fonction

$$t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après le critère d'intégrabilité par domination (proposition 2.9 du cours) puisque $|e^{-i\omega t}| \equiv 1$. D'autre part, les fonctions

$$(x,y,\omega) \in U \times \mathbb{R} \longmapsto \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}$$

sont toutes continues sur $U \times \mathbb{R}$ quelque soit $t \in]0,\infty[$. Prenons (x_0,y_0) dans U et $\epsilon > 0$ tel que $y_0 - \epsilon > 0$ et $x_0 - y_0 - 2\epsilon > -1$. Il est possible de construire une fonction positive $\tilde{g}_{x_0,y_0}$ intégrable sur $]0,\infty[$ et telle que, pour tout (x,y,ω) dans $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \times [y_0-\epsilon, y_0+\epsilon] \times \mathbb{R} \subset U \times \mathbb{R}$, pour tout $t \in]0,\infty[$, on ait

$$\Big|\frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}\Big| \leq \tilde{g}_{x_0,y_0}(t)\,; \tag{2}$$

il suffit en effet de poser (en se souvenant que $\log t \leq 0$ si $t \in]0,1]$ tandis que $\log t \geq 0$ si $t \geq 1$)

$$\tilde{g}_{(x_0,y_0)}(t) := \frac{t^{x_0-\epsilon}}{\exp(t^{y_0+\epsilon})-1}$$

si $t \in]0,1]$ et

$$\tilde{g}_{(x_0,y_0)}(t) := \frac{t^{x_0+\epsilon}}{\exp(t^{y_0-\epsilon}) - 1}$$

si $t > 1$. Cette fonction est intégrable en $t = 0$ car $x_0 - y_0 - 2\epsilon > -1$ et intégrable en $+\infty$ du fait de la présence au dénominateur de $\exp(t^{y_0-\epsilon})$ (qui « écrase » tout et impose sa limite au numérateur, donc aussi l'intégrabilité de l'expression en $t = +\infty$). La clause d'application (2) du théorème 3.1 étant remplie, il en résulte que F est bien continue dans $U \times \mathbb{R}$.

I.4. *Énoncer précisément le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Expliquez de manière rigoureuse comment ce théorème s'applique pour fournir le résultat suivant :*

$$\forall\,(x,y,\omega) \in U \times \mathbb{R}\,,\ F(x,y,\omega) = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \int_{]0,\infty[} t^x e^{-(k+1)t^y}\, e^{-i\omega t}\, dt \Big)\,.$$

Si $(h_N)_{N\geq 0}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ convergeant μ-presque partout vers h et telle qu'il existe une fonction $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$-mesurable g intégrable relativement à μ telle que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ |h_N| \leq g \text{ sur } \Omega$$

(clause de domination), alors h se prolonge en une fonction mesurable, intégrable sur Ω par rapport à la mesure μ, avec

$$\int_\Omega h\, d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_\Omega h_N\, d\mu\,.$$

Ici $\Omega =]0,+\infty[$, $\mu = dt$ et

$$h_N(t) := \sum_{k=0}^{N} t^x e^{-(k+1)t^y}\, e^{-i\omega t} = t^x e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{N} e^{-(k+1)t^y}\,.$$

Lorsque N tend vers l'infini, on a, pour tout $t \in]0,\infty[$, de par le calcul de la somme d'une série géométrique de raison $|a| < 1$,

$$\lim_{N\to+\infty} h_N(t) = t^x e^{-i\omega t} \frac{\exp(-t^y)}{1 - \exp(-t^y)} = \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y) - 1}\,.$$

D'autre part, on a aussi, toujours pour tout $t \in]0,\infty[$,

$$|h_N(t)| \leq \sum_{k=0}^{N} t^x e^{-(k+1)t^y} \leq t^x \times \frac{\exp(-t^y)}{1 - \exp(-t^y)} = \frac{t^x}{\exp(t^y) - 1}\,,$$

la fonction majorante étant intégrable sur $]0,\infty[$ relativement à la mesure de Lebesgue. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique et l'on a donc bien

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{]0,\infty[} h_N(t)\,dt = \int_{]0,\infty[} \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}\,dt = F(x,y,\omega)\,.$$

I.5. *Énoncer la formule de changement de variables entre intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Vérifier ensuite que, pour tout (x,y) dans U, on a*

$$f(x,y) = F(x,y,0) = \frac{1}{y}\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\times\zeta\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\,,$$

où Γ est la fonction d'Euler définie sur $]0,\infty[$ par

$$\Gamma(\tau) := \int_{]0,\infty[} u^{\tau-1}e^{-u}\,du$$

et ζ la fonction de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(\tau) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\tau}\,.$$

Si U et V sont deux ouverts difféomorphes de $\mathbb{R}^n$ ($\Phi\ : U\longmapsto V$ étant le difféomorphime) et si f est une fonction mesurable de V dans $\mathbb{C}$ (pour la tribu borélienne à la source et au but), dire que f est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue dans V équivaut à dire que $f\circ\Phi$ est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue dans U et on a

$$\int_U (f\circ\Phi)(y)\,\|\det[d\Phi(y)]\|\,dx = \int_V f(x)\,dx.$$

Ici, on prend $U=V=]0,\infty[$ et, pour $k\in\mathbb{N}$, $\Phi_k(u) = (u/(k+1))^{1/y}$ pour affirmer (puisque $(x+1)/y>0$) que

$$\begin{aligned}
\int_{]0,\infty[} t^x\exp(-(k+1)t^y)\,dt &= \int_{]0,\infty[} t^{x+1}\exp(-(k+1)t^y)\,\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{y}\times\frac{1}{(k+1)^{\frac{x+1}{y}}}\times\int_{]0,\infty[} u^{\frac{x+1}{y}-1}\,e^{-u}\,du\\
&= \frac{1}{y}\times\Gamma\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\times\frac{1}{(k+1)^{\frac{x+1}{y}}}\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Mais comme on a aussi $(x+1)/y > 1$ car $x - y > -1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(k+1)^{\frac{x+1}{y}}}\Big) = \zeta\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\,,$$

d'où la formule voulue en ajoutant les formules (3) pour les diverses valeurs de $k \in \mathbb{N}$.

I.6. *On suppose maintenant que $x > y - 1 > 0$. Vérifier que tous les couples $(x+k, y) \in U$ (pour $k \in \mathbb{N}$) sont dans U et montrer (en expliquant une fois encore quel théorème vous utilisez et pourquoi son utilisation est licite) que, pour tout $\omega \in R$,*

$$\begin{aligned} F(x,y,\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}f(x+k,y)\,\omega^k \\ &= \frac{1}{y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\Gamma\Big(\frac{x+k+1}{y}\Big)\,\zeta\Big(\frac{x+k+1}{y}\Big)\,\omega^k\,. \end{aligned}$$

Si $x - y > -1$, on a $x + k - y > -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $(x+k, y) \in U$. On introduit la suite de fonctions $(\tilde{h}_N)_{N\in\mathbb{N}}$, où

$$\tilde{h}_N \ : t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{t^x}{\exp(t^y)-1} \times \sum_{k=0}^{N}\frac{(-i)^k t^k \omega^k}{k!}\,;$$

cette suite converge simplement vers

$$t \in]0,\infty[\longmapsto \tilde{h}(t) = \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}$$

du fait que

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

pour tout nombre complexe z. De plus, on a

$$|\tilde{h}_N(t)| \leq \frac{t^x}{\exp(t)-1} \times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\omega|^k t^k}{k!} = \frac{t^x e^{|\omega| t}}{\exp(t^y)-1}\,.$$

La fonction majorante est ici intégrable sur $]0,\infty[$ car $y-1>0$, ce qui assure l'intégrabilité en $t = +\infty$ vu que l'exponentielle figurant au dénominateur « avale » celle qui est au numérateur ainsi que $t \longmapsto t^x$ pour tout x ; l'intégrabilité en $t = 0$ persiste quelque soit ω car $x - y > -1$ grâce à la règle des équivalents. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique donc ici encore et assure

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{]0,\infty[} \tilde{h}_N(t)\, dt = F(x,y,\omega)\,.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\begin{aligned}\int_{]0,\infty[} \tilde{h}_N(t)\, dt &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k}{k!} f(x+k,y)\,\omega^k \\ &= \frac{1}{y}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k}{k!}\Gamma\Big(\frac{x+k+1}{y}\Big)\,\zeta\Big(\frac{x+k+1}{y}\Big)\,\omega^k\end{aligned}$$

en utilisant le résultat établi à la question précédente.

Problème II (intégration « théorique »)

II.1. *Soit Ω un ensemble abstrait, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu\; : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Que signifie le fait que μ soit σ-finie ? Qu'entend-t'on par tribu produit $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ sur $\Omega\times\Omega$? Comment est définie (lorsque μ est supposée σ-finie) la mesure produit $\mu\otimes\mu$? Énoncez dans ce contexte le théorème de Fubini.*

Dire que la mesure μ est σ-finie, c'est dire que Ω s'écrit sous la forme

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\,,$$

où chaque A_k vérifie $\mu(A_k) < \infty$. La tribu produit sur $\Omega\times\Omega$ est la tribu engendrée par les « rectangles » $A\times B$, où $A\in\mathcal{T}_1$ et $B\in\mathcal{T}_2$. La mesure produit $\mu\otimes\mu$ sur $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ (que l'on ne peut définir qu'à condition que μ soit σ-finie) est définie comme l'unique mesure ν sur $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ qui vérifie

$$\nu(A\times B) = \mu(A)\times\mu(B)$$

(toujours avec la convention $0\times\infty=\infty$), ce pour tout « rectangle » $A\times B$, avec $A\in\mathcal{T}_1$ et $B\in\mathcal{T}_2$. Le théorème de Fubini (théorème 3.8 du cours) stipule (sous ces hypothèses sur μ) que si F est une fonction de $\Omega\times\Omega$ dans $\mathbb{C}$ mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ à la source et la tribu borélienne au but, intégrable par rapport à la mesure produit $\mu\otimes\mu$ (ceci est essentiel), alors, pour μ-presque tout x dans Ω, la fonction

$$F_x\; : y\in\Omega \longmapsto F(x,y)$$

est intégrable sur Ω relativement à la mesure μ, et la fonction (définie pour μ-presque tout $x \in \Omega$)

$$x \longmapsto \int_\Omega F(x,y)\, d\mu(y)$$

se prolonge en une fonction mesurable (relativement aux tribus $\mathcal{T}$ à la source et $\mathcal{B}$ au but), intégrable elle aussi relativement à la mesure μ, avec en prime la formule

$$\int_\Omega \Big[\int_\Omega F(x,y)\, d\mu(y)\Big]\, d\mu(x) = \int_{\Omega\times\Omega} F(x,y)\, d[\mu\otimes\mu](x,y)$$

(les rôles de x et y pouvant être échangés).

II.2. *On suppose à partir de maintenant la mesure μ-σ finie et on considère un élément $\dot{K}$ de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega\times\Omega, \mathcal{T}\otimes\mathcal{T}, \mu\otimes\mu)$, avec $p \in]1,\infty[$, (p' désignant l'exposant conjugué) ayant pour représentant la fonction*

$$K\ : (x,y) \longmapsto K(x,y)\,.$$

Préciser ce que l'on entend par « K est un représentant de $\dot{K}$ ». En utilisant l'inégalité de Hölder (que l'on rappellera), montrer que si $\dot{f}$ est un élément de $L^{p'}_{\mathbb{C}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ de représentant f, alors, pour μ-presque tout x, l'intégrale

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)$$

est convergente et que la fonction définie μ-presque partout sur Ω par

$$K[\dot{f}](x) := \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

représente un élément $\dot{K}[f]$ de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$, avec

$$\|\dot{K}[\dot{f}]\|_p \le \|\dot{K}\|_p \times \|\dot{f}\|_{p'}\,. \qquad (\dagger)$$

Dire que K est un représentant de $\dot{K}$, c'est dire que K est un élément de $\mathcal{L}^p(\Omega\times\Omega,\mathcal{T}\otimes\mathcal{T},\mu\otimes\mu)$ appartenant à la classe d'équivalence que définit $\dot{K}$ pour la relation d'équivalence

$$f\,\mathcal{R}\,g \Longleftrightarrow f-g\equiv 0 \quad \mu-\text{presque partout.}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a, pour $x\in\Omega$,

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \le \Big(\int_\Omega |K(x,y)|^p\, d\mu(x)\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega |f(y)|^{p'}\, d\mu(y)\Big)^{1/p'}.$$

On a donc

$$\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \Big]^p d\mu(x) \\ \leq \|\dot f\|_{p'}^p \times \int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|^p\,d\mu(y) \Big]\,d\mu(x)\,. \qquad (4)$$

Grâce au théorème de Fubini (en fait ici Fubini-Tonnelli car les fonctions en jeu sont positives), on a donc

$$\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \Big]^p d\mu(x) = \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^p\,d[\mu\otimes\mu](x,y) = \|\dot K\|_p^p\,.$$

La majoration (4) implique bien (puisque le module d'une intégrale est majoré par l'intégrale du module de la fonction intégrée) que

$$\int_\Omega \Big| \int_\Omega K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y) \Big|^p d\mu(x) \leq \|\dot f\|_{p'}^p \times \|\dot K\|_p^p\,.$$

On en déduit le résultat demandé en prenant les racines p-ièmes.

II.3. *Le résultat établi à la question précédente reste-t-il encore vrai si* $p = 1$ *? si* $p = +\infty$ *?*

Si $p = 1$, on a $p' = +\infty$. Si

$$\int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|\,d[\mu\otimes\mu](x,y) < +\infty\,,$$

alors, l'intégrale

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,d\mu(y)$$

est finie pour μ-presque tout x (de par le théorème de Fubini). De plus, si $\dot f \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, on a donc, pour μ-presque tout x

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \leq \|\dot f\|_\infty \times \int_\Omega |K(x,y)|\,d\mu(y)\,.$$

En intégrant par rapport à x et en utilisant le théorème de Fubini-Tonnelli, on voit donc encore que dans ce cas

$$\int_\Omega \Big| \int_\Omega K(x,y)\,d\mu(y) \Big|\,d\mu(x) \leq \|\dot f\|_\infty \times \|\dot K\|_1$$

et l'inégalité (†) est bien encore remplie.

Supposons maintenant $p = +\infty$ (donc $p' = 1$). Si

$$\dot{K} \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)\,,$$

on peut choisir un représentant de $\dot{K}$ borné partout par $\|\dot{K}\|_\infty$. Si $\dot{f}$ est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, on a donc, pour tout x dans Ω et avec le choix de ce représentant particulier K,

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\Big| &\leq \int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq \sup_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \times \|\dot{f}\|_1 = \|\dot{K}\|_\infty \times \|\dot{f}\|_1\,. \end{aligned}$$

La fonction

$$x \longmapsto \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

est bien dans $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et définit donc une classe $\dot{K}[\dot{f}]$ telle que

$$\|\dot{K}[\dot{f}]\|_\infty \leq \|\dot{K}\|_\infty \times \|\dot{f}\|_1\,;$$

l'inégalité (†) est donc bien encore valide dans ce cas.

II.4. *Énoncer le théorème de Riesz-Fisher.*

Le théorème de Riesz-Fisher permet d'affirmer que, pour $p \in [1, \infty]$, l'espace de Minkowski $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) équipé de sa norme de Minkowski $\|\ \|_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire un $\mathbb{K}$-espace de Banach).

II.5. *On suppose toujours $p \in]1, \infty[$ et la mesure μ-σ finie ; on considère une suite $(\dot{f}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $L^{p'}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et une suite $(\dot{K}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$ telles que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ \|\dot{K}_n\|_p \times \|\dot{f}_n\|_{p'} \leq \frac{C}{n^2}\,, \tag{††}$$

où C est une constante positive. On pose, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$F_N(x) := \sum_{n=1}^N \int_\Omega K_n(x,y)\, f_n(y)\, dy$$

(comme cela est possible du résultat établi à la question **II.2***) et l'on prolonge ensuite F_N par 0 sur l'ensemble (de mesure nulle) où la fonction reste à définir. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(F_N)_{N\geq 1}$ une sous-suite convergeant simplement μ-presque partout sur Ω vers une fonction mesurable $F \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.*

La série des classes de fonctions de terme général $\dot{K}_n[\dot{f}_n]$ est une série absolument convergente dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ en vertu du résultat établi à la question **II.2** (inégalité (†)) et de l'hypothèse (††) puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\dot{K}_n[\dot{f}_n]\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\dot{K}_n\|_p \, \|\dot{f}_n\|_{p'} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \,.$$

D'après le théorème de Riesz-Fisher, cette série est convergente (dans un $\mathbb{C}$-espace complet, toute série absolument convergente est convergente) vers un élément $\dot{F}$. Les F_N sont des représentants des sommes partielles de cette série de classes et l'on peut donc assurer (d'après la propriété rappelée à la question **II.4**) la possibilité d'extraire de la suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergeant μ-presque partout vers un représentant de $\dot{F}$.

II.6. *Énoncer l'inégalité de Markov. On poursuit avec les hypothèses et les notations de la question précédente. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\mu\Big(\Big\{|F_N - F| \geq \epsilon\Big\}\Big) \leq \Big(\frac{C}{N\epsilon}\Big)^p .$$

L'inégalité de Markov (proposition 2.3 des notes du cours) s'énonce ainsi : soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une application $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0, \infty], \mathcal{B})$-mesurable, intégrable relativement à la mesure μ ; pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mu\Big(\Big\{f \geq \epsilon\Big\}\Big) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega f \, d\mu \,.$$

Ici, on applique le résultat à

$$f := |F_N - F|^p \,.$$

On a, d'après l'inégalité de Minkowski et les inégalités (†) et (††),

$$\|F_N - F\|_p = \|\dot{F}_N - \dot{F}\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\dot{K}_n[\dot{f}_n]\|_p \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq C \int_N^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{C}{N} \,.$$

On a donc

$$\int_\Omega |F_N - F|^p \, d\mu \leq \Big(\frac{C}{N}\Big)^p .$$

Or, d'après l'inégalité de Markov,

$$\epsilon^p \mu\Big(\Big\{|F_N - F| \geq \epsilon\}\Big) \leq \Big(\frac{C}{N}\Big)^p ,$$

d'où l'inégalité demandée en divisant par ϵ^p.