Semestre 4, Année 2008-2009 SESSION 2

UE : MAP304

Date : 09 Juin 2009, 11h-12h30 Durée : 1h30

Calculatrices autorisées

Exercice 1. Soit a un paramètre strictement entre 0 et 1.

a. Montrer que l'équation

$$x^3 + ax^2 + 1 = 0$$

admet une unique racine ξ_a entre -2 et -1.

b. Montrer que la méthode de Newton, initiée avec $x_0 = -1$, fournit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers ξ_a. Ecrire (en fonction de a) la relation entre x_n et x_{n+1}.

c. Calculer les trois premières décimales de ξ_a lorsque $a = 1$.

d. Montrer que la méthode de la sécante, initiée avec $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, fournit une suite $(\tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ convergeant aussi vers ξ_a. Ecrire (en fonction de a) la relation entre $\tilde{x}_n$, $\tilde{x}_{n-1}$ et $\tilde{x}_{n+1}$ lorsque $n \geq 2$. Calculer en fonction de a les approximations $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Quel est l'ordre de cette méthode ?

e. On suppose $a = 1$. Au bout de combien d'itérations la méthode de la sécante initiée avec $x_0 = -2$ et $x_1 = -1$ permet-elle de retrouver les trois premières décimales de ξ_a obtenues au **(c)** ?

Exercice 2. Soit A une matrice symétrique réelle (n, n) définie positive (i.e. de valeurs propres toutes strictement positives). On suppose $A = M - N$ avec M inversible. On note ${}^tX$ la transposée d'une matrice X.

a. Montrer que ${}^tM + N$ est aussi une matrice symétrique.

b. On suppose de plus (et pour toute la suite de l'exercice)que la matrice ${}^tM + N$ est aussi définie positive. On considère la norme $\| \ \|_A$ définie par $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle$. Soit x tel que $\|x\|_A = 1$. On note $y = M^{-1}Ax$. Montrer que

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \langle AM^{-1}Nx, M^{-1}Nx\rangle = 1 - \langle ({}^tM + N)y, y\rangle < 1$$

(*on utilisera la relation $A = M - N$ pour transformer le produit scalaire au second membre de la première égalité ci-dessus*).

c. Comment est défini le rayon spectral d'une matrice réelle $n \times n$ X ? Montrer que le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$ introduite au **(b)** est strictement inférieur à 1. Indiquer une procédure algorithmique pour calculer de manière approchée le rayon spectral d'une matrice $n \times n$ X.

d. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose $A = M - N$ symétrique réelle définie positive, avec ${}^tM + N$ aussi définie positive. Montrer que toute suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ initiée avec $x^{(0)}$ quelconque dans $\mathbb{R}^n$ et régie par la relation récurrente

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

converge vers l'unique solution de $Ax = b$ (*on pourra admettre le résultat de la question* **(c)**).

Exercice 3. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Détailler la procédure algorithmique pour calculer l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\, dt$$

via la méthode de Simpson composite (*on commencera à segmenter* $[0, 1]$ *en* N *intervalles de même longueur*). Quel est l'ordre de cette méthode ? Préciser comment l'on peut incrémenter cet ordre d'une unité suivant le procédé d'extrapolation de L. F. Richardson.