Semestre 3, Année 2007-2008 SESSION 2

UE : MHT304

Date : Mars 2008 Durée : 1h30

Documents non autorisés

Exercice I.

Ecrire soit en langage MAPLE, soit en langage MATLAB, la procédure retournant une approximation de l'unique zéro (sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$) d'une fonction f de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, lorsque cette fonction est telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ sur $[a, b]$ et $f'' < 0$ sur $[a, b]$ (on pourra s'aider d'un dessin préalable) suivant la méthode de Newton. Quel est l'ordre de cette méthode ? Est-il supérieur ou non à l'ordre de la méthode de dichotomie (que vous présenterez succintement) ?

Exercice II.

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$, $N + 1$ points distincts équi-espacés de $[a, b]$.

1. Soit $N = 4$, $a = 0$, $b = 4$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange aux cinq points $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$, de la fonction

$$t \longmapsto f(t) = \frac{1}{1+t}\,.$$

2. Écrire (sous le langage MAPLE) une procédure récursive

```
F=proc(N,f,a,b)
```

qui retourne, N, f, a, b étant donnés, le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_N[f]$ de f aux $N + 1$ points régulièrement espacés x_k, $k = 0, ..., N$.

Exercice III.

1. Soit M un entier strictement supérieur à 1. Quel système de Cramer doit on résoudre pour calculer les M nombres $\alpha_0, ..., \alpha_{M-1}$ de la formule d'approximation de Newton-Cotes à M points

$$\int_0^1 f(t)\,dt \simeq \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k f\Big(\frac{k}{M-1}\Big)$$

donnant une valeur approchée de l'intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$ d'une fonction continue $f\ : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (on donnera la matrice $M \times M$ du système à résoudre ainsi que le vecteur colonne figurant au second membre) ? Pour quelles fonctions f cette formule approchée est-elle une formule exacte ? Quelle formule approchée à M points en déduit-on pour le calcul approché de l'intégrale sur un segment $[x, x+h]$ d'une fonction continue f de $[x, x+h]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ étant des nombres donnés (on précisera dans ce cas quels sont, en fonction de x et de h, les M points à considérer) ?

2. Que valent les trois nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ intervenant dans la formule d'approximation de Newton-Cotes à $M = 3$ points ? Comment s'appelle cette méthode d'approximation dans ce cas ? Quelle est l'ordre de cette méthode ?

3. On considère une fonction continue $f\ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et on découpe $[a, b]$ suivant une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N$$

de pas constant, avec $N \geq 2$ et $h = (b-a)/N$. Écrire ce que vaut en fonction de $x_k, x_{k+1}, (x_k + x_{k+1})/2$ la valeur approchée de l'intégrale de f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, calculée avec la méthode de Newton-Cotes à trois points introduite à la question **2**.

4. On suppose que l'on dispose de deux valeurs approchées l'intégrale de f sur $[a, b]$ obtenues suivant la méthode à trois points composite :

- d'une part $I(h)$, après le découpage de $[a, b]$ en les N segments $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, de longueur $h = (b-a)/N$ et le recours à la méthode à trois points sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ comme à la question **3** ;
- d'autre part $I(h/2)$, après le découpage raffiné de $[a, b]$ en $2N$ segments de longueur $h/2 = (b-a)/(2N)$ et le recours à la méthode à trois points (comme à la question **3**) sur chacun des $2N$ segments de la nouvelle subdivision.

Quel est l'ordre de la méthode composite consistant à remplacer l'intégrale de f sur $[a, b]$ soit par $I(h)$, soit par $I(h/2)$? Comment (suivant Richardson) doit-on combiner les deux valeurs approchées $I(h)$ et $I(h/2)$ dont on dispose pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ avec une erreur cette fois en $o(h^4)$? Quel est le gain au niveau de l'estimation d'erreur ?

IV. Question de cours (algèbre linéaire). Qu'appelle t-on « *conditionnement* » d'une matrice $n \times n$ inversible à entrées réelles relativement à un choix particulier de norme $\| \ \|$ dans $\mathbb{R}^n$? Quel risque fait courir la résolution numérique directe d'un système de Cramer $A.X = B$ lorsque le conditionnement de A est grand (ou encore la matrice A est « *mal conditionnée* ») ?