UE MAT401 , Devoir Surveillé 1, Lundi 23 Avril 2007
Durée : 1 heure 20 mn

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1. *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions toutes définies sur* $[0,+\infty[$ *par*

$$f_n(t) = t^{\log n} e^{-nt}\,;$$

cette suite de fonctions converge -t'elle simplement sur $[0,\infty[$ *? Si oui, quelle est la fonction limite ? La convergence est elle uniforme ?*

Pour $t>0$ fixé, on a

$$f_n(t) = \exp(\log n \log t - nt) = \exp\Big(-n\Big(t - \frac{\log n}{n}\log t\Big)\Big) \stackrel{n\to+\infty}{\to} 0\,;$$

comme d'autre part $f_n(0)=0$ pour tout $n\geq 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur $[0,+\infty[$. Pour voir si la convergence est uniforme, on doit calculer $\sup_{[0,+\infty[} f_n(t)$. Comme f_n tend vers 0 à l'infini et est nulle en 0, cette borne supérieure est atteinte en un point où f_n' s'annule ; or

$$f_n'(t) = \Big(\frac{\log n}{t} - n\Big) f_n(t)\ ;$$

la borne supérieure $\sup_{[0,+\infty[} f_n$ est donc atteinte en $t=\frac{\log n}{n}$ et vaut

$$u_n = \exp\Big(\log n \times \log(\log n) - (\log n)^2 - \log n\Big)\,.$$

Comme $u_n \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini (car $\log n \times \log(\log n)$ est négligeable devant $(\log n)^2 + \log n$), la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$ est uniforme.

Exercice 2. *On considère la série de fonctions* $[f_n]_{n\geq 1}$*, toutes définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{t}{n}\Big)\,,\ \forall\, t\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,,$$

où Arctan *désigne la fonction arc tangente.*

a. *Montrer que la série de fonctions* $[f_n]_{n\geq 1}$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$ *et que la convergence de cette série de fonctions est normale sur tout intervalle* $[-R,R]$ *de* $\mathbb{R}$.

Au voisinage de $x = 0$, on a a $\mathrm{Arctan}\, x \sim x$ (car la dérivée de la fonction arc tangente vaut 1 en 0) ; si t est fixé, on est donc certain que pour n assez grand ($n \geq N(t)$)

$$\left|\mathrm{Arctan} \frac{t}{n}\right| \leq \frac{3}{2}\frac{|t|}{n},$$

ce qui implique, pour $n \geq N(t)$

$$|f_n(t)| \leq \frac{3|t|}{2n^2}.$$

Comme la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$ est une série de Riemann convergente, la série numérique $[f_n(t)]_{n\geq 1}$ est absolument convergente en vertu du critère de comparaison. Mais on a

$$|x| \leq \epsilon \Longrightarrow |\mathrm{Arctan}\, x| \leq 3|x|/2$$

pour un choix de ϵ convenable ; si $n \geq R/\epsilon$, on a donc $|t/n| \leq \epsilon$ pour tout $t \in [-R, R]$ et donc

$$\forall\, n \geq R/\epsilon\,,\ \forall\, t \in [-R, R]\,,\ |f_n(t)| \leq \frac{3R}{2n^2}.$$

La série $[f_n]_{n\geq R/\epsilon}$ est donc normalement convergente sur $[-R, R]$ (puisque la série majorante $[3R/(2n^2]_{n\geq R/\epsilon}$ est une série de Riemann convergente). Comme on a simplement laissé de côté un nombre fini de termes en prenant $n \geq R/\epsilon$ au lieu de $n \geq 1$, la série $[f_n]_{n\geq 1}$ est aussi normalement convergente sur $[-R, R]$.

b. *Montrer que la fonction*

$$F\ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{n}\right)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$F'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2}$$

(on citera précisément le résultat du cours que l'on utilise).

Chaque fonction f_n, $n \geq 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, par la règle de Leibniz,

$$f_n'(t) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n^2}} = \frac{1}{t^2 + n^2},$$

donc f_n est de classe C^1 et

$$|f_n'(t)| \leq \frac{1}{n^2}\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui prouve que la série $[f_n']_{n\geq 1}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Comme la série $[f_n]_{n\geq 1}$ est simplement convergente en tout point et que toutes les fonctions f_n sont de classe C^1, le résultat du cours concernant la dérivation des séries terme à terme nous assure que la fonction F est aussi de classe C^1 et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ F'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+n^2}\,.$$

Exercice 3.

a. *Soit $R > 0$; montrer, en ayant recours aux développements limités (pour le premier cas) et à la formule des accroissements finis (pour le second cas), que lorsque n tend vers $+\infty$,*

$$\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \overset{\text{uniform. sur } [0,R]}{\longrightarrow} e^{-t} \quad \text{et} \quad \sin\Big(\frac{nt}{n+1}\Big) \overset{\text{uniform. sur } [0,R]}{\longrightarrow} \sin t\ ;$$

en déduire (en précisant quel résultat du cours vous utilisez)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^R \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \sin\Big(\frac{nt}{n+1}\Big)\,dt = \int_0^R e^{-t}\sin t\,dt\,.$$

Au voisinage de $x=0$, on a

$$\log(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2),$$

donc, lorsque $x \leq \epsilon$ pour ϵ convenable,

$$|\log(1-x)+x| \leq x^2\,.$$

Au voisinage de $y=0$ (si $|y|\leq \eta$) , on a aussi

$$|1-e^y| \leq 2|y|\,.$$

Si $n > R/\epsilon$, on a

$$|n\log(1-t/n)+t| \leq R^2/n \qquad \forall\, t \in [0,R]\,.$$

Si l'on a aussi $n \geq R^2/\eta$, on a

$$|1-(1-t/n)^n e^t| \leq 2|n\log(1-t/n)+t| \leq \frac{2R^2}{n} \qquad \forall t \in [0,R]\,.$$

Comme

$$|e^{-t}-(1-t/n)^n| =\leq e^{-t}|1-(1-t/n)^n e^t| \leq \frac{2R^2}{n} \qquad \forall t\in[0,R]$$

lorsque $n \geq R^2/\eta$, la suite de fonctions $((1-t/n)^n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ sur $[0,R]$. D'après l'inégalité des accroissements finis

$$\left|\sin\left(\frac{nt}{n+1}\right)-\sin t\right| \leq \frac{t}{n+1} \leq \frac{R}{n+1} \qquad \forall t\in[0,R]$$

et la suite $(\sin(nt/(n+1)))_{n\geq 1}$ converge donc uniformément sur $[0,R]$ vers la fonction $t \longmapsto \sin t$. En conclusion, sur $[0,R]$,

$$(1-t/n)^n e^{-t}\sin\left(\frac{nt}{n+1}\right) \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} e^{-t}\sin t$$

sur $[0,R)$. Posons

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (1-t/n)^n \\ g_n(t) &= \sin\left(\frac{nt}{n+1}\right). \end{aligned}$$

On a sur $[0,R]$, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f_n(t)g_n(t)-e^{-t}\sin t| &\leq |g_n(t)|\,|f_n(t)-e^{-t}| + e^{-t}|g_n(t)-\sin t| \\ &\leq |f_n(t)-e^{-t}| + |g_n(t)-\sin t| \end{aligned}$$

(puisque $t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto |g_n(t)|$ sont bornées par 1 sur $[0,R]$). Il en résulte la convergence uniforme (sur $[0,R]$) de la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ vers la fonction $t\mapsto e^{-t}\sin t$. D'après le résultat du cours qui affirme que l'on peut alors intervertir prise de limite et prise d'intégrale, on peut bien affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^R \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{nt}{n+1}\right) dt = \int_0^R e^{-t}\sin t\, dt\,.$$

b. *Vérifier, pour tout $x\geq 0$, l'inégalité $1-x\leq e^{-x}$; montrer, soit en utilisant le* **a***, soit directement en utilisant un résultat du cours que vous préciserez, que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{nt}{n+1}\right) dt = \int_0^\infty e^{-t}\,\sin t\, dt = \frac{1}{2}\,.$$

La fonction $x\mapsto 1-x-e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ a pour dérivée $x\mapsto -1+e^{-x}\leq 0$; elle est donc sur cet intervalle décroissante et négative puisque nulle en $x=0$. On a donc, pour tout $t\in[0,n]$,

$$(1-t/n)^n = \exp(n\log(1-t/n)) \leq \exp(-nt/n) = \exp(-t)\,.$$

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$(1 - t/n)^n \chi_{[0,n]}(t) \Big| \sin\Big(\frac{nt}{n+1}\Big)\Big| \leq e^{-t}\,.$$

Comme l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t} dt < \infty\,,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \sin\Big(\frac{nt}{n+1}\Big)\, dt &= \int_0^\infty e^{-t} \sin t\, dt \\
&= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \big(e^{-(1-i)t} - e^{-(1+i)t}\big)\, dt \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\Big) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$