Espaces de Hilberts et Analyse de Fourier

Devoir maison n^o 2.

Exercice 1.

1. Calculer les coefficients de Fourier associés à la périodisée f de la fonction $x \mapsto |x|$.
2. En déduire que pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^2},$$

3. En déduire

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

puis que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2. Soient f, g deux fonctions 2π–périodiques continues. On note

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est continue 2π–périodique.
2. Montrer que si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Que peut-on dire si f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$?
3. Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction des coefficents de Fourier de f et de g.
4. Définissons f sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Calculer $h = f * f$ et calculer les coefficients de Fourier de h.

Exercice 3. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction telle que $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty$.

1. Montrer que les sommes partielles $S_N(f)$ sont de Cauchy dans $(\mathcal{C}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$.
2. Si f est une fonction continue, en déduire que les sommes partielles $S_N(f)$ convergent uniformément vers f.
3. Montrer que si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ alors les sommes partielles $S_N(f)$ convergent uniformément vers f.

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$. On pose

$$k_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Vérifier que $k_\lambda \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ et calculer sa transformée de Fourier.
2) Calculer la norme de l'application linéaire

$$T : L^1(\mathbb{R}, dx) \to L^1(\mathbb{R}, dx),\ f \to f * k_\lambda.$$

3) Trouver les $\lambda > 0$ pour lesquels l'équation en f :

$$f - f * k_\lambda = g,$$

admet une solution pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.

Exercice 5. Pour $k \geq 1$ entier et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g_k(x) = e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2k^2}}$, où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
1) Calculer la transformée de Fourier de g_k.
(On pourra commencer par faire le calcul dans le cas $n = 1$ en montrant que $\hat{g}_k$ satisfait en certaine équation différentielle et en déduire ensuite le résultat pour n quelconque).
2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$ telle que $\hat{f} \geq 0$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g_k(x) dx \leq (8\pi)^n \|f\|_\infty,$$

3) En déduire que $\hat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$.