UE MHT734

Devoir Maison 1 - Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice I (autour de la formule de Cauchy-Pompeïu).

1.1. *Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe. En appliquant la formule de Cauchy-Pompeïu à la fonction*

$$F_z \ : \zeta \in \overline{D(0,1)} \longmapsto f(\zeta)\Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)$$

(pour $z \in D(0,1)$), vérifier que la fonction f peut se représenter dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ par la formule :

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} + \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} f(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

(où l'on a noté $\zeta = \xi + i\eta$ le point courant de $\mathbb{R}^2$). Que devient cette formule de représentation lorsque f satisfait de plus $\partial f/\partial\overline{\zeta} \equiv 0$ dans le disque unité ouvert ?

Il s'agit d'un calcul.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_z}{\partial \overline{\zeta}} &= f(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\Big[\frac{1-\zeta\overline{\zeta}}{1-\overline{\zeta}z}\Big] + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)\\
&= f(\zeta) \times \Big(\frac{-\zeta(1-\overline{\zeta}z) - (1-|\zeta|^2)(-z)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big)\\
&= f(\zeta) \times \Big(\frac{z-\zeta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \times \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\Big).
\end{aligned}$$

On remarque aussi que F_z est identiquement nulle sur le cercle de rayon 1, ce qui implique la disparition de l'intégrale « de contour » dans la formule de Cauchy-Pompeïu lorsqu'on l'applique pour représenter F_z au point z, soit $F_z(z) = f(z)$. La formule demandée résulte immédiatement de la formule de Cauchy-Pompeïu. On note la simplification de $z - \zeta$ par $\zeta - z$ dans l'une des deux intégrales sur $D(0,1)$ figurant au second membre, dans l'expression de

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{\partial F_z}{\partial \overline{\zeta}}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

(cette simplification amène d'ailleurs par un changement de signe).

1.2. *Soit $\dot{f} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ et f un représentant de $\dot{f}$ dans $\mathcal{L}^2(D(0,1), d\xi d\eta)$. Montrer que la fonction*

$$B[\dot{f}] \ : z \in D(0,1) \longmapsto \frac{1}{\pi}\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\,d\xi d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

est une fonction holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$; calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\partial^n[B(\dot{f})]/\partial z^n(0)$.

L'holomorphie est une propriété locale et il suffit de la prouver dans un disque $D(0,r)$ avec $r < 1$. Si $\zeta \in \overline{D(0,1)}$ et $z \in \overline{D(0,r)}$, la fonction $(\zeta, z) \mapsto (1-\overline{\zeta}z)^2$

ne s'annule pas et est donc minorée en module sur $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,r)}$ par une constante $\gamma_r > 0$. Pour tout $\zeta \in \overline{D(0,1)}$, pour tout $z \in \overline{D(0,r)}$, on a

$$\Big|\frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big| \leq \frac{\sup\limits_{D(0,1)} |f(z)|}{\gamma_r} = M_r.$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure donc la continuité de

$$z \mapsto B[\dot{f}](z) := \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\, d\xi\, d\eta$$

(on prend comme « chapeau majorant » pour la clause de domination la fonction constante égale à M_r sur $D(0,1)$ et donc évidemment intégrable). Pour montrer l'holomorphie de $B[\dot{f}]$ dans $D(0,r)$, on utilise le théorème de Morera. Soit T un triangle plein inclus dans $D(0,r)$. Le théorème de Fubini permet de démontrer

$$\int_{\partial T} \Big[\iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big]\, dz = \iint_{D(0,1)} f(\zeta) \Big[\int_{\partial T} \frac{dz}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big]\, d\xi\, d\eta = 0.$$

Il s'applique car la fonction de deux variables

$$(\zeta, z) \mapsto \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

est bornée en module (donc intégrable) sur $D(0,1) \times \partial T$. Le fait que, pour tout $\zeta \in D(0,1)$, on ait

$$\int_{\partial T} \frac{dz}{(1-\overline{\zeta}z)^2} = 0$$

résulte de l'holomorphie dans $D(0,r)$ de la fraction rationnelle (en z) sous l'intégrale curviligne.

Le calcul des dérivées successives de $B[\dot{f}]$ se fait en dérivant sous le signe somme. On peut en effet intervertir dérivation par rapport au paramètre et intégrale car les inégalités de Cauchy impliquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\zeta \in D(0,1)$, pour tout z dans $D(0, r-\epsilon)$ (avec $\epsilon < r$ arbitrairement petit)

$$\Big|\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big(\frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\Big)\Big| \leq M_r/\epsilon^n.$$

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique donc et donne

$$\frac{d^n}{dz^n} B[\dot{f}](z) = \frac{(n+1)!}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^n\, d\xi\, d\eta}{(1-\overline{\zeta}z)^{2+n}}.$$

La valeur de cette dérivée n-ième en 0 est

$$\frac{d^n}{dz^n} B[\dot{f}](0) = \frac{(n+1)!}{\pi} \iint_{D(0,1)} \overline{\zeta}^n f(\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

1.3. *Montrer que le système de classes de fonctions $(\dot{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où*

$$\varphi_n \ : \zeta \in D(0,1) \longmapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, \zeta^n,$$

forme un système orthonormé de l'espace de Hilbert $L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ et que l'on a, dans cet espace de Hilbert, pour tout $\dot{f} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$,

$$\dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \dot{B}[\dot{f}], \dot{\varphi}_n \rangle \, \dot{\varphi}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \dot{f}, \dot{\varphi}_n \rangle \, \dot{\varphi}_n.$$

Un calcul d'intégrales en polaire donne, si n_1 et n_2 sont deux entiers positifs,

$$\iint_{D(0,1)} \zeta^{n_1} \overline{\zeta}^{n_2} \, d\xi \, d\eta = \int_0^1 r^{n_1+n_2+1} \, dr \times \int_0^{2\pi} e^{i(n_1-n_2)\theta} \, d\theta.$$

Si $n_1 \neq n_2$, cette intégrale vaut zéro (orthogonalité des fonctions $\theta \mapsto e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, sur $[0, 2\pi]$). Pour $n_1 = n_2$, on trouve $\pi/(n_1+1)$. Le système des classes de fonctions $(\dot{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(D(0,1))$ est donc bien orthonormé. La fonction f est un représentant d'un élément $\dot{f}$ de cet espace $L^2(D(0,1))$ (car c'est une fonction continue bornée, donc le carré de son module est intégrable) et l'on a (d'après l'inégalité de Bessel, voir le cours de L3 sur les espaces de Hilbert, c'est juste une conséquence du théorème de Pythagore) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle \dot{f}, \dot{\varphi}_n \rangle|^2 \leq \iint_{D(0,1)} |f(\zeta)|^2 \, d\xi d\eta < +\infty.$$

Or

$$\langle \dot{f} \, , \, \dot{\varphi}_n \rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{D(0,1)} \overline{\zeta}^n \, f(\zeta) \, d\xi \, d\eta$$

et, par conséquent,

$$\langle \dot{f} \, , \, \dot{\varphi}_n \rangle \, \varphi_n = \frac{n+1}{\pi} z^n = \frac{z^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (B[\dot{f}])(0).$$

La suite des classes des fonctions

$$\Phi_N := \sum_{n=0}^{N} \langle \dot{f} \, , \, \dot{\varphi}_n \rangle \, \varphi_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{d^n}{dz^n} (B[\dot{f}])(0) \, z^n$$

converge dans $L^2(D(0,1))$ (c'est une suite de Cauchy) vers un certain élément $\dot{g}$. Mais on sait que la suite $(\Phi_N)_N$ converge presque partout (dans $D(0,1)$ en tout cas) vers $B[\dot{f}]$ (c'est la formule de Taylor à l'origine pour la fonction $B[\dot{f}]$ dont on sait qu'elle est holomorphe dans le disque $D(0,1)$ d'après la question **2)**). Comme on sait d'autre part qu'il existe une sous-suite de la suite $(\Phi_N)_N$ convergeant presque partout vers un représentant g de $\dot{g}$, on en déduit que $B[\dot{f}]$ représente un élément de $L^2(D(0,1))$, précisément cet élément $\dot{g}$. On peut écrire, dans $L^2(D(0,1))$,

$$\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \dot{f} \, , \, \dot{\varphi}_n \rangle \, \dot{\varphi}_n,$$

mais aussi bien sûr, puisque $\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}]$ est dans l'adhérence du sous-espace engendré par les $\dot{\varphi}_n$,

$$\dot{g} = \dot{B}[\dot{f}] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \dot{B}[\dot{f}] \, , \, \dot{\varphi}_n \rangle \, \dot{\varphi}_n.$$

D'où le résultat.

1.4. *Montrer que l'ensemble des éléments $\dot{g} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ admettant un représentant holomorphe dans $D(0,1)$ est un sous-espace fermé $A(D(0,1))$ de l'espace de Hilbert $L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ et que la projection orthogonale d'un élément $\dot{f} \in L^2(D(0,1), d\xi d\eta)$ sur ce sous-espace $A(D(0,1))$ est égale à $\dot{B}[\dot{f}]$.*

Si $(\dot{g}_n)$ est une suite d'éléments de $A(D(0,1))$, on a, pour n, m dans $\mathbb{N}$ et z dans $D(0, 1-2\epsilon)$ (d'après la formule de la moyenne « volumique »)

$$(g_n - g_m)(z) = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D(z,\epsilon} (g_n(\zeta) - g_m(\zeta))\, d\xi\, d\eta.$$

D'où, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |(g_n - g_m)(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \Big(\iint_{D(z,\epsilon)} |g_n(\zeta) - g_m(\zeta)|^2\, d\xi\, d\eta \Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{\|\dot{g}_n - \dot{g}_m\|_{L^2(D(0,1))}}{\sqrt{\pi}\epsilon}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Si en plus la suite $(\dot{g}_n)_n$ converge dans $L^2(D(0,1))$ vers un élément $\dot{f}$, elle est de Cauchy dans $L^2(D(0,1))$ et la suite de fonctions holomorphes $(g_n)_n$ satisfait (d'après l'inégalité (1) juste établie) le critère de Cauchy uniforme sur le disque $D(0, 1-2\epsilon)$. Elle converge donc uniformément sur ce disque vers une fonction holomorphe h. Comme ϵ est arbitraire, on en déduit (en utilisant le fait qu'au moins une sous suite de $(g_n)_n$ doit converger vers un représentant de $\dot{g}$), que $\dot{g}$ admet un représentant h holomorphe dans $D(0,1)$. Le sous-espace $A(D(0,1))$ est donc fermé.

Les éléments $(\dot{\varphi}_n)_n$ forment un système orthonormé dans $A(D(0,1))$. On vérifie que c'est une base hilbertienne de cet espace en montrant que le seul élément $\dot{g}$ de $A(D(0,1))$ orthogonal à tous les $\dot{\varphi}_n$ est la classe de la fonction nulle : en effet, si $\dot{g}$ a pour représentant la fonction holomorphe

$$z \mapsto g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} a_k \varphi_k(z)\,,$$

on voit que

$$\begin{aligned} \langle \dot{g}\,,\, \dot{\varphi}_n \rangle &= \lim_{r \to 1^-} \Big(\iint_{D(0,r)} f(\zeta) \overline{\varphi_n(\zeta)}\, d\xi d\eta \Big) \\ &= \lim_{r \to 1^-} \Big(\iint_{D(0,r)} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \Big) \overline{\varphi_n(\zeta)}\, d\xi d\eta \Big) \\ &= \lim_{r \to 1^-} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big(\iint_{D(0,r)} \zeta^k\, \overline{\varphi_n(\zeta)}\, d\xi d\eta \Big) \Big) \\ &= \lim_{r \to 1^-} \Big(2\pi a_n \times \frac{r^{2(n+1)}}{2(n+1)} \times \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \Big) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\; a_n. \end{aligned}$$

Si $\dot{g}$ est orthogonal à tous les $\dot{\varphi}_n$, on a $a_n = 0$ pour tout n, ce qui implique $\dot{g} = 0$. Comme la famille $(\dot{\varphi}_n)_n$ est une base hilbertienne de $A(D(0,1))$, les formules établies à la question **3)** montrent que $B[\dot{f}]$ est bien la projection orthogonale de $\dot{f}$ sur le sous-espace fermé engendré par les $\dot{\varphi}_n$, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire sur le sous-espace $A(D(0,1))$. C'est ce que l'on devait démontrer.

Remarque. L'opérateur introduit dans cet exercice

$$B \ : L^2(D(0,1)) \to A(D(0,1))$$

s'appelle *l'opérateur de Bergman* (ou *projecteur de Bergman*) du disque unité et le « noyau »

$$(\zeta, z) \in \overline{D(0,1)} \times D(0,1) \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$$

qui le « représente » (voir la question **2)**) s'appelle le *noyau de Bergman* de ce même disque.

Exercice II (formule de Lelong-Poincaré, calcul de degré).

II.1. *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Pourquoi la fonction f n'a-elle qu'un nombre fini de zéros dans un sous-ensemble compact arbitraire K de U ?*

Il fallait ajouter, vous l'avez deviné, que la fonction f doit être supposée non identiquement nulle sur les diverses composantes connexes de U. Cela manquait ici à l'hypothèse. Si tel est le cas, les zéros de f sont isolés (d'après le principe des zéros isolés) et le fait qu'il y en ait une infinité dans un compact K de U contredit le théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un compact de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^n$), tout ensemble infini borné a nécessairement un point d'accumulation !

II.2. *Montrer que, si φ est une fonction de classe C^2 et à support compact dans U, on a la formule de Lelong-Poincaré :*

$$2\pi \sum_{\{\alpha \in \operatorname{supp}\varphi\,;\, f(\alpha)=0\}} m_f(\alpha)\varphi(\alpha) = \iint_U \log|f(\zeta)|\,\Delta[\varphi(\zeta)]\,d\xi d\eta.$$

On peut supposer U connexe (sinon, on raisonne pour chaque composante connexe de U et on additionne). Le plus élégant ici est d'utiliser la *formule de la divergence* dans un ouvert borné Ω à frontière C^1 contenant le support de φ, tel que $\overline{\Omega} \subset U$ et que f ne s'annule pas sur le bord de Ω. D'après la question **1)**, la fonction f n'a qu'un nombre fini de zéros, $\alpha_1, ..., \alpha_N$ dans $\overline{\Omega}$. Autour de chacun de ces zéros (comme dans la preuve de la formule de Cauchy-Pompeïu), on considère un petit disque $D(\alpha_j, \epsilon)$ de manière à ce que $\overline{D(\alpha_j,\epsilon)} \subset \Omega$ et que les disques fermés $\overline{D(\alpha_j,\epsilon)}$ soient deux à deux disjoints. Si (P,Q) est un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Omega_\epsilon} = \overline{\Omega} \setminus \bigcup_j D(\alpha_j,\epsilon)$, on a

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \langle (P,Q), \nu_{\text{ext}} \rangle \, d\sigma = \int_{\gamma_\epsilon} (-Qdx + Pdy)\,, \tag{2}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de Lebesgue sur le bord de Ω_ϵ, le chemin paramétré γ_ϵ désignant le bord paramétré de Ω_ϵ, le paramétrage étant tel qu'en le suivant, on conserve le domaine Ω_ϵ sur notre gauche (règle du « bonhomme d'Ampère »). On note que la normale extérieure ν_{ext} est dirigée précisément par le vecteur $(dy, -dx)$ lorsque (dx, dy) désigne le déplacement infinitésimal sur le bord en gardant le domaine Ω_ϵ à sa gauche (faire un petit dessin, il faut tourner de $-\pi/2$ pour trouver la direction de ν_{ext} !).

D'après Green-Riemann,

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} (Pdy - Qdx) = \iint_{\Omega_\epsilon} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, d\xi d\eta\,. \tag{3}$$

En combinant (2) et (3), on obtient la *formule de la divergence*

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \langle (P,Q), \nu_{\rm ext}\rangle\, d\sigma = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, d\xi d\eta\,.$$

Si on applique cette formule à un champ de gradient $(P,Q) = \nabla G$, où G est de classe C^2 au voisinage de $\overline{\Omega}_\epsilon$, on en déduit la formule

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial \nu_{\rm ext}}\, d\sigma = \iint_{\Omega_\epsilon} \Delta(G)\, d\xi\, d\eta$$

puisque $\mathrm{div}(\nabla G) = \Delta(G)$.

Si l'on prend deux champs de gradient ∇G_1 et ∇G_2, G_1 et G_2 étant de classe C^2 au voisinage de $\overline{\Omega}_\epsilon$, on a la formule

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \Big(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \nu_{\rm ext}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \nu_{\rm ext}}\Big)\, d\sigma = \iint_{\Omega_\epsilon} \Big(G_1\Delta(G_2) - G_2\Delta(G_1)\Big)\, d\xi\, d\eta. \tag{4}$$

Si f est une fonction holomorphe, on voit que dans l'ouvert où f ne s'annule pas,

$$\frac{\partial \log|f|}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log|f|^2}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log f\overline{f}}{\partial\zeta} = \frac{\overline{f}}{2|f|^2} = \frac{1}{2f}$$

et, par conséquent,

$$\Delta \log|f| = 4\partial\overline{\partial\zeta}\Big[\frac{\partial \log|f|}{\partial\zeta}\Big] = 2\partial\overline{\partial\zeta}(1/f) = 0.$$

Si on prend $G_1 = \log|f|$ et $G_2 = \varphi$, la formule (4) devient

$$\iint_{\Omega_\epsilon} (\log|f|)\Delta[\varphi]\, d\xi\, d\eta = -\sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_{j,\epsilon}} \Big(\log|f| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{j,\rm ext}} - \varphi \frac{\partial \log|f|}{\partial\nu_{j,\rm ext}}\Big)\, d\sigma_{j,\epsilon}\,, \tag{5}$$

où $d\sigma_{j,\epsilon}$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle de centre α_j et de rayon ϵ, la normale extérieure $\nu_{j,\rm ext}$ pointant cette fois vers l'extérieur du disque $D(\alpha_j,\epsilon)$. Il reste (comme dans la preuve de la formule de Cauchy-Pompeïu) à faire tendre ϵ vers 0. Près de α_j, on peut écrire $|f(\zeta)| = |\zeta-\alpha_j|^{m_f(\alpha_j)} \times |g_j|$, où g_j ne s'annule pas. Lorsque ϵ tend vers 0, la limite du membre de droite de (5) est donc la même que la limite lorsque ϵ tend vers 0 de

$$-\sum_{j=1}^{N} m_f(\alpha_j) \int_{\gamma_{j,\epsilon}} \Big(\log\epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{\rm ext}} - \varphi \frac{\partial \log|\zeta-\alpha_j|}{\partial\nu_{j,\rm ext}}\Big)\, d\sigma_{j,\epsilon}.$$

Or un calcul immédiat montre que sur le bord de $D(\alpha_j,\epsilon)$,

$$\langle \nabla \log|\zeta-\alpha_j|, \nu_{j,\rm ext}\rangle = \frac{1}{\epsilon}.$$

Il en résulte donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\sum_{j=1}^{N} m_f(\alpha_j)\int_{\partial D(\alpha_j,\epsilon)} \varphi\frac{\partial \log|\zeta-\alpha_j|}{\partial \nu_{j,\text{ext}}}\,d\sigma_{j,\epsilon}\Big) = \sum_{j=1}^{N} m_f(\alpha_j)\varphi(\alpha_j).$$

D'autre part, comme $\epsilon\log\epsilon$ tend vers 0, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\log\epsilon\sum_{j=1}^{N} m_f(\alpha_j)\int_{\partial D(\alpha_j,\epsilon)} \frac{\partial\varphi}{\partial \nu_{,\text{ext}}}\,d\sigma_{j,\epsilon}\Big)=0.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans (5), on obtient donc bien la formule de Lelong-Poincaré.

Remarque. La formule de Lelong-Poincaré, dans la mesure où elle permet de retrouver zéros et multiplicités d'une fonction holomorphe à partir de la fonction elle-même (on prend le Laplacien du logarithme du module, au sens que vous verrez plus tard des *distributions*), joue un rôle précieux en géométrie algébrique ainsi qu'en théorie des nombres.

II.3. *Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et d le maximum de leurs degrés. Vérifier, si $\gamma_R\ : t\in[0,1]\longmapsto Re^{2i\pi t}$, que*

$$\begin{aligned} d &= \frac{i}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\overline{\partial}\Big[\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big] \\ &= \frac{i}{2\pi}\iint_{\mathbb{C}}\partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big). \end{aligned}$$

D'après la formule de Green-Riemann, on a, pour $R>0$ fixé :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R}\overline{\partial}\Big[\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big] &= \iint_{D(0,R)} d\Big[\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big)\Big] \\ &= \iint_{D(0,R)} \partial\Big[\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

En effet, P et Q n'ont par hypothèse aucun zéro commun (ils sont supposés premiers entre eux) et la fonction $\log(|P|^2+|Q|^2)$ est donc bien de classe C^∞ dans $\mathbb{C}$. On a d'autre part

$$\overline{\partial}\log[|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2]=\frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)}+Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2}\,d\overline{\zeta}.$$

On remarque que, pour $R_0>0$ suffisamment grand et $|\zeta|>R_0$,

$$\begin{aligned} \frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)}+Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2+|Q(\zeta)|^2} &= \frac{d}{\overline{\zeta}}\Big(\frac{1+\sum\limits_{\alpha+\beta>0} u_{\alpha,\beta}\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}}{1+\sum\limits_{\alpha+\beta>0} v_{\alpha,\beta}\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}}\Big) \\ &= \frac{d}{\overline{\zeta}}\Big(1+\sum_{\alpha+\beta>0} w_{\alpha,\beta}\,\zeta^{-\alpha}\overline{\zeta}^{-\beta}\Big), \end{aligned} \tag{7}$$

les séries doubles ci-dessus convergeant normalement dans $\{|\zeta| > R_0\}$. On a donc

$$\int_{\gamma_R} \overline{\partial} \log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2] = d \int_{\gamma_R} \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}} + O(1/R) = -2i\pi d + O(1/R).$$

La première égalité est ici démontrée. Il ne reste pour vérifier la seconde que de s'assurer que l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2]\Big)$$

est bien convergente. En utilisant (7), on observe que, pour $|\zeta| > R_0$,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[\frac{P(\zeta)\overline{P'(\zeta)} + Q(\zeta)\overline{Q'(\zeta)}}{|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2}\Big] = O(1/|\zeta|^3)$$

car $(\partial/\partial\zeta)(d/\overline{\zeta}) = 0$. Comme $1/|\zeta|^3$ est intégrable dans $\{|\zeta| > R_0\}$, l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{C}} \partial\overline{\partial}\Big(\log[|P(\zeta)|^2 + |Q(\zeta)|^2]\Big)$$

est bien absolument convergente. La seconde formule résulte de la première, combinée avec (6) (identité dans laquelle on fait tendre R vers $+\infty$).

Exercice III (développement de Taylor en ζ et $\overline{\zeta}$).

III.1. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, non identiquement nulle et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un changement de variable $z \mapsto w = w(z)$, réalisant un biholomorphisme entre un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}_z$ et un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}_w$, et tel que*

$$f(z(w)) = w^m$$

au voisinage de 0 pour un certain entier $m > 0$ (la multiplicité de 0 comme zéro de f).

Si f est non identiquement nulle au voisinage de l'origine, il existe un disque $D(0,r)$ dans lequel on peut écrire $f(z) = z^m g(z)$, où g est une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Comme le disque $D(0,r)$ est simplement connexe, toute fonction holomorphe g de $D(0,r)$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit $g = \exp h$ avec h holomorphe dans $D(0,r)$. Pour construire $h(z)$, il suffit de considérer le chemin $t \mapsto g(tz)$, puis d'intégrer sur ce chemin (de support inclus dans $\mathbb{C}^*$ par hypothèses) la forme du/u. Dans $D(0,r)$, f se représente donc par $f(z) = z^m \exp(h(z)) = (z\exp(h(z)/m))^m$. Si l'on pose $w = z\exp(h(z)/m)$, on constate que $z \mapsto w(z)$ est une transformation Φ de $D(0,r)$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dont la différentielle (au sens réel) en $(0,0)$ est inversible (puisque $w'(0) = \exp(h(0)/m) \neq 0$ et que $|w'(0)|^2$ représente précisément le jacobien de $d\Phi_{(0,0)}$). Le résultat demandé résulte donc du théorème d'iinversion locale (cours de Calcul Différentiel). Comme $w = z\exp(h(z)/m)$ et que $f(z) = z^m \exp(h(z))$ au voisinage de 0, on a bien, si $w\ : w \mapsto w(z)$ désigne l'application réciproque (qui d'ailleurs satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, donc est aussi holomorphe, ce d'après la formule de Leibniz $(d\Phi^{-1})_{\Phi(x,y)} = (d\Phi_{x,y})^{-1}$ et le fait que l'inverse d'une similitude directe est une similitude directe), $f(z(w)) = w^m$ dans le voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_w$ en correspondance biholomorphe avec un disque $D(0,\rho)$, $\rho < r$, de $\mathbb{C}_z$ sur lequel l'inversion locale s'applique.

III.2. *Soit, pour $\epsilon > 0$ assez petit, γ_ϵ le lacet $t \in [0,1] \mapsto w^{-1}(\epsilon e^{2i\pi t})$. Montrer que, si φ est une fonction de classe C^∞ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \varphi}{\partial \zeta^k}(0)\frac{\zeta^k}{k!}\Big)\frac{d\zeta}{f(\zeta)} \\ &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial \zeta^{m-1}}\Big[\frac{\zeta^m \varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big]_{|\zeta=0}\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $\zeta = \zeta(w)$, l'intégrale dont on étudie le comportement en ϵ lorsque ϵ tend vers 0 devient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{w(\zeta)}\, d\zeta = \int_{|w|^m=\epsilon} \frac{\varphi(\zeta(w))}{w^m}\zeta'(w)\, dw.$$

Le comportement de la limite est le même que celui de la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ de

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\epsilon} \frac{\psi(w)}{w^m}\, dw\,,$$

où $\psi(w) = \varphi(\zeta(w))\zeta'(w)$. La fonction ψ est une fonction C^∞ au voisinage de l'origine que l'on peut donc développer au voisinage de 0 en série de Taylor à l'ordre m :

$$\psi(\sigma + i\tau) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\alpha+\beta=k} \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^k \psi}{\partial \sigma^\alpha \partial \tau^\beta}(0)\sigma^\alpha \tau^\beta + O(|\sigma+i\tau|^m).$$

On remarque que l'on peut aussi écrire ce développement en utilisant les opérateurs $\partial/\partial w$ et $\partial/\partial \overline{w}$ en place de $\partial/\partial\sigma$ et ∂/τ (où $\sigma = \operatorname{Re} w$ et $\tau = \operatorname{Im} w$). On obtient ainsi au voisinage de $w = 0$,

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\alpha+\beta=k} \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^k \psi}{\partial w^\alpha \partial \overline{w}^\beta}(0)w^\alpha \overline{w}^\beta + O(|w|^m). \tag{8}$$

Si l'on intègre la forme $\psi(w)dw/w^m$ (ψ étant développé sous la forme (8)) sur le cercle $|z| = \epsilon$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, on constate que toutes les intégrales

$$\int_{|w|=\epsilon} w^{\alpha-m}\overline{w}^\beta dw\,,\ \alpha\in\mathbb{N},\ \beta\in\mathbb{N},\ \alpha+\beta\le m-1, \tag{9}$$

sont nulles, sauf si $\alpha - m - \beta + 1 = 0$, i.e. $\alpha - \beta = m-1$. La seule possibilité pour avoir une contribution non nulle est $\alpha = m-1$ et $\beta = 0$, auquel cas l'intégrale est égale à $2i\pi$. On voit donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\psi}{\partial w^{m-1}}(0).$$

Il faut maintenant pour finir revenir à une expression en termes de la fonction φ. L'expression de la limite en termes de φ (a priori compliquée) se présente certainement de par la règle de Leibniz sous la forme d'une combinaison des $(\partial^l/\partial z^l)[\varphi](0)$, $l = 0, ..., m-1$. Ceci implique que résultat resterait inchangé si l'on supposait que φ est remplacé par son « polynôme de Taylor holomorphe » :

$$P_{\varphi,m-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(0)\, z^k.$$

Or ce polynôme $P_{\varphi,m-1}$ est une fonction holomorphe de z. La formule des résidus s'applique si l'on fait cette substitution et nous assure que la limite cherchée (l'expression est dans ce cas en fait constante en fonction de ϵ) est aussi égale à $\mathrm{Res}(P_\varphi\, d\zeta/f(\zeta), 0)$, soit à

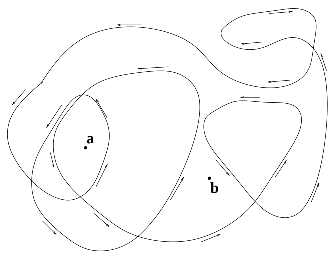
$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m P_\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0}.$$

Or, comme $(\partial/\partial\zeta)(\overline{\zeta}) = 0$, on a

$$\frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m P_\varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial\zeta^{m-1}} \Big(\frac{\zeta^m \varphi(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)_{|\zeta=0}.$$

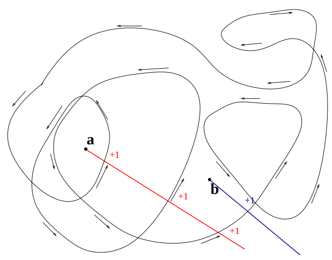
On a obtenu le résultat demandé.

Exercice IV (indice et intégrale d'une forme localement exacte sur un lacet continu). *Soit a et b deux nombres complexes distincts et γ le lacet continu de $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ représenté ci-dessous (et parcouru une seule fois dans le sens indiqué). Calculer en fonction de a et b l'intégrale le long de γ de la forme différentielle $dz/((z-a)^2(z-b))$ après avoir justifié que cette 1-forme était localement exacte au voisinage du support de γ. Cette forme est-elle exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$?*



La forme $f(z)\,dz$ est bien localement exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ puisque la fraction rationnelle $f(z) = 1/(z-a)^2(z-b)$ est holomorphe hors de ses pôles a et b. On calcule dans un premier temps les indices $I(\gamma,a) = +1+1+1 = 3$ et $I(\gamma,b) = +1$ en traçant une demi-droite issue de ces points et en comptant avec $+1$ les intersections de γ avec la demi-droite se faisant de gauche à droite, -1 les intersections de γ avec la demi-droite se faisant de droite à gauche (voir la figure). L'intégrale I à calculer est égale (par homotopie entre lacets libres) à

$$I = \mathrm{Ind}(\gamma,a) \int_{\gamma_{a,\epsilon}} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)} + \mathrm{Ind}(\gamma,b) \int_{\gamma_{b,\epsilon}} \frac{dz}{(z-a)^2(z-b)}\,,$$



où $\gamma_{a,\epsilon} \; : t \in [0,1] \mapsto a + \epsilon e^{2i\pi t}$ et $\gamma_{b,\epsilon} \; : t \in [0,1] \mapsto b + \epsilon e^{2i\pi t}$ (avec ϵ suffisamment petit). Il résulte de la formule de Cauchy (en b) que

$$\int_{\gamma_{b,\epsilon}} \frac{1}{(z-a)^2} \frac{dz}{(z-b)} = \frac{2i\pi}{(b-a)^2}.$$

Il résulte de la formule de Cauchy (en a cette fois) pour les dérivées que

$$\int_{\gamma_{a,\epsilon}} \frac{1}{(z-b)} \frac{dz}{(z-a)^2} = 2i\pi \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-b}\right)_{z=a} = -\frac{2i\pi}{(a-b)^2}.$$

Le résultat final est donc

$$I = 3 \times \frac{-2i\pi}{(b-a)^2} + \frac{2i\pi}{(b-a)^2} = -\frac{4i\pi}{(b-a)^2}.$$

Comme $I \neq 0$, la forme $f(z)\,dz$ n'est pas exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.