Exercice 1 On pose $f_k(t) := \dfrac{ke^{-t}}{1+kt}$; c'est une suite croissante

$$f_{k+1} - f_k = \frac{e^{-t}}{(1+kt)(1+(k+1)t)} > 0.$$

On peut donc appliquer Beppo Lévi :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^1 f_k(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{k\longrightarrow\infty} f_k(t)\,dt.$$

Mais

$$\forall t \in]0,1],\ \lim_{k\longrightarrow\infty} f_k(t) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{ke^{-t}}{1+kt} = \frac{e^{-t}}{t}$$

car $t > 0$ et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{t}\,dt = \infty$ on en déduit

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^1 \frac{ke^{-t}}{1+kt}\,dt = \infty.$$

Exercice 2

a) Comme la fonction $\dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[0,\infty[$, on a

$$\forall x \in]k,\ k+1],\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \Longrightarrow \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} 1\!\!1_{]k,\ k+1]}(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la fonction $\dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[n,\infty[,\ n > 0$ d'où intégrant

$$\int_n^\infty \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} 1\!\!1_{]k,\ k+1]}(x)\,dx \leq \int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Mais la série, à termes positifs, donne

$$\int_n^\infty \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} 1\!\!1_{]k,\ k+1]}(x)\,dx = \sum_{k\geq n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^\alpha},$$

d'où

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

b) Comme $t\longrightarrow t^\alpha$ est une fonction mesurable sur $[0,\infty[$ muni de la tribu borélienne, f^α est mesurable comme composée de fonctions mesurables, donc $\left(\dfrac{f}{k}\right)^\alpha$ aussi, et une série de fonctions mesurables positives est mesurable donc la fonction

$$F := \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (\frac{f}{k})^\alpha \chi_{\{f\leq k\}}$$

est mesurable.

Si $f(x) \in]n,\ n+1],\ n \geq 2$ alors

$$F(x) = \sum_{k\geq n} (\frac{f}{k})^\alpha \leq f(x)^\alpha \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq f(x)C(\frac{f(x)}{n-1})^{\alpha-1} \leq C\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\alpha-1} f(x) \leq 2^{\alpha-1}Cf(x).$$

Si $f(x) \leq 2$ ...

D'où $F \leq Kf$.

c) On intègre l'inégalité précédente et la série étant à termes positifs, Beppo Lévi permet d'échanger sigma et intégrale (comme en TD) :

$$\infty > K \int_\Omega f\,d\mu \geq \int_\Omega F\,d\mu = \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (\frac{f}{k})^\alpha \chi_{\{f\leq k\}}\,d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^\alpha} \int_{\{f\leq k\}} f^\alpha\,d\mu.$$

Exercice 3

a) Déjà vu en TD :

On pose $B_k := \bigcup_{l\geq k} A_l$, alors $B_k \searrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_k = \overline{\lim}\, A_l$ et :

$$\mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{l\geq k} A_l\right) \leq \sum_{l\geq k} \mu(A_l) \longrightarrow 0,\ k\longrightarrow\infty,$$

car la série de terme général $\mu(A_l)$ est convergente. Comme $\mu(A_1) \leq \sum_{l\geq 1} \mu(A_l) < \infty$ car la série est convergente, la continuité monotone séquentielle de μ donne

$$\mu(\overline{\lim}\, A_l) = \lim \mu(B_k) = 0.$$

b) Dire que $f_k(\omega)$ tend vers 0 signifie

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ f_k(\omega) < \epsilon.$$

Donc nions cette proposition, $f_k(\omega)$ ne tend pas vers 0 signifie

$$\exists\epsilon > 0,\ \forall N,\ \exists k \geq N,\ f_k(\omega) \geq \epsilon.$$

Ainsi si $f_k(\omega)$ ne tend pas vers 0, il existe $\epsilon > 0$, qui dépend éventuellement de k et une infinité de k tels que $f_k(\omega) \geq \epsilon$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_k(n) := \{\omega \in \Omega,\ f_k(\omega) \geq 1/n\}$, alors dire que la suite $f_k(\omega)$ ne tend pas vers 0 signifie $\exists n\ t.q.\ \omega \in A_k(n)$ pour une infinité de k, donc

$$\exists n \in \mathbb{N}^*\ t.q.\ \omega \in \overline{\lim_{k\longrightarrow\infty}}\, A_k(n) =: B_n.$$

Mais $\mu(B_n) = 0$ par hypothèse ; notons $B := \{\omega \in \Omega\ t.q.\ f_k(\omega) \nrightarrow 0\}$ on a ainsi :

$$B = \bigcup_{n\geq 1} B_n \Longrightarrow \mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) = 0.$$

Autre preuve :

Notons $B := \{\omega \in \Omega\ t.q.\ f_k(\omega) \nrightarrow 0\}$. Si $\omega \in B$ alors $\overline{\lim}\, f_k(\omega) > 0$, donc si on pose $B_n := \{\omega \in \Omega\ t.q.\ \overline{\lim}\, f_k(\omega) > \frac{1}{n}\}$, on a

$$B = \bigcup_{n\geq 1} B_n.$$

D'autre part on a vu (TD) que $B_n = \overline{\lim}\{f_k > \frac{1}{n}\}$ donc, utilisant l'hypothèse et le **a)**, on a que $\mu(B_n) = 0$, et donc $\mu(B) = 0$.

c) On veut montrer que, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a :

$$(*)\ \ \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) > 0\ t.q.\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A f\,d\mu \leq \epsilon.$$

Si $(*)$ est faux cela signifie

$$(**)\ \exists\epsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists A \in \mathcal{A}\ t.q.\ \mu(A) \leq \delta\ et\ \int_A f\,d\mu > \epsilon.$$

Prenons $\delta = 1/n^2$ et posons A_n tel que $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n^2}$ et $\int_{A_n} f\,d\mu > \epsilon$.

Comme $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \infty$, on a que $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$ par le **a)**.

Mais avec $B_k := \bigcup_{n\geq k} A_n$ on a que $B_k \searrow B := \overline{\lim}\, A_n$ donc

$$\int_{B_n} f\, d\mu \geq \int_{A_n} f\, d\mu > \epsilon,$$

et, comme f est positive, $d\nu = f\, d\mu$ est une mesure sur $\mathcal{A}$, et on a

$$\nu(B) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \nu(B_k) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_{B_k} f\, d\mu > \epsilon.$$

Mais $\nu(B) = \int_B f\, d\mu = 0$ car $\mu(B) = 0$ donc contradiction.

d) Soit f intégrable sur $[0,\infty[$ et posons

$$\forall x \in [0,\infty[,\ \ g(x) := \int_0^x f(t)\, dt.$$

On veut montrer que g est uniformément continue, i.e.

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\delta,\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)| < \epsilon.$

On a donc

$$|g(x)-g(y)| = \left|\int_0^x f(t)\, dt - \int_0^y f(t)\, dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\, dt\right|.$$

Mais

$$\left|\int_y^x f(t)\, dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|\, dt.$$

Appliquons ce qui précède avec $d\mu := dt,\ |f|,\ A =]y,x[$ et donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ t.q.\ \mu(A) = \int_y^x dt = |x-y| < \epsilon \Longrightarrow \int_y^x |f(t)|\, dt < \delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)| < \delta,$$

et la conclusion.