UE MHT512
Devoir Maison 1, distribué semaine 40, à rendre semaine 42

Exercice 1. Calculez
$$\lim_{k\to+\infty} k\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+kt}\,dt$$
après avoir cité le théorème de la théorie de l'intégration que vous invoquez et en avoir justifié son utilisation ici.

Exercice 2. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1, Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $\mu\ :\mathcal{T}\longrightarrow[0,\infty]$ une mesure positive.

a. Montrez qu'il existe une constante C telle que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{C}{n^{\alpha-1}}\,,\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}^*\,.$$

b. On considère une fonction $f\ :\Omega\longrightarrow[0,\infty]$ mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{T}$ sur Ω et $\mathcal{B}([0,\infty])$ sur $[0,\infty]$. Montrez que la fonction
$$F=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\Big(\frac{f}{k}\Big)^\alpha\chi_{\{f\le k\}}$$
est aussi mesurable de Ω dans $[0,\infty]$ (relativement à ces mêmes tribus) et qu'il existe une constante K telle que $F\le K\times f$ sur Ω (on comparera ces deux fonctions sur chacun des ensembles $\{f\in[0,1]\}$, $\{1<f\le 2\}$, $\{2<f\le 3\}$,...).

c. Montrez que si f est de plus intégrable relativement à la mesure μ, on a
$$\sum_{k\ge1}\frac{1}{k^\alpha}\int_{\{f\le k\}}f^\alpha\,d\mu\le K\int_\Omega f\,d\mu<+\infty\,.$$

Exercice 3.

a. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, et $(A_k)_{k\ge1}$ une collection d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrez que si la série $[\mu(A_k)]_{k\ge1}$ est convergente, l'ensemble
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{l\ge k}A_l$$
est négligeable relativement à la mesure μ.

b. On considère une suite de fonctions positives $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$ mesurables $(f_k)_{k\geq 1}$ telles que, pour tout $\epsilon > 0$, la série

$$\Big[\mu(f_k > \epsilon)\Big]_{k\geq 1}$$

soit convergente. Vérifiez (en utilisant le **a**) que l'ensemble des points ω de Ω où $f_k(\omega)$ ne tend pas vers 0 est négligeable relativement à la mesure μ.

c. On suppose que $f\ : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ est une fonction $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$ mesurable intégrable relativement à une mesure positive $\mu\ : \mathcal{T} \to [0,\infty]$. Montrez (en utilisant un raisonnement par l'absurde qui fera appel à la conclusion du **a**) que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall\, A \in \mathcal{T}\,, \qquad \Big(\mu(A) \leq \delta(\epsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\int_A f\, d\mu := \int f\chi_A\, d\mu \leq \epsilon\Big)$$

(vous commencerez par nier cette assertion pour attaquer votre raisonnement par l'absurde).

d. Soit $f\ : [0,\infty[\longmapsto [0,\infty]$ une fonction mesurable de $[0,\infty[$ dans $[0,\infty]$ (par rapport aux tribus boréliennes) et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dt (restreinte à $[0,\infty[$). Vérifiez (en utilisant **c**) que la fonction

$$x \in [0,\infty[\longmapsto \int_{[0,x]} f(t)\, dt$$

est uniformément continue par rapport à x (vous rappellerez auparavant ce que l'on entend par là).