Université Bordeaux 1, 2009–2010. Intégration
M. Zarrabi

Corrigé du devoir maison n^o 1.

Exercice 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré avec* $\mu(\Omega) = 1$*. Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. On dit que* (f_n) *converge presque partout vers 0 sur* Ω *s'il existe* $A \subset \Omega$ *mesurable tel que* $\mu(A) = 1$ *et* $(f_n)_n$ *converge simplement vers 0 sur* A*. On dit que* $(f_n)_n$ *converge presque uniformément vers 0 sur* Ω *si pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $A \subset \Omega$ *mesurable tel que* $\mu(A) \geq 1 - \epsilon$ *et* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A*.*

1) Soit $(A_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que pour tout* n*,* $\mu(A_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$*.*
a) Montrer que $\mu(\cup_n A_n) = 1$*.*

Pour tout n, $A_n \subset \cup_k A_k \subset \Omega$. Comme μ est croissante, $1 - 1/n \leq \mu(A_n) \leq \mu(\cup_k A_k) \leq 1$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\mu(\cup_k A_k) = 1$.

b) Montrer que si $(f_n)_n$ *converge uniformément vers 0 sur* Ω*, alors* $(f_n)_n$ *converge presque partout vers 0 sur* Ω*.*

La convergence uniforme sur Ω entraine la convergence simple sur Ω et en particulier la convergence presque partout.

Remarque : La réponse à cette question est assez simple. En fait il y 'a un oubli du mot "presque" dans la question ; il fallait écrire :

Montrer que si $(f_n)_n$ *converge presque uniformément vers 0 sur* Ω*, alors* $(f_n)_n$ *converge presque partout vers 0 sur* Ω*.*

Pour répondre à cette question, on procède de la façon suivante : Pour tout $k \geq 1$, il existe $A_k \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_k) \geq 1 - 1/k$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_k.
Soit $x \in \cup_n A_n$. Il existe n tel que $x \in A_n$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_n, $(f_n(x))_n$ converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\cup_n A_n$, et d'après le a), $\mu(\cup_k A_k) = 1$, ce qui montre que $(f_n)_n$ converge vers 0 presque partout.

2) *On suppose que* $(f_n)_n$ *converge presque partout vers 0 sur* Ω*. On note*

$$A_{N,p} = \bigcap_{n \geq N} \left\{ |f_n| \leq \frac{1}{p} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*.$$

a) Vérifier que pour tout N, p, $A_{N,p} \in \mathcal{A}$ et que $\mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) = 1$.

Comme f est mesurable, $|f|$ est aussi mesurable et donc $\left\{|f_n| \leq \frac{1}{p}\right\} \in \mathcal{A}$. D'où $A_{N,p} \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable d'ensembles dans $\mathcal{A}$.
Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 1$ et $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur A. Soit $x \in A$ et soit $p \geq 1$. Il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq 1/p$. Il existe donc N tel que $x \in \bigcap_{n\geq N} \left\{|f_n| \leq \frac{1}{p}\right\} = A_{N,p}$, ce qui montre que $A \subset \cup_{N\geq 1} A_{N,p}$. D'où $\mu(A) \leq \mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) \leq 1$, et par conséquent $\mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) = 1$.

b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_p = N_p(\epsilon) \geq 1$ tel que $\mu(A_{N_p,p}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^p}$.

Soit p fixé. Pour tout N on a $A_{N,p} \subset A_{N+1,p}$ et donc la suite $(A_{N,p})_N$ est croissante. Par conséquent $\lim_{N\to+\infty} \mu(A_{N,p}) = \mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) = 1$. D'où l'existence de $N_p \geq 1$ tel que $\mu(A_{N_p,p}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^p}$.

c) On note $A_\epsilon = \cap_{p\geq 1} A_{N_p,p}$. Montrer que $\mu(A_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$.

$$\mu(\Omega \backslash A_\epsilon) = \mu\left(\cup_{p\geq 1}\left(\Omega \setminus A_{N_p,p}\right)\right) \leq \sum_{p\geq 1} \mu(\Omega \backslash A_{N_p,p}) = \sum_{p\geq 1} (1 - \mu(A_{N_p,p}) \leq \sum_{p\geq 1} \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon.$$

D'où $\mu(A_\epsilon) = 1 - \mu(\Omega \setminus A_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$.

d) En déduire que $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω (Théorème d'Egorov).

D'après c) il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_ϵ. Remarquons d'abord que pour tout $p \geq 1$,
$A_\epsilon \subset A_{N_p,p} = \bigcap_{n\geq N_p} \left\{|f_n| \leq \frac{1}{p}\right\}$. Donc pour tout $p \geq 1$, il existe N_p tel que pour tout $n \geq N_p$ et pour tout $x \in A_\epsilon$, $|f_n(x)| \leq 1/p$. Ceci entraine que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_ϵ.

Exercice 2. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, qui n'est pas presque partout constante. On veut démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mu(f \leq \alpha) > 0 \quad \textit{et} \quad \mu(f > \alpha) > 0.$$

Soit

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \ \mu(f \leq a) > 0\} \quad \textit{et} \quad B = \{a \in \mathbb{R} : \ \mu(f > a) > 0\}.$$

1) Montrer que A et B sont non vides.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \{x \in X;\ f(x) \leq n\} \text{ et } V_n = \{x \in X;\ f(x) \geq -n\}.$$

Les suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ sont croissantes pour l'inclusion. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \mu(U_n) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(X) > 0$. Donc il existe n tel que $\mu(U_n) > 0$, ce qui signifie que $n \in A$.
De même on a $\lim_{n\to+\infty} \mu(V_n) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n) = \mu(X) > 0$ et donc il existe un $n \in B$.

2) Montrer que A (resp. B) est de la forme $[\alpha, +\infty]$ ou $]\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \beta]$ ou $]-\infty), \beta[$), où α et β sont des réels.

Soit $a \in A$. Pour tout $a' \geq a$, on a $(f \leq a') \supseteq (f \leq a)$, $\mu(f \leq a') \geq \mu(f \leq a) > 0$ et par conséquent $a' \in A$. Donc A est bien un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$, où $\alpha = \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
De même si $a \in B$ et $a' \leq a$, on a $\mu(f > a') \geq \mu(f > a) > 0$ et donc $a' \in B$, ce qui montre que B est un intervalle de la forme $]-\infty, \beta]$ ou $]-\infty, \beta[$, où $\beta = \sup B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3) Montrer que si $A \cap B = \emptyset$ alors $\alpha = \beta$ et $f = \alpha$ presque partout. Conclure.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\mu(f \leq a) + \mu(f > a) = \mu(X) > 0$. Donc $\mu(f \leq a) > 0$ ou $\mu(f > a) > 0$, ce qui signifie que $a \in A \cup B$. D'où $\mathbb{R} = A \cup B$.
Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Comme A et B sont des intervalles non vides, qui forment une partition de $\mathbb{R}$, on a $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \geq 1$, $\alpha - 1/n \notin A$, soit $\mu(f \leq \alpha - 1/n) = 0$. Comme la suite $((f \leq \alpha - 1/n))_n$ est croissante, on a $\mu(f < \alpha) = \lim_{n\to+\infty} \mu(f \leq \alpha - 1/n) = 0$. D'autre part, on a $\mu(f > \alpha) = \lim_{n\to+\infty} \mu(f > \alpha + 1/n) = 0$, puisque la suite $((f > \alpha + 1/n))_n$ est croissante et $\alpha + 1/n \notin B$. Donc $\mu(f \neq \alpha) = \mu(f < \alpha) + \mu(f > \alpha) = 0$, ce qui veut dire que $f = \alpha$ μ-presque partout.
Conclusion : On a vu que si $A \cap B = \emptyset$, alors f est presque partout constante, ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Donc $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $\alpha \in A \cap B$, on a bien

$$\mu(f \leq \alpha) > 0 \text{ et } \mu(f > \alpha) > 0.$$

Exercice 3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to [0, +\infty]$ une application mesurable. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions finies $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_p\}$ de Ω, où $C_1, \ldots, C_p$ sont dans $\mathcal{A}$. Pour $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_p\}$ appartenant à $\mathcal{P}$ on pose :*

$$S_{\mathcal{C}}(f) = \sum_{j=1}^{p} \mu(C_j) \inf\{f(x),\ x \in C_j\} \quad \textit{et} \quad I(f) = \sup\{S_{\mathcal{C}}(f),\ \mathcal{C} \in \mathcal{P}\}.$$

1) Montrer que $I(f) \leq \int f d\mu$.

Soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\} \in \mathcal{P}$. On a

$$(\inf_{C_j} f)\chi_{C_j} \leq f\chi_{C_j} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} (\inf_{C_j} f)\chi_{C_j} \leq \sum_{j=1}^{p} f\chi_{C_j} = f,$$

où χ_{C_j} est la fonction caractéristique de C_j. D'où $\int \left(\sum_{j=1}^{p} (\inf_{C_j} f)\chi_{C_j} \right) d\mu \leq \int f d\mu$, soit $S_{\mathcal{C}}(f) \leq \int f d\mu$. En prenant le sup sur $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$, on obtient l'inégalité $I(f) \leq \int f d\mu$.

2) Si $f(E)$ est un ensemble fini, montrer que $I(f) = \int f d\mu$.

Si $f(E)$ est fini alors f prend un nombre fini de valeurs $a_1, \dots, a_p$ deux à deux distincts. On pose $C_j = \{x \in \Omega,\ f(x) = a_j\} = f^{-1}(\{a_j\} \in \mathcal{A}$. On a $f = \sum_{j=1}^{p} a_j \chi_{C_j}$ et $S_{\mathcal{C}}(f) = \sum_{j=1}^{p} a_j \mu(C_j) = \int f d\mu$, où $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\} \in \mathcal{P}$. D'où $I(f) \geq \int f d\mu$. D'après 1) on a l'égalité $I(f) = \int f d\mu$.

3) Montrer que $I(f) = \int f d\mu$.

D'après 1) il suffit de prouver $\int f d\mu \leq I(f)$. On a

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \sup \left\{ \int \varphi d\mu;\ \varphi \text{ étagée et } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \\
&= \sup\{ I(\varphi);\ \varphi \text{ étagée et } 0 \leq \varphi \leq f \} \\
&\leq I(f).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que si $\varphi \leq f$ alors $I(\varphi) \leq I(f)$.