PIN401 -Corrigé de l'Examen du 21 mai 2005

-1-

1 ° - On obtient

$$x + y + az \; = \; -\frac{ln(\mu)}{k_0 L} \; = \; \beta \; .$$

2 ° - La matrice est

$$A \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

de déterminant $Det(A) = (b-1)\,(1-a)$.

3 ° - On obtient

$$x = \frac{q_0 - 1}{b - 1} \quad , \quad z = \frac{1-\beta}{1-a} \quad , \quad puis \; y = \frac{1 - ab - q_0(1-a) + \beta(b-1)}{(b-1)\,(a-1)} \quad .$$

4 ° - On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \; = \; 3 \; \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad donc \; Det(A - 3I) = 0 \; ,$$

car $x_0 \neq 0$. La valeur $\lambda = 3$ est bien valeur propre de A, et le vecteur de composantes x_0, y_0, z_0 est un vecteur propre associé.

5 ° - On calcule $Det(A - 3I) = (b-4)\,(3-a) + b + 5$ qui est nul, donc

$$a \; = \; \frac{4b - 7}{b - 4} \quad , \quad ou \quad b \; = \; \frac{4a - 7}{a - 4} \; .$$

6 ° - Si $a = \frac{4}{5}$ alors $b = \frac{19}{16}$. Dans ce cas,

$$Det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{14}{5}\lambda^2 + \frac{47}{80}\lambda + \frac{3}{80} \; = \; (\lambda - 3)\left(-\lambda^2 - \frac{\lambda}{5} + \frac{1}{80}\right) \; .$$

Les deux autres racines sont $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{20}$.

7 ° - La matrice A est diagonalisable, et les termes sur la diagonale sont les valeurs propres 3 , $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{20}$.

1 ° - Si $u, v \in V_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u(0) + \mu v(0) = \lambda u(1) + \mu v(1) = 0$. Ainsi V_0 est bien un sous espace vectoriel de $C^0([0,1])$.
2 ° - Etant continue, chaque fonction $\phi_j \in C^0([0,1])$ et deplus $\phi_j(0) = \phi_j(1) = 0$ pra construction, d'où $\phi_j \in V_0$ pour $j = 1, .., N$.
3 ° - On calcule $\phi_j(x_k) = Max(0, 1 - |j-k|)$ qui vaut 1 si $j = k$, et 0 sinon.
4 ° - Les fonctions ϕ_j constituent un système libre, donc $dim(V_h) = N$.
5 ° - On prend $x = x_k$. Alors $f_h(x_k) = \sum_{j=1}^N f(x_j)\phi_j(x_k) \ = \ f(x_k)$.
6 ° - En $x = x_k$, on a

$$\int_0^1 K(x_k - t) \left(\sum_{j=1}^N u_j \phi_j(t) \right) dt \ = \ \sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 K(x_k - t)\phi_j(t) \ dt \ = \ \sum_{j=1}^N A_{kj} u_j \ ,$$

d'où le système

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_N \end{pmatrix} .$$

7 ° - La formule des trapèzes donne

$$\int_0^1 v(t)dt = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(t)dt \ \simeq \ \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (v(x_j) + v(x_{j+1})) \ = \ h \sum_{j=1}^N v(x_j) \ .$$

8 ° - Résultat évident car v est affine sur chaque élément $[x_j, x_{j+1}]$ et donc la formule des trapèzes associée est exacte.
9 ° - On calcule

$$A_{kj} = h \sum_{i=1}^N K(x_k - x_i)\phi_j(x_i) \ = \ hK(x_k - x_j)$$

qui est bien symétrique ($A_{kj} = A_{jk}$) si K est une fonction paire.
10 ° - Dans ce cas, $K(x_j - x_k) \ = \ 0$ si $j > k$ et donc $A_{kj} = 0$ si $j > k$.
11 ° - On trouve

$$A_{kj} \ = \ h \ e^{-(j-k)^2 h^2}.$$

La méthode de Gauss Seidel a été détaillée en cours.