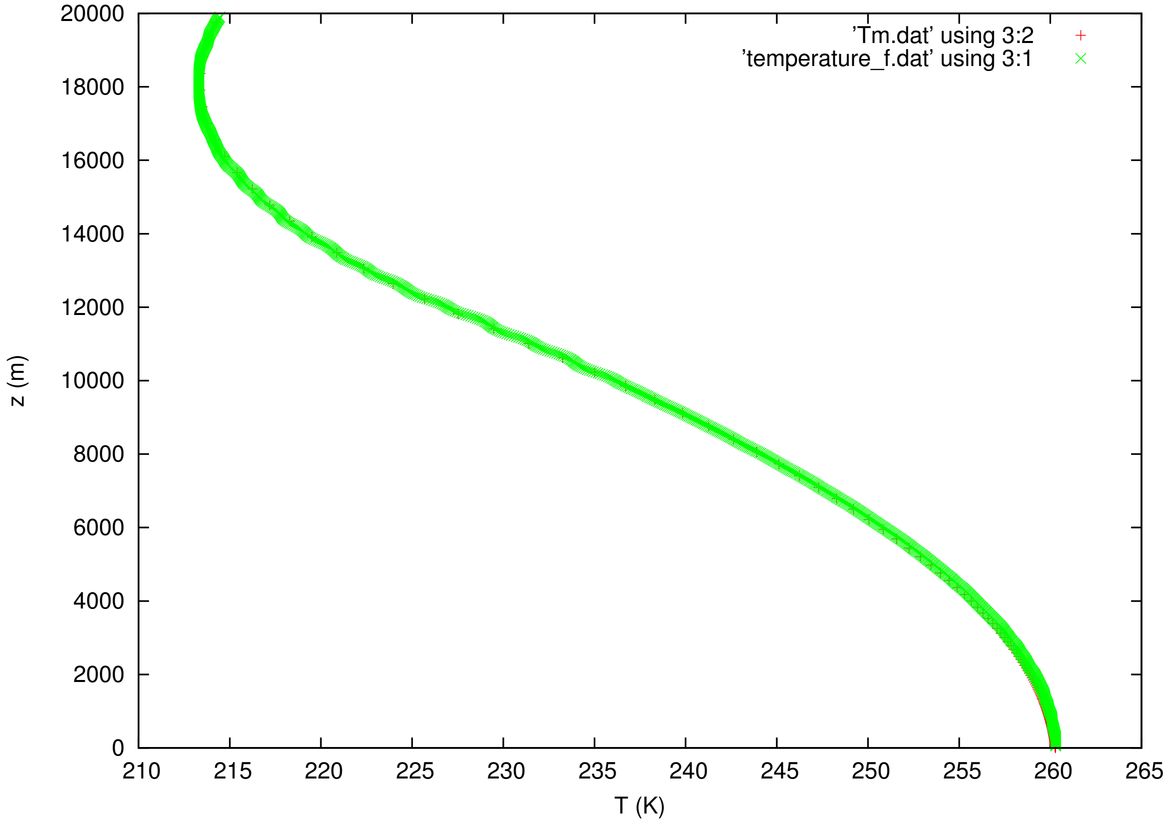
Année : 2004/2005
ÉTAPE : Pin401EX
UE : PIN401EX Math. pour Phys.
Date : 3 septembre 2005
De 8 :30 à 11 :30
Documents non autorisés.
Corrigé de l'épreuve de Monsieur LeRoux

-1-

La distribution de température dans la couche atmosphérique correspond à une courbe de la forme ci dessous, obtenue à partir de mesures de radiosondes, en présentant un point d'inflexion situant la tropopause, entre la troposphère (en dessous) et la stratosphère (au dessus).



Le cas présenté ici correspond à une région de latitude assez proche du pôle, la température au sol étant de 260 ° K, soit -13 ° C. Dans une telle région, la tropopause se situe à 10 km d'altitude environ. Nouns utiliserons ici une unité correspondant à une hauteur de 10 km, de façon à travailler sur l'intervalle $[0, 2]$, la tropopause se situant au milieu de l'intervalle, en $x = 1$.

Le but de ce problème est d'approcher cette courbe en n'utilisant qu'un nombre réduit de paramètres. On constate d'abord qu'il n'y a pas de symétrie par rapport à la valeur au milieu, en

$x = 1$, ce qui exclut la représentation par un polynôme de degré 3. On s'intéresse à l'espace H constitué des fonctions v définies sur l'intervalle $[0, 2]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$v \in C^1([0,2]) \;\; ,$$
$$v \textit{ est un polynôme de degré } \leq 2 \textit{ sur } [0,1],$$
$$v \textit{ est un polynôme de degré } \leq 2 \textit{ sur } [1,2] \;\; .$$

1 ° - Montrer que H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'espace H est un sous espace vectoriel de $C^1([0, 2])$. En effet, si u et v sont des éléménts de H et λ, μ deux réels, on a bien $\lambda u + \mu v \in C^1([0, 2])$, et $\lambda u + \mu v$ est bien un polynôme de degré ≤ 2 sur $[0, 1]$ et aussi sur $[1, 2]$.

2 ° - Montrer que H est de dimension 4. Indication : on posera

$$v(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{lll} a \;+\; b(x-1) \;+\; c(x-1)^2 & & si\ 0 < x < 1 \;, \\ a' \;+\; b'(x-1) \;+\; d(x-1)^2 & & si\ 1 < x < 2 \;. \end{array} \right.$$

et on cherchera une relation entre a et a' puis une autre relation entre b et b'.

La continuité impose $a = a'$, et la continuité de la dérivée impose $b = b'$.

3 ° - On considère les fonctions $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ définies sur $[0, 2]$ par :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 \; (fonction\ constante) \\ v_2(x) &= \sqrt{5}\ (x-1)^2 \\ v_3(x) &= \sqrt{3}\ (x-1) \\ v_4(x) &= \sqrt{5}\ (x-1)\ |x-1| \;. \end{aligned}$$

Le choix des constantes a pour but de faciliter les calculs plus loin. Montrer que ces quatre fonctions constituent une base de H.

Il reste à montrer l'indépendance linéaire. On considère un élémént de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$, et on écrit que pour tout x,

$$\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x) + \lambda_3 v_3(x) + \lambda_4 v_4(x) \;=\; 0$$

En faisant $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Ensuite, en divisant par $\sqrt{5}(x-1)$, il reste

$$\lambda_2\,(x-1) + \;\lambda_3 \sqrt{\frac{3}{5}} \;+\; \lambda_4\,|x-1| \;=\; 0 \;.$$

On fait $x = 1$ pour établir $\lambda_3 = 0$, puis $x = 0$ et $x = 2$ pour obtenir le système $-\lambda_2 + \lambda_4 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_4 = 0$, d'où $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.

4 ° - On considère la matrice A dont les coefficients sont définis par

$$a_{ij} \;=\; \int_0^2 \; v_i(x)\; v_j(x)\; dx \qquad (i, j \in \{1, 2, 3, 4\}) \;.$$

La matrice A est-elle symétrique ?

Evidemment, le produit $v_i(x)\ v_j(x)$ étant commutatif.

5 ° - Calculer les coefficients a_{ij}, pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, et écrire la matrice A.

On obtient $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 2$, et par des arguments de symétrie,

$$a_{13} = a_{31} = a_{14} = a_{41} = a_{23} = a_{32} = a_{24} = a_{42} = 0 \ .$$

On calcule ensuite $a_{12} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ et $a_{34} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

6 ° - Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et en déduire les valeurs propres de A, ainsi que ses vecteurs propres.

On calcule $Det \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - \alpha^2$, dont les racines sont $\lambda_1 = 2 - \alpha$ et $\lambda_2 = 2 + \alpha$, d'où les valeurs propres. Les vecteurs propres correspondants sont $R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7 ° - Calculer le déterminant de A.

En utilisant la question précédente, vu la structure de la matrice, les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\ ,\ \lambda_2 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}\ ,\ \lambda_3 = 2 - \frac{\sqrt{15}}{2}\ ,\ \lambda_4 = 2 + \frac{\sqrt{15}}{2}\ ,$$

dont les produit vaut

$$\left(4 - \frac{20}{9}\right)\left(4 - \frac{15}{4}\right) = \frac{4}{9}\ .$$

8 ° - En considérant les rapports entre ces valeurs propres, peut-on condidérer que cette matrice soit bien conditionnée ?

La plus petite valeur propre est λ_3 et la plus grande est λ_4. Le rapport $\frac{\lambda_4}{\lambda_3}$ étant proche de 62, ce qui est très grand pour une matrice 4×4, la matrice est mal conditionnée.

9 ° - Les mesures des radiosondes fournissent des données que l'on convertit sous la forme d'une fonction f définie et intégrable sur $[0, 2]$. On cherche alors une fonction $v \in H$ réalisant

$$\underset{u \in H}{Inf} \int_0^2 |u(x) - f(x)|^2\, dx = \int_0^2 |v(x) - f(x)|^2\, dx.$$

Pour cela, on écrit v sous la forme

$$v(x) = \beta_1 v_1(x) + \beta_2 v_2(x) + \beta_3 v_3(x) + \beta_4 v_4(x)\ .$$

Montrer que le vecteur X de composantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ est la solution du système linéaire

$$A\ X = F,$$

où F est le vecteur de composantes f_1, f_2, f_3, f_4 données par

$$f_i \;=\; \int_0^2 \; f(x)\; v_i(x)\; dx \quad .$$

Il s'agit d'une application directe du cours sur les projections.

10 ° - Résoudre ce système lorsque la valeurs des mesures donnent

$$f_1 = 471.49071 \;,\; f_2 = 352.31732 \;,\; f_3 = -32.7621 \;,\; f_4 = \; -30.221767 \;.$$

On obtient $\beta_1 = 235,\; \beta_2 = 1,\; \beta_3 = -28,\; \beta_4 = 12.$

11 ° - Quelle est la valeur obtenue pour la température au sol ?
On obtient $v(0) \;=\; \beta_1 + \sqrt{5}\;\beta_2 - \sqrt{3}\;\beta_3 - \sqrt{5}\;\beta_4 = 258.9\; K$ en faisant $x = 0$.

12 ° - On observe que ce n'est pas exactement la valeur attendue, et comme la mesure d'une température au sol est très facile à réaliser directement, on va remplacer une des quatre équations précédentes, par exemple la dernière par une équation liant les coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ et la température au sol mesurée (ici 260 ° K). Ecrire cette équation.
Il s'agit de $\beta_1 + \sqrt{5}\;\beta_2 - \sqrt{3}\;\beta_3 - \sqrt{5}\;\beta_4 = 260$.

13 ° - Résoudre le nouveau système ainsi obtenu (on notera M sa matrice).
Les valeurs de β_1 et de β_2 sont inchangées. Il reste à résoudre le système de deux équations $-\sqrt{3}\;\beta_3 \;-\; \sqrt{5}\;\beta_4 \;=\; 260 \;-\; \beta_1 \;-\; \sqrt{5}\beta_2 \;\;,\;\; 2\;\beta_3 \;+\; \frac{\sqrt{15}}{2}\;\beta_4 \;=\; -32.7621$, ce qui donne $\beta_3 = -26.096$, $\beta_4 = 10.03347$. On observe une nette variation avec les résultats précédents, ce qui illustre le mauvais conditionnement de la matrice.

14 ° - Ecrire la décomposition de Cholesky pour A. Cette décomposition est-elle encore possible pour M ?
On a

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

On en déduit $A = LDL'$, avec

$$L \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad .$$