Formule d'Ogg d'après Saito

Qing LIU

Soit K un corps de valuation discrète hensélien, à corps résiduel algébriquement clos. Soit C une courbe elliptique sur K. La formule d'Ogg dit que le discriminant minimal $\nu(\Delta)$ de C vérifie l'égalité

$$\nu(\Delta) = n - 1 + f \tag{1}$$

où f est le conducteur de C (en tant que variété abélienne), et n est le nombre de composantes irréductibles de la fibre spéciale X_s du modèle régulier minimal X de C sur l'anneau de valuation $\mathcal{O}_K$ de K.

Ogg [1] a vérifié (1) cas par cas, excepté quand K est d'inégale caractéristique 2 où aucune démonstration n'est donnée. Une preuve complète et plus conceptuelle de (1) sera trouvée par Takeshi Saito [2] en 1987, comme corollaire d'un résultat plus général sur les conducteurs d'Artin de courbes de genre $g \geq 1$.

On présente ici la preuve de (1) par Saito ([2], Cor. 2) avec plus de détails (§3 – §4).

§1 Notations

Dans toute la suite, K sera un corps de valuation discrète hensélien, à corps résiduel algébriquement clos. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau de valuation, ν la valuation normalisée de K (*i.e.* $\nu(\text{uniformisante}) = 1$), et $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Soit C une courbe propre lisse géométriquement connexe sur K de genre $g \geq 1$, on note $f : X \to S$ le modèle régulier minimal de C.

§2 Conducteurs

Pour un nombre premier l différent de la caractéristique résiduelle de K, on a une représentation galoisienne l-adique

$$\rho : \operatorname{Gal}(\overline{K}/K) \to \operatorname{Aut}_{\mathbb{Q}_l} V_l$$

où $V_l = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$. On associe deux entiers ε (conducteur modéré) et δ (conducteur de Swan) à cette représentation ([3], §2.1), et on pose $f = \varepsilon + \delta$. Par définition, le conducteur d'Artin de X est

$$\operatorname{Art}(X/S) = \chi(X_{\overline{\eta}}) - \chi(X_s) - \delta$$

où χ est la caractéristique d'Euler pour la topologie étale. C'est un entier négatif. Lorsque le pgcd des multiplicités des composantes de X_s est 1, on a

$$-\operatorname{Art}(X/S) = n - 1 + f \tag{2}$$

où n est le nombre de composantes irréductibles de X_s ([4], prop. 1). La condition sur le pgcd des multiplicités est remplie si (par exemple) $C(K) \neq \emptyset$ ou si $g = 2$.

§3 Le conducteur comme mesure de dégénérescence

Soit $h : Y \to T$ un morphisme propre lisse à fibres géométriques connexes de genre $g \geq 1$. Alors on dispose d'un isomorphisme canonique commutant au changement de base :

$$\Delta_{Y/T} \ : \ \det Rh_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2}) \simeq (\det Rh_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13} \tag{3}$$

(*cf.* [5], theorem 5.10 pour $g \geq 2$, et Deligne (non publié) pour $g \geq 1$; voir une construction explicite au §4 pour $g = 1$).

Soit $\omega_{X/S}$ le faisceau dualisant relatif de X. C'est un faisceau inversible sur X et on a $\omega_{X/S}|_C \simeq \omega_{C/K}$. Notons

$$M = \mathrm{H}^0(S, \det Rf_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2}))$$

$N = \mathrm{H}^0(S, (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 13})$, ce sont des $\mathcal{O}_K$-modules libres de rang 1. On applique l'isomorphisme (3) avec $T = \operatorname{Spec} K$ et $Y = C$. Il existe donc un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que l'isomorphisme $\Delta_{C/K} : M \otimes K \to N \otimes K$ induise une identité

$$\Delta_{C/K}(M) = (\text{uniformisante de } \ \mathcal{O}_K)^d N$$

On note $\operatorname{ord} \Delta_{X/S} = d$. Dire que $\operatorname{ord} \Delta_{X/S} \geq 0$ équivaut à dire que $\Delta_{C/K}$ s'étend en un homomorphisme

$$\Delta_{X/S} \ : \ \det Rf_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2}) \to (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 13}$$

et $\operatorname{ord} \Delta_{X/S} = 0$ équivaut à $\Delta_{X/S}$ est un isomorphisme.

Théorème ([2], theorem 1). *Avec les notations ci-dessus, on a* $\operatorname{ord} \Delta_{X/S} = -\operatorname{Art}(X/S)$.

Cela était connu lorsque $X \to S$ est semi-stable (Deligne ou [5], *loc. cit.*), Saito l'a montré dans le cas général en montrant que les deux membres de l'égalité “se comportent de la même manière” vis-à-vis des extensions finies de K. On peut donc dire que $-\operatorname{Art}(X/S)$ mesure le dégénérescence de l'isomorphisme $\Delta_{C/K}$.

§4 Le cas elliptique

Soit $h : Y \to T$ une courbe propre lisse à fibres géométriques de genre 1. On va d'abord décrire plus concrètement l'isomorphisme (3).

Comme l'homomorphisme canonique $h^*h_*\omega_{Y/T} \to \omega_{Y/T}$ est un isomorphisme, et que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $(\omega_{Y/T})_t$ est nulle pour tout $t \in T$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\det Rh_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2}) &\simeq \det Rh_*(\omega_{Y/T} \otimes h^*h_*\omega_{Y/T}) \\
&\simeq (\det Rh_*\omega_{Y/T}) \otimes (h_*\omega_{Y/T})^{\otimes 0} \\
&\simeq \det Rh_*\omega_{Y/T}
\end{aligned}$$

On a donc un isomorphisme canonique

$$\delta_{Y/T} \;:\; \det Rh_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2}) \simeq \det Rh_*\omega_{Y/T} \tag{4}$$

Supposons que $h : Y \to T$ admet une section. Pour tout $t \in T$, en remplaçant T par un voisinage ouvert affine de t assez petit, on peut écrire des équations affines

$$y^2 + Q(x)y = P(x), \quad Q(x), P(x) \in \mathcal{O}_T(T)[x]$$

de Y avec $\deg Q(x) \leq 1$ et $\deg P(x) \leq 3$ (on peut utiliser [6], §1). On peut associer à cette équation son discriminant Δ et une différentielle holomorphe $\omega = (2y + Q(x))^{-1}dx$ sur Y. Il est aisé de voir que $\Delta \cdot \omega^{\otimes 12}$ est un élément de $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/T})^{\otimes 12}$ indépendant du choix de la section et de l'équation. Cela permet de définir un isomorphisme canonique

$$\Delta'_{Y/T} \;:\; \mathcal{O}_T \simeq (h_*\omega_{Y/T})^{\otimes 12}$$

qui envoit 1 sur $\Delta \cdot \omega^{\otimes 12}$. Dans le cas général, on obtient une section de h après un changement de base étale surjectif $T' \to T$ (EGA, IV, 17.16.3). Il est facile de voir que l'isomorphisme $\Delta'_{Y \times T'/T'}$ provient d'un isomorphisme $\Delta'_{Y/T}$ au niveau de T. Par ailleurs, on a canoniquement $(R^1h_*\omega_{Y/T})^\vee \simeq \mathcal{O}_T$, donc $\det Rh_*\omega_{Y/T} \simeq \det h_*\omega_{Y/T} = h_*\omega_{Y/T}$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_T \simeq (\det Rh_*\omega_{Y/T})^{\otimes 12}$$

qui induit un isomorphisme canonique que l'on note encore par $\Delta'_{Y/T}$

$$\Delta'_{Y/T} \;:\; \det Rh_*\omega_{Y/T} \simeq (\det Rh_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13} \tag{5}$$

D'où un isomorphisme canonique

$$\Delta'_{Y/T} \circ \delta_{Y/T} \;:\; \det Rh_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2}) \simeq (\det Rh_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13}$$

On trouve donc l'isomorphisme de (3) : $\Delta_{Y/T} = \Delta'_{Y/T} \circ \delta_{Y/T}$ au signe près.

Par conséquent, si C est une courbe propre lisse de genre 1, et si l'on définit les ord comme dans §3, alors

$$\operatorname{ord} \Delta_{X/S} = \operatorname{ord} \Delta'_{X/S} + \operatorname{ord} \delta_{X/S} \tag{6}$$

Supposons maintenant que C est une courbe elliptique. Soit $\mathcal{N}$ son modèle de Néron sur S. On sait que $\mathcal{N}$ est isomorphe à la partie lisse X_{lisse} de X. Le lemme suivant est bien connu et résulte de la construction de $\mathcal{N}$ par Néron [7]. Nous proposons ici une démonstration plus directe.

Lemme (Néron [7]). – *Soit*

$$y^2 + (a_1x + a_3)y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad a_i \in \mathcal{O}_K \tag{7}$$

une équation de Weierstrass minimale de C. Elle induit un modèle projectif normal W de C sur S. Alors la désingularisation minimale de W est isomorphe à X. Autrement dit, la partie lisse W_{lisse} de W est isomorphe à la composante neutre $\mathcal{N}^\circ$ de $\mathcal{N}$.

Preuve. – Par définition,

$$W = \operatorname{Proj} \mathcal{O}_K[x,y,z]/(y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 - (x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3))$$

Comme W est à fibre générique lisse et à fibre spéciale réduite, il est normal. On va reconstituer W à partir de X.

Soit Γ_0 la composante irréductible de X_s qui contient la spécialisation de l'élément neutre de C. Soit F la réunion des autres composantes irréductibles de X_s. Il existe un schéma normal projectif X_1 sur S et un morphisme projectif $\pi : X \to X_1$ tel que $\pi(F)$ soit fini et que $\pi|_{X-F}$ soit un isomorphisme ([8], §6.7). Il s'agit de montrer que $X_1 \simeq W$.

Soit e la section de $X_1 \to S$ induite par l'élément neutre de C, alors $X_1 - e$ est un schéma affine défini par une équation

$$u^2 + (b_1v + b_3)u = v^3 + b_2v^2 + b_4v + b_6, \quad b_i \in \mathcal{O}_K \tag{8}$$

([6], *loc. cit.*). L'homogeneisée de cette équation est une équation de X_1 dans $\mathbb{P}^2_S$. Il suffit de montrer que l'équation (8) est minimale.

Pour toute composante irréductible $\Gamma \neq \Gamma_0$ de X_s, on a $p_a(\Gamma) = 0$ et $\Gamma^2 = -2$. Il suit que les singularités de X_1 sont rationnelles ([9], Theorem 27.1). En particulier, $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}) = \mathrm{H}^0(X_1, \omega_{X_1/S})$ en tant que sous groupes de $\mathrm{H}^0(C, \omega_{C/K})$. Comme X_1 est une intersection complète dans $\mathbb{P}^2_S$, il est facile de voir que $\omega_{X_1/S} = \omega_1\mathcal{O}_{X_1}$, où $\omega_1 = dv/(2u+b_1v+b_3)$. De même, $\omega_{W/S} = \omega_0\mathcal{O}_W$, où $\omega_0 = dx/(2y+a_1x+a_3)$. On va montrer que $\omega_1 \in \omega_0\mathcal{O}_K$.

Soit $W' \to W$ la désingularisation minimale de W. On a un morphisme $W' \to X$ car X est minimal. Comme X est régulier, tous ses points sont des singularités rationnelles, donc $\omega_1 \in \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}) = \mathrm{H}^0(W', \omega_{W'/S})$. En considérant la restriction de ω_1 à W_{lisse}, on voit que $\omega_1 \in \omega_0\mathcal{O}_K$. Soit Δ (resp. Δ_1) le discriminant de l'équation (7) (resp. de l'équation (8)). Il suit de l'égalité $\Delta\omega_0^{\otimes 12} = \Delta_1\omega_1^{\otimes 12}$ que $\nu(\Delta_1) \leq \nu(\Delta)$. Ce qui prouve que l'équation (8) est minimale.

Théorème (Ogg [1]). *Supposons que C est une courbe elliptique. Soit $\nu(\Delta)$ le discriminant minimal de C. Alors on a $\nu(\Delta) = -\operatorname{Art}(X/S)$.*

Preuve (Saito [2]). Comme $C(K) \neq \emptyset$, l'homomorphisme canonique $f^*f_*\omega_{X/S} \to \omega_{X/S}$ est un isomorphisme et donc $\operatorname{ord}\delta_{X/S} = 0$. Il suit de ce qui précède que $-\operatorname{Art}(X/S) = \operatorname{ord}\Delta'_{X/S}$. Soit

$$y^2 + (a_1x + a_3)y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad a_i \in \mathcal{O}_K$$

une équation de Weierstrass minimale de C, de discriminant Δ. Soit $\omega_0 = dx/(2y+a_1x + a_3)$. On a vu dans la preuve du lemme ci-dessus que ω_0 est une base de $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})$. Comme $X \to S$ est cohomologiquement plat,

$$\Delta'_{X/S} \ : \ \mathcal{O}_S \to (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 12} = \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})^{\otimes 12}$$

est défini par $1 \mapsto \Delta \cdot \omega_0^{\otimes 12}$. Par conséquent, $\nu(\Delta) = \operatorname{ord} \Delta'_{X/S} = -\operatorname{Art}(X/S)$.

Bibliographie

[1] A. P. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. Math. **89** (1967), 1-21.
[2] T. Saito, *Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces*, Duke Math. Jour. **57** (1988), 151-173.
[3] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques*, Séminaire DPP **19** (1969-1970).
[4] Q. Liu, *Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre* 2, à paraître dans Compositio Math..
[5] D. Mumford, *Stability of projective varities*, Enseign. Math. **23** (1977), 39-110.
[6] P. Deligne, *Courbes elliptiques : formulaire d'après J. Tate*, Modular functions of one variable IV, LN 476 (1975).
[7] A. Néron, *Modèles minimaux de variétés abélienne*, Publ. Math. IHES **21** (1964).
[8] S. Bosch, W. Lütkebohmert, et M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.
[9] J. Lipman, *Rational singularities*, Publ. Math. **36** (1969), 195-279.

Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE
e-mail : liu@math.u-bordeaux.fr