Analyse théorique et numérique des équations de la magnétohydrodynamique : application à l'effet dynamo.

Francky Luddens

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI), Université Paris-Sud.

Groupe de travail Méthodes Numériques, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 03/12/2012

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Effet dynamo

Effet dynamo : "génération et entretien d'un champ magnétique par le mouvement d'un fluide conducteur de l'électricité".

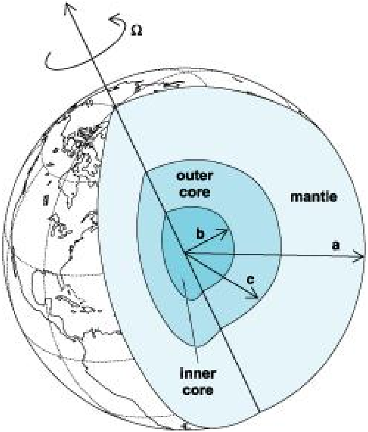
- Fluide incompressible en mouvement $\rightsquigarrow$ équations de Navier-Stokes :

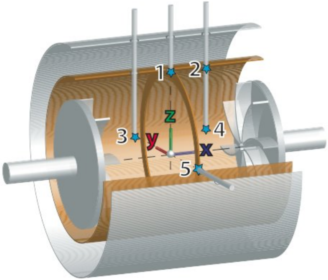
$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} - R_e^{-1} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H} + \mathbf{f}$$

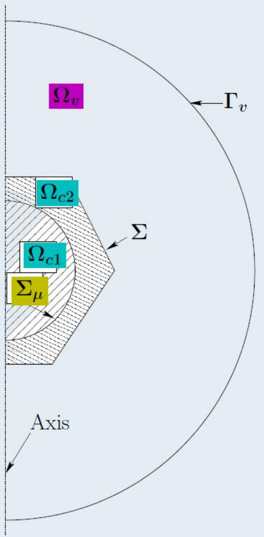
- Fluide conducteur de l'électricité $\rightsquigarrow$ équations de Maxwell :

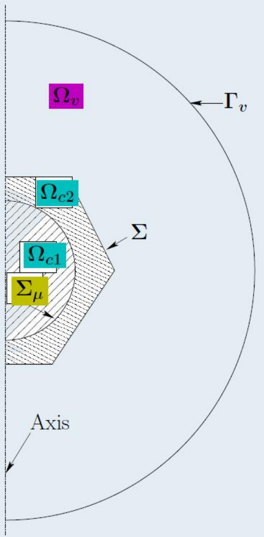
$$\mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = R_m \sigma\, (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j}^s$$

Motivations : géodynamo et expérience Von Kármán Sodium






Ω_v
Γ_v
Ω_{c2}
Σ
Ω_{c1}
Σ_μ
Axis



Sur Ω_c,

$$\mu\partial_t \mathbf{H} + \nabla\times\left(\frac{1}{R_\mathrm{m}\sigma}\right)\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\times\left(\frac{1}{R_\mathrm{m}\sigma}\mathbf{j}^s + \mathbf{u}\times\mu\mathbf{H}\right),$$
$$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}) = 0.$$

Sur Ω_v, $\nabla\times\mathbf{H} = 0 \;\Rightarrow \mathbf{H} = \nabla\phi$,

$$\mu\partial_t\nabla\phi = -\nabla\times\mathbf{E},$$
$$\Delta\phi = 0.$$

Sur Σ_μ,

$$[\![\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\!] = 0,$$
$$[\![\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}]\!] = 0.$$

Sur Σ,

$$[\![\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\!] = 0,$$
$$[\![\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\!] = 0.$$

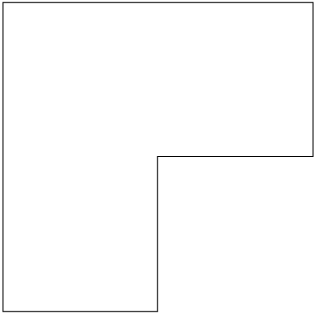
Objectifs

Développer un outil numérique (ou plutôt améliorer un outil numérique) pour résoudre les équations de la MHD, capable de :

- gérer correctement les cas stationnaires,
- gérer correctement les géométries singulières,
- gérer correctement les cas avec sauts de μ,
- calculer correctement le taux de (dé)croissance du champ magnétique, sans mode parasite,
- utiliser des éléments de Lagrange,
- fonctionner en parallèle,
- utiliser le moins d'informations possibles sur Ω.

Plan de la présentation

Exemple de géométrie singulière



$\mathbf{j}^s = 0,\ R_\mathrm{m} = 1,\ \mathbf{u} = 0,\ \Omega = \Omega_c$

$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\lambda t}$

+ conditions de bord homogènes

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\sigma}\nabla\times\mathbf{H}_0\right) = \lambda\mu\mathbf{H}_0$$
$$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}_0) = 0$$
$$\mathbf{H}_0\times\mathbf{n} = 0$$

Problème aux limites

Pour $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, \mu)$, on considère le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{X} \text{ tel que} \\ \nabla\times\left(\sigma^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right) = \mu\mathbf{F} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, \mu) &:= \left\{\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla\cdot(\mu\mathbf{F}) = 0\right\} \\
\mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) &:= \left\{\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla\times\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{F}\times\mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0\right\} \\
\mathbf{X} &:= \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, \mu)
\end{aligned}$$

Formulation variationnelle

Définition d'un opérateur

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \forall \mathbf{b} \in \mathbf{X} \\ (\sigma^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, \nabla \times \mathbf{b}) = (\mu \mathbf{F}, \mathbf{b}) \end{cases}$$

On définit $A\mathbf{F} := \mathbf{H}$.

Formulation variationnelle

Définition d'un opérateur

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{H} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \forall \mathbf{b} \in \mathbf{X} \\ (\sigma^{-1}\nabla\times\mathbf{H}, \nabla\times\mathbf{b}) = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}) \end{array} \right.$$

On définit $A\mathbf{F} := \mathbf{H}$.

- la forme bilinéaire est coercive sur $\mathbf{X}$ $\rightsquigarrow$ A est bien définie.
- $A : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ est un opérateur compact auto-adjoint.
- l'équation sur la divergence EST une contrainte.
- on a un problème aux valeurs propres sur A.
- on cherche à construire une famille d'opérateurs discrets $A_h : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Omega)$.
- la contrainte de divergence nulle est difficilement respectée par les éléments finis de Lagrange.

Construction d'une famille d'opérateurs discrets

Convergence Spectrale (Osborn 1975)

On suppose que

- (convergence ponctuelle) Pour tout $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2$, $\lim_{h\to 0} \|(A_h - A)\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2} = 0$;
- (compacité collective) Pour tout U borné de $\mathbf{L}^2$, $\{A_h\mathbf{F}; \mathbf{F} \in U,\ 0 < h < 1\}$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^2$.

Alors A_h est une approximation spectralement correcte de A.

Construction d'une famille d'opérateurs discrets

Convergence Spectrale (Osborn 1975)

On suppose que

- (convergence ponctuelle) Pour tout $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2$, $\lim_{h\to 0} \|(A_h - A)\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2} = 0$;
- (compacité collective) Pour tout U borné de $\mathbf{L}^2$, $\{A_h\mathbf{F}; \mathbf{F} \in U,\ 0 < h < 1\}$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^2$.

Alors A_h est une approximation spectralement correcte de A.

- En particulier, si A_h converge vers A dans la norme d'opérateurs, on a une approximation spectralement correcte.
- $A : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}^2$ est compact (Bonito et Guermond '09, Bonito, Guermond et L. '12)
- Pour $\mu \equiv 1$, $\sigma \equiv 1$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2$, on a $A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{1/2}$ et $\nabla\times A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{1/2}$.

Cas σ et μ constants

$$\mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mu) := \left\{\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla\cdot(\mu\mathbf{F}) \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Nouvelle formulation

Pour $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, trouver $\mathbf{H} \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mu)$ tel que, $\forall \mathbf{b} \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mu)$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times\mathbf{H}, \nabla\times\mathbf{b}\right) + (\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b})) = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}).$$

Domaines singuliers (Costabel et al., '90)

Si Ω n'est pas convexe et sa frontière n'est pas régulière, l'espace $\mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}^1$ est un sous-espace strict et fermé dans $\mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, 1)$.

Réhabilitation des éléments nodaux

- Bramble, Kolev et Pasciak : contrôler la divergence dans un espace intermédiaire entre $\mathbf{L}^2$ et $\mathbf{H}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ méthode de moindres carrés
- Dauge et Costabel : contrôler la divergence dans un espace de Sobolev à poids
- ajouter $(w_\gamma \nabla\cdot A\mathbf{F}, w_\gamma \nabla\cdot\mathbf{b})$ à la forme bilinéaire (Buffa, Ciarlet et Jamelot, '10)
- $w_\gamma \sim d^\gamma$, avec d la distance aux singularités.
- γ dépend de la régularité du domaine.
- Cette méthode demande des informations a priori sur le domaine.

Schéma numérique

Nouvelle approche : Trouver $A_h\mathbf{E} \in \mathbf{X}_h$, tq $\forall \mathbf{b}_h \in \mathbf{X}_h$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times A_h\mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{b}_h\right) + \langle\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\rangle_{-\alpha} = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}_h),$$

Schéma numérique

Nouvelle approche : Trouver $A_h\mathbf{E} \in \mathbf{X}_h$, tq $\forall \mathbf{b}_h \in \mathbf{X}_h$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times A_h\mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{b}_h\right) + h^{2(\alpha-1)}\langle\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\rangle_{-1} = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}_h),$$

$\mathbf{H}^{-\alpha}$ / $\mathbf{H}^{-1}$, estimation inverse

$$\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-\alpha}} \lesssim h^{2(\alpha-1)}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}}.$$

Schéma numérique

Nouvelle approche : Trouver $A_h\mathbf{E} \in \mathbf{X}_h$, $p_h \in M_h$, tq $\forall(\mathbf{b}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times A_h\mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{b}_h\right) + (\nabla p_h, \mu\mathbf{b}_h) = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}_h),$$
$$(\mu A_h\mathbf{F}, \nabla q_h) - h^{2(1-\alpha)}(\mu\nabla p_h, \nabla q_h) = 0.$$

$\mathbf{H}^{-\alpha}$ / $\mathbf{H}^{-1}$, estimation inverse

$$\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-\alpha}} \lesssim h^{2(\alpha-1)}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}}.$$

$\mathbf{H}^{-1}$ / formulation mixte

$$h^{2(\alpha-1)}\langle\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = -(\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h), \underbrace{h^{2(\alpha-1)}(-\Delta_\mu)^{-1}(-\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}))}_{:=p_h})$$

Schéma numérique

Nouvelle approche : Trouver $A_h\mathbf{E} \in \mathbf{X}_h$, $p_h \in M_h$, tq $\forall(\mathbf{b}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times A_h\mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{b}_h\right) + (\nabla p_h, \mu\mathbf{b}_h) + h^{2\alpha}\,(\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)) = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}_h),$$
$$(\mu A_h\mathbf{F}, \nabla q_h) - h^{2(1-\alpha)}\,(\mu\nabla p_h, \nabla q_h) = 0.$$

$\mathbf{H}^{-\alpha}$ / $\mathbf{H}^{-1}$, estimation inverse

$$\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-\alpha}} \lesssim h^{2(\alpha-1)}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}}.$$

$\mathbf{H}^{-1}$ / formulation mixte

$$h^{2(\alpha-1)}\langle\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = -(\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h), \underbrace{h^{2(\alpha-1)}(-\Delta_\mu)^{-1}\,(-\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}))}_{:=p_h})$$

schéma stable : $h^{2\alpha}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{L}^2}$.

Schéma numérique

Nouvelle approche : Trouver $A_h\mathbf{E} \in \mathbf{X}_h$, $p_h \in M_h$, tq $\forall(\mathbf{b}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$,

$$\left(\sigma^{-1}\nabla\times A_h\mathbf{F}, \nabla\times\mathbf{b}_h\right) + (\nabla p_h, \mu\mathbf{b}_h) + h^{2\alpha}\left(\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\right) = (\mu\mathbf{F}, \mathbf{b}_h),$$
$$(\mu A_h\mathbf{F}, \nabla q_h) - h^{2(1-\alpha)}\left(\mu\nabla p_h, \nabla q_h\right) = 0.$$

$\mathbf{H}^{-\alpha}$ / $\mathbf{H}^{-1}$, estimation inverse

$$\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-\alpha}} \lesssim h^{2(\alpha-1)}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{H}^{-1}}.$$

$\mathbf{H}^{-1}$ / formulation mixte

$$h^{2(\alpha-1)}\langle\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F}), \nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}} = -(\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h), \underbrace{h^{2(\alpha-1)}(-\Delta_\mu)^{-1}\left(-\nabla\cdot(\mu A_h\mathbf{F})\right)}_{:=p_h})$$

schéma stable : $h^{2\alpha}\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|^2_{\mathbf{L}^2}$.

Contrôle de $\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)$ dans $H^{-\alpha}$ (Bonito et Guermond, '09)

$$\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|_{H^{-\alpha}} \leq \sup_{q_h\in\mathbb{M}_h} \frac{(\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h), q_h)}{h^{1-\alpha}\|\nabla q_h\|_{\mathbf{L}^2}} + h^\alpha\|\nabla\cdot(\mu\mathbf{b}_h)\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Cas $\sigma \equiv 1$, $\mu \equiv 1$

L'approximation est spectralement correcte. Le point-clef est la régularité de $A\mathbf{F}$.

Cas $\sigma \equiv 1$, $\mu \equiv 1$

L'approximation est spectralement correcte. Le point-clef est la régularité de $A\mathbf{F}$.

Régularité de la solution (Bonito, Guermond et L., '12)

Pour σ et μ réguliers par morceaux, il existe $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$ tels que, $\forall F \in \mathbf{L}^2$,

$$A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_1}(\Omega) \text{ et } \nabla \times A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_2}(\Omega)$$

avec l'estimation

$$\|A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_1}(\Omega)} + \|\nabla \times A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_2}(\Omega)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Cas $\sigma \equiv 1$, $\mu \equiv 1$

L'approximation est spectralement correcte. Le point-clef est la régularité de $A\mathbf{F}$.

Régularité de la solution (Bonito, Guermond et L., '12)

Pour σ et μ réguliers par morceaux, il existe $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$ tels que, $\forall F \in \mathbf{L}^2$,

$$A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_1}(\Omega) \text{ et } \nabla \times A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_2}(\Omega)$$

avec l'estimation

$$\|A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_1}(\Omega)} + \|\nabla \times A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_2}(\Omega)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

- s_1 et s_2 dépendent de σ et μ, et tendent vers 0 lorsque les sauts tendent vers 0.

Cas $\sigma \equiv 1$, $\mu \equiv 1$

L'approximation est spectralement correcte. Le point-clef est la régularité de $A\mathbf{F}$.

Régularité de la solution (Bonito, Guermond et L., '12)

Pour σ et μ réguliers par morceaux, il existe $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$ tels que, $\forall F \in \mathbf{L}^2$,

$$A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_1}(\Omega) \text{ et } \nabla\times A\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s_2}(\Omega)$$

avec l'estimation

$$\|A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_1}(\Omega)} + \|\nabla\times A\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{s_2}(\Omega)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

- s_1 et s_2 dépendent de σ et μ, et tendent vers 0 lorsque les sauts tendent vers 0.
- Dans le cas σ et μ constants par morceaux (très utilisé en pratique), on a

$$s_1 > C\log\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\max}-\mu_{\min}}\right).$$

Point-clef pour la régularité

Décomposition de Helmholtz

Si $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega)$, on peut écrire $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \nabla p$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &\in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, 1) \\ p &\in H^1_0(\Omega) \end{aligned}$$

Point-clef pour la régularité

Décomposition de Helmholtz

Si $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega)$, on peut écrire $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \nabla p$ avec

$$\mathbf{F}_0 \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, 1)$$
$$p \in H_0^1(\Omega)$$

- $\mathbf{F}_0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (Costabel '91),
- $\nabla\cdot(\mu\nabla p) \in H^{s-1}$ pour $s < \frac{1}{2}$.

Point-clef pour la régularité

Décomposition de Helmholtz

Si $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega)$, on peut écrire $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \nabla p$ avec

$$\mathbf{F}_0 \in \mathbf{H}_{0,\mathrm{curl}}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{\mathrm{div}=0}(\Omega, 1)$$
$$p \in H_0^1(\Omega)$$

- $\mathbf{F}_0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (Costabel '91),
- $\nabla\cdot(\mu\nabla p) \in H^{s-1}$ pour $s < \frac{1}{2}$.

Problème elliptique avec coefficients discontinus

Pour s assez petit, $\ell \in H^{s-1}$ et $p \in H_0^1(\Omega)$ la solution de $\nabla\cdot(\mu\nabla p) = \ell$, on a

$$p \in H^{1+s}(\Omega).$$

Convergence

Pour $s < \min(s_1, s_2)$, la méthode est convergente dès que

$$\alpha \in \left(\frac{k(1-s)}{k-s}, 1 \right).$$

Plus précisément, pour $\alpha = \frac{k(2-s)}{2k-s}$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \qquad \|A\mathbf{F} - A_h\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq Ch^r \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

avec $r = s\frac{k-1}{k-\frac{s}{2}}$.

- Convergence en norme d'opérateur.
- La méthode est spectralement correcte.
- On peut montrer un ordre de convergence meilleur si $A\mathbf{F}$ est suffisamment régulier.

Outil pour montrer la convergence

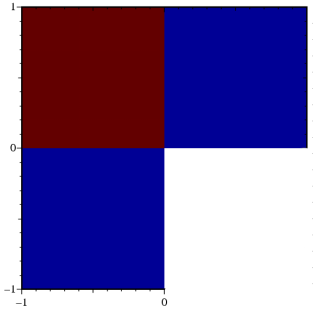
- $\mathcal{C}_h$ opérateur d'interpolation (ou de projection) sur l'espace discret.
- PB : $\mathcal{C}_h$ et $\nabla\times$ ne commutent pas.

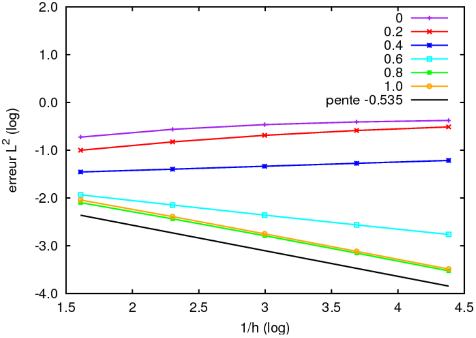
Opérateur de régularisation

On peut construire une famille d'opérateurs $\mathcal{K}_\delta : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\delta \mathbf{F} &\in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \\
\|\mathbf{F} - \mathcal{K}_\delta \mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^s} &\lesssim \delta^{r-s} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^r} \\
\|\mathcal{K}_\delta \mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^r} &\lesssim \delta^{s-r} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^s} \\
\nabla\times\mathcal{K}_\delta \mathbf{F} &= (1-\delta)^{-1} \mathcal{K}_\delta (\nabla\times\mathbf{F})
\end{aligned}$$

Problème aux limites





$$\lambda = 0.535,\ \mu_2 = 1$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \tan\left(\frac{\lambda\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)$$

$$\mathbf{H} = \nabla S_\lambda$$

$$S_\lambda = r^\lambda \phi_\lambda(\theta)$$

Problème aux limites (II)

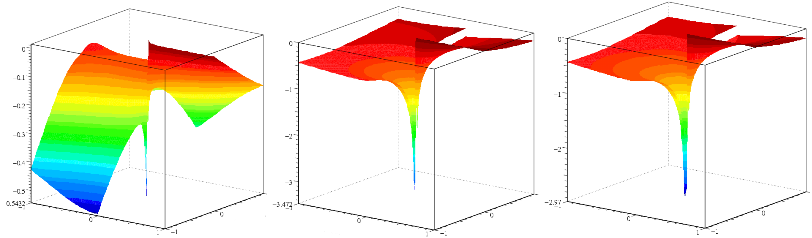
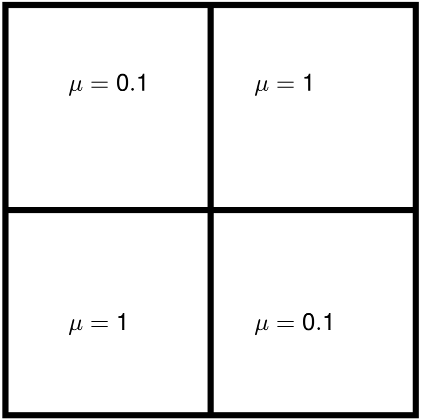


FIG.: composante *x* de la solution : $\alpha = 0$ (à gauche), solution réelle (au centre), $\alpha = 0,75$ (à droite)

Benchmark



Problème aux valeurs propres, $\alpha = 0.95$

	$\lambda_1 \simeq 4.534$			$\lambda_2 \simeq 6.250$		
1/h	val.	rel. err.	coc	val.	rel. err.	coc
5	4.538	$8.358\,10^{-4}$	N/A	7.047	$1.274\,10^{-1}$	N/A
10	4.534	$9.592\,10^{-5}$	3.12	7.038	$1.261\,10^{-1}$	0.01
20	4.534	$3.992\,10^{-5}$	1.26	6.764	$8.218\,10^{-2}$	0.62
40	4.534	$1.606\,10^{-5}$	1.31	6.506	$4.096\,10^{-2}$	1.00
	$\lambda_3 \simeq 7.037$			$\lambda_4 \simeq 22.342$		
1/h	val.	rel. err.	coc	val.	rel. err.	coc
5	9.076	$2.897\,10^{-1}$	N/A	22.51	$7.489\,10^{-3}$	N/A
10	7.404	$5.220\,10^{-2}$	2.47	22.36	$9.487\,10^{-4}$	3.05
20	7.037	$2.274\,10^{-5}$	11.1	22.34	$9.935\,10^{-5}$	3.26
40	7.037	$2.597\,10^{-6}$	3.13	22.34	$9.718\,10^{-6}$	3.35

Benchmarks fournis par M. Dauge (`http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/core/index.html`)

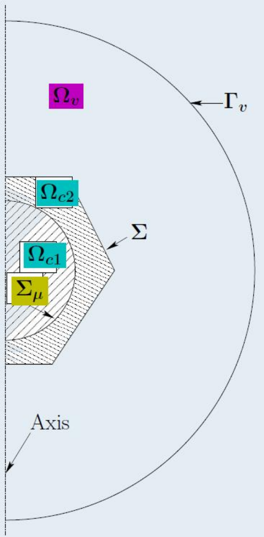
Plan de la présentation

Le code SFEMaNS

Spectral / Finite Element for Maxwell and Navier Stokes :

- Développé depuis 2003 (J.-L. Guermond, C. Nore, J. Léorat, R. Laguerre, A. Ribeiro, F.L.),
- 3 modes de fonctionnement : NST, MXW et MHD,
- Utilise une géométrie axisymétrique,
- Décomposition de Fourier dans la direction azimutale,
- Éléments finis de Lagrange dans le plan méridien,
- Les conditions de continuité sont traitées par méthode de pénalisation,
- Parallélisation selon les modes de Fourier (MPI),
- Possibilité de conditions périodiques dans la direction axiale,
- Stabilisation de la divergence dans L^2.

"pression magnétique" dans SFEMaNS



Sur Ω_c,

$$\mu\partial_t\mathbf{H} + \nabla\times\left(\frac{1}{R_\mathrm{m}\sigma}\right)\nabla\times\mathbf{H} + \mu\nabla p^c - h^{2\alpha}\mu\nabla(\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})) = \nabla\times\left(\frac{1}{R_\mathrm{m}\sigma}\mathbf{j}^s + \mathbf{u}\times\mu\mathbf{H}\right),$$

$$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}) - h^{2(1-\alpha)}\nabla\cdot(\mu\nabla p^c) = 0.$$

Sur Ω_v,

$$\mu\partial_t\Delta\phi - \Delta p^v = 0,$$
$$\Delta\phi + \Delta p^v = 0.$$

Conditions aux limites sur p^c, p^v :

$$p^c = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c$$
$$\nabla p^v\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v$$

Parallélisation dans le plan méridien

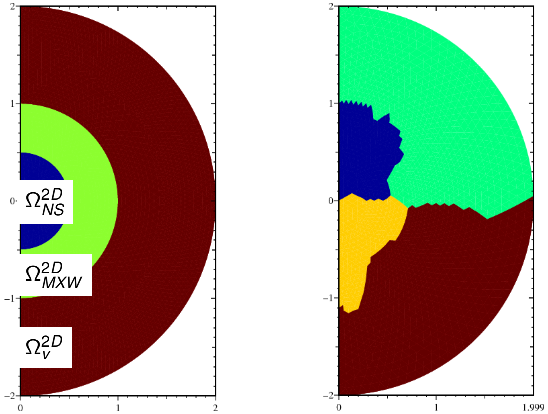
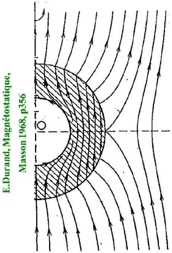


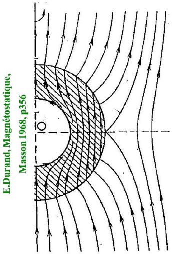
FIG.: Exemple de découpage du plan méridien : à gauche, représentation des domaines Ω_{NS}^{2D} (bleu), Ω_{MXW}^{2D} (vert) et Ω_{v}^{2D}(marron), à droite, répartition des degrés de liberté sur 4 processeurs (une couleur par processeur)

Test de convergence : sphère de Durand

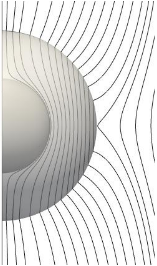


Lignes de champ analytiques($\mu_1 = 1,\ \mu_2 \to \infty$)

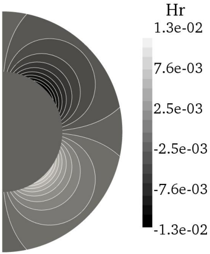
Test de convergence : sphère de Durand



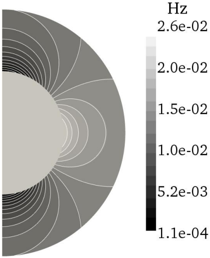
Lignes de champ analytiques($\mu_1 = 1,\ \mu_2 \to \infty$)



Lignes de champ calculées $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

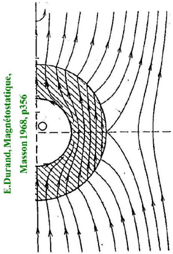


Composante radiale de **H**

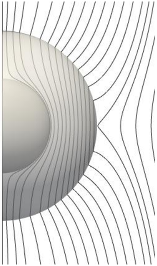


Composante verticale de **H**

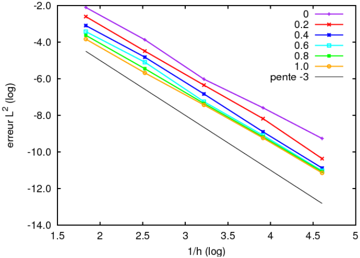
Test de convergence : sphère de Durand



Lignes de champ analytiques($\mu_1 = 1, \ \mu_2 \to \infty$)



Lignes de champ calculées $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$



Convergence en norme $\mathbf{L}^2$

Efficacité de la parallélisation (mxw)

Strong scalability

T_N : temps moyen d'une itération pour un calcul sur N processeurs. À maillage fixé, on voudrait $N\,T_N$ invariant.

Weak scalability

On fixe le nombre de degrés de libertés par processeurs. Le temps moyen d'une itération doit rester constant.

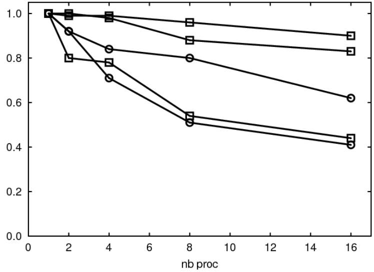


FIG.: Comparaison de la parallélisation dans le plan méridien (cercles) et selon les modes de Fourier (carrés)

N/N_{ref}	T_N/T_{ref}
2	0.90
4	0.80
8	0.62
16	0.52

TAB.: Test de parallélisation dans le plan méridien

Efficacité de la parallélisation (nst)

Strong scalability

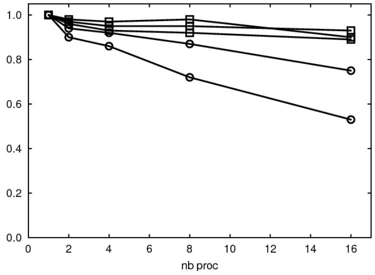


FIG.: Comparaison de la parallélisation dans le plan méridien (cercles) et selon les modes de Fourier (carrés)

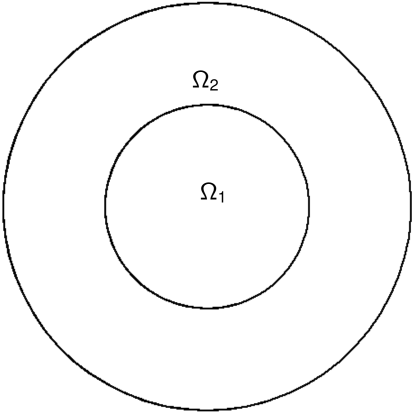
Weak scalability

N/N_{ref}	T_N/T_{ref}
2	0.95
4	0.84
8	0.87
16	0.74

TAB.: Test de parallélisation dans le plan méridien

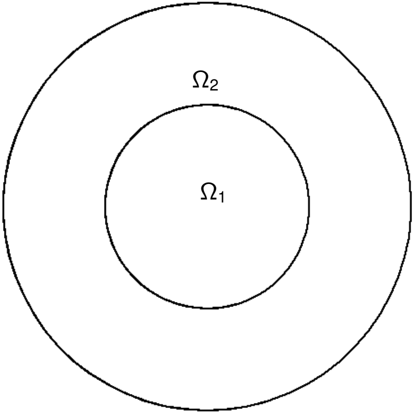
Plan de la présentation

Dynamo de type Busse & Wicht



Ω_1 en rotation solide,
Ω_2 au repos,
R_{m} basé sur le temps diffusif.

Dynamo de type Busse & Wicht

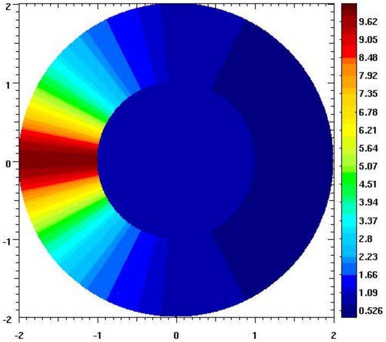


Ω_1 en rotation solide,
Ω_2 au repos,
R_{m} basé sur le temps diffusif.

Théorème anti-dynamo

Si μ et σ sont axisymétriques, pas de dynamo.

Cas σ variable, vérifications du code



$$\sigma(r,\theta) = \frac{1}{1+0.9\cos(\theta)}$$

$$\mu \equiv 1$$

$R_{\mathrm{mc}} \simeq 11300$

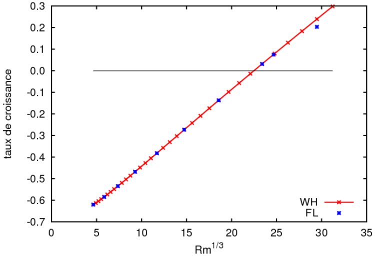
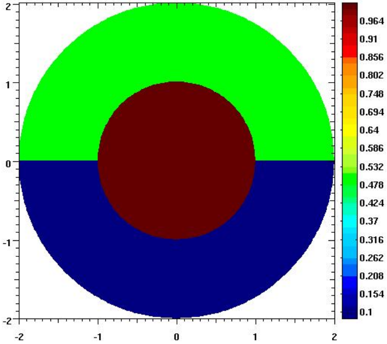


FIG.: Taux de croissance en fonction de $R_{\mathrm{m}}^{1/3}$

Sauts de μ



$\sigma \equiv 1$

μ constant par morceaux

$$R_{\mathrm{mc}} \simeq 7050$$

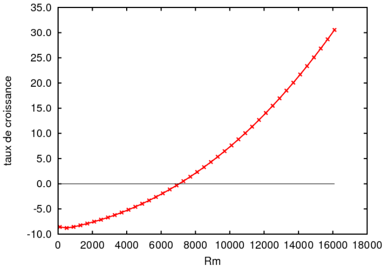
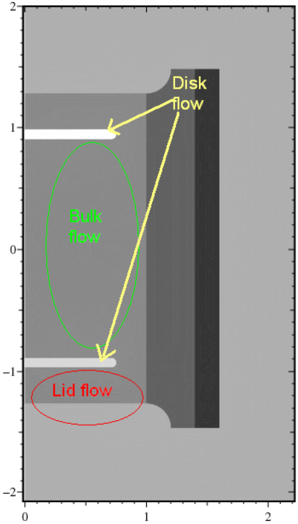
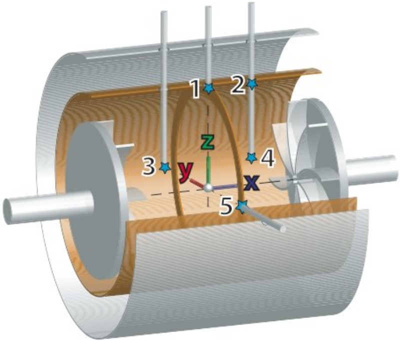


FIG.: Taux de croissance en fonction de R_{m}

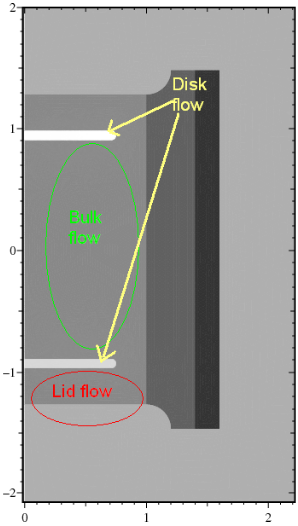
Retour à VKS



Domaine de calcul



Retour à VKS



Domaine de calcul

Résultats expérimentaux

- Dynamo seulement pour des turbines en fer doux,
- Dynamo portée par le mode $m = 0$.

Simulations numériques

Calculs de dynamo cinématique avec champ de vitesses axisymétrique.

Théorème anti-dynamo (Cowling)

Un champ de vitesses axisymétrique ne peut pas engendrer un champ magnétique axisymétrique.

Importance des sauts de μ

Comparaisons de différentes conditions aux limites

- R_{mc} minimal pour des disques de forte perméabilité, et en présence de side-layer.
- La présence de matériau de forte perméabilité sur les bords du cylindre augmente significativement R_{mc} $\rightsquigarrow$ contre-productif pour la dynamo.

Effets du lid-flow

- Avec des pales en acier, le lid-flow influe fortement sur R_{mc}.
- Les pales en fer doux écrantent cet effet.

Le mode $m = 1$

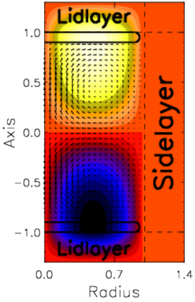


FIG.: Champ de vitesses utilisé

Le mode $m = 1$

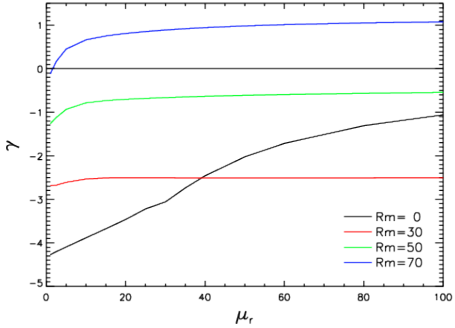


FIG.: Taux de croissance du mode $m = 1$ en fonction du saut de μ

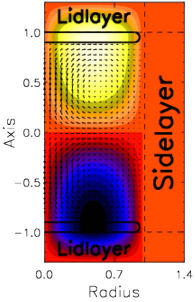


FIG.: Champ de vitesses utilisé

Le mode $m = 1$

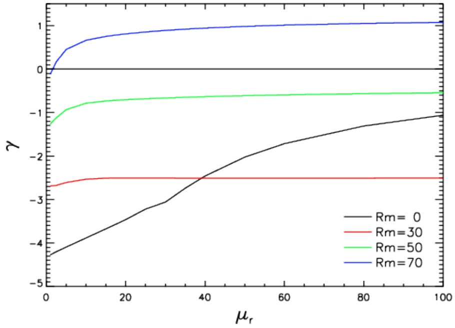


FIG.: Taux de croissance du mode $m = 1$ en fonction du saut de μ

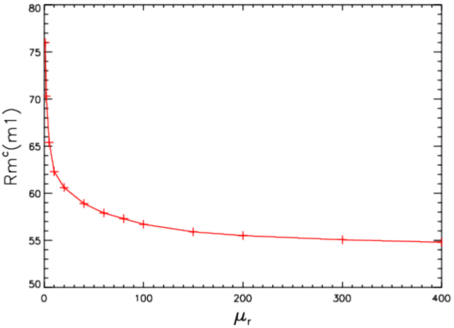


FIG.: Variation de R_{mc} en fonction de μ_r, le saut de μ. Valeur asymptotique $R_{\mathrm{mc}}^{\infty} \simeq 54$ et $R_{\mathrm{mc}} - R_{\mathrm{mc}}^{\infty} \propto \mu_r^{-0.52}$.

Peut-on expliquer pourquoi l'expérience décèle un mode $m = 0$?

Influence de l'épaisseur des disques dans le cadre de déclin ohmique

- Disques épais + fortes variations de perméabilité/conductivité $\Rightarrow$ le mode $m = 0$ est moins atténué.
- Disques fins + variations de perméabilité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie poloïdale du mode $m = 0$.
- Disques fins + variations de conductivité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie toroïdale du mode $m = 0$.

Peut-on expliquer pourquoi l'expérience décèle un mode $m = 0$?

Influence de l'épaisseur des disques dans le cadre de déclin ohmique

- Disques épais + fortes variations de perméabilité/conductivité $\Rightarrow$ le mode $m = 0$ est moins atténué.
- Disques fins + variations de perméabilité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie poloïdale du mode $m = 0$.
- Disques fins + variations de conductivité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie toroïdale du mode $m = 0$.

- Dans le cas de disques fins, $\gamma \propto \mu_r^{-1}$ lorsque μ_r est grand,

Peut-on expliquer pourquoi l'expérience décèle un mode $m = 0$?

Influence de l'épaisseur des disques dans le cadre de déclin ohmique

- Disques épais + fortes variations de perméabilité/conductivité $\Rightarrow$ le mode $m = 0$ est moins atténué.
- Disques fins + variations de perméabilité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie poloïdale du mode $m = 0$.
- Disques fins + variations de conductivité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie toroïdale du mode $m = 0$.

- Dans le cas de disques fins, $\gamma \propto \mu_r^{-1}$ lorsque μ_r est grand,
- Pour μ_r grand, un faible couplage entre composantes poloïdale et toroïdale pourrait suffire à enclencher la dynamo,

Peut-on expliquer pourquoi l'expérience décèle un mode $m = 0$?

Influence de l'épaisseur des disques dans le cadre de déclin ohmique

- Disques épais + fortes variations de perméabilité/conductivité $\Rightarrow$ le mode $m = 0$ est moins atténué.
- Disques fins + variations de perméabilité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie poloïdale du mode $m = 0$.
- Disques fins + variations de conductivité $\Rightarrow$ AUCUNE influence sur la partie toroïdale du mode $m = 0$.

- Dans le cas de disques fins, $\gamma \propto \mu_r^{-1}$ lorsque μ_r est grand,
- Pour μ_r grand, un faible couplage entre composantes poloïdale et toroïdale pourrait suffire à enclencher la dynamo,
- D'où vient ce couplage ? turbulence du flot autour des pales ? distribution de perméabilité non axisymétrique (pales) ?

Plan de la présentation

Conclusion

- Résultats de régularité sur les solutions des équations de Maxwell,
- Nouvelle méthode de résolution de ces équations,
- Adaptation dans un code 3d à géométrie axisymétrique,
- Nouvelle étape de parallélisation,
- Exploration de dynamo avec sauts de μ,
- Importance des sauts de perméabilité dans la dynamo VKS.

Perspectives

- Étude plus précise de la dynamo de type Busse & Wicht,
- Ajout éventuel d'une composante verticale de la vitesse dans cette dynamo ($\rightsquigarrow$ modèle de la dynamo Ponomarenko),
- Étude plus précise des pales dans la dynamo VKS,
- Amélioration du solveur nst,
- Prise en compte de perméabilité (resp. conductivité) dépendant de θ ou du temps,
- Amélioration de la parallélisation dans les plans méridiens.

Merci de votre attention