

Équations de la MHD en milieu hétérogène

F. Luddens^a, C. Nore^a, J. Léorat^b, J.-L. Guermond^c, A. Ribeiro^a

a. *Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, CNRS, BP 133, 91403 Orsay Cedex, France*

b. *Luth, Observatoire de Paris-Meudon, place Janssen, 92195 Meudon, France*

c. *Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA*

Résumé :

L'effet dynamo est l'explication la plus couramment adoptée pour expliquer l'existence d'un champ magnétique sur Terre. Dans le but de simuler l'expérience VKS2 (l'une des expériences ayant réussi à mettre en évidence ce phénomène), un code numérique (SFEMaNS) a été développé. Utilisant une géométrie axisymétrique, la résolution couple une décomposition de Fourier dans la direction azimutale, et une technique d'éléments finis de Lagrange dans le plan méridien. Ce choix d'éléments pose problème pour les équations de Maxwell. En particulier, les algorithmes standards peuvent ne pas converger vers la bonne solution, en régime stationnaire, lorsque le domaine et/ou la perméabilité magnétique présentent des singularités : la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique peut ne pas être respectée. Ce problème est résolu dans SFEMaNS grâce à une nouvelle approche, qui a été analysée et validée sur des problèmes-tests ; les résultats ont également été positivement confrontés à d'autres simulations numériques.

Abstract :

Dynamo effect is one of the most commonly accepted explanations for the existence of a magnetic field on Earth. Aiming to the numerical simulation of the VKS2 experiment (one of the successful experiments highlighting dynamo effect), a numerical code (SFEMaNS) has been developed. Assuming a cylindrical symmetry, the solution method consists of using Fourier decomposition in the azimuthal direction, and a Lagrange Finite Element Solver in meridian planes. The use of Lagrange finite elements is a very challenging task for the Maxwell equations. In particular, standard algorithms may fail to converge to the right solution in the steady state case, if either the domain or the magnetic permeability has singularities : the divergence-free constraint on the magnetic field may not be satisfied. To overcome this difficulty a new approximation technique has been introduced, analyzed and validated on benchmark problems. Results have also been successfully compared to other numerical simulations.

Mots clefs : dynamo cinématique ; magnétohydrodynamique ; perméabilité magnétique discontinue

1 Introduction

Le but de ce travail est le développement d'un code de calcul capable d'intégrer numériquement les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) en domaine hétérogène. Le domaine de calcul est supposé axisymétrique, et se décompose en une partie conductrice et une partie isolante. Le champ électromagnétique est alors représenté par un couple $\mathbf{H} - \phi$, avec \mathbf{H} le champ magnétique dans le conducteur, et ϕ le potentiel magnétique (scalaire) dans le vide. Les idées de base de l'approximation sont présentées dans [4] pour la partie électromagnétique, et dans [5] pour le couplage avec les équations de Navier-Stokes. Une méthode d'éléments finis de Lagrange est utilisée dans le plan méridien, et les variations dans la direction azimutale sont traitées grâce à une décomposition de Fourier. La principale nouveauté ici est la prise en compte d'une perméabilité non constante, ce qui rend la résolution des

équations de Maxwell délicate. Une nouvelle formulation est donc mise en oeuvre. Puisque la partie concernant les équations de Navier-Stokes ne change pas par rapport à [5], on ne s'intéresse ici qu'au cas de *dynamo cinématique*, i.e. le cas où l'on résout les équations de Maxwell avec un champ de vitesses prescrit.

Dans un premier temps, on détaille les notations utilisées, ainsi qu'une nouvelle formulation pour les équations de Maxwell. On présente ensuite quelques validations de cette nouvelle formulation. Enfin, on utilise le code obtenu pour étudier un effet de dynamo cinématique avec un écoulement de Von Kármán.

2 Les équations

On considère les équations de la MHD dans un domaine borné axisymétrique $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On suppose que la frontière $\Gamma := \partial\Omega$ est au moins lipschitzienne, et que Ω se décompose en une partie conductrice Ω_c , et une partie isolante (appelée aussi *vide*) Ω_v (supposé simplement connexe). On note Σ l'interface entre Ω_c et Ω_v . On suppose encore que Ω_c se décompose en sous-domaines $\Omega_{c1}, \dots, \Omega_{cN}$ sur lesquels la perméabilité magnétique μ est constante. La surface sur laquelle μ présente des discontinuités (i.e. les interfaces entre les Ω_{ci}) est notée Σ_μ . On note encore Γ_v (resp. Γ_c) la partie de $\partial\Omega_v$ (resp. $\partial\Omega_c$) qui est également sur le bord du domaine Ω . Les notations sont illustrées sur la figure 1.

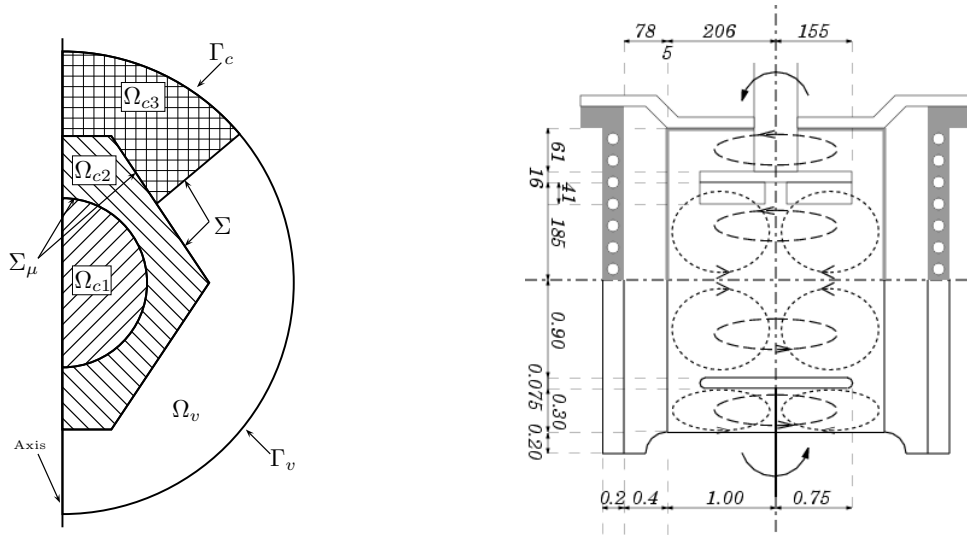


FIG. 1 – Exemple de domaine de calcul : à gauche, le schéma d'un domaine générique (plan méridien). À droite, un schéma du dispositif VKS, avec à la fois les dimensions réelles et les dimensions utilisées pour le calcul

Avec ces notations, on écrit directement les équations sous forme adimensionnée (l'adimensionnement a été fait de sorte que la vitesse de référence d'Alfvén soit égale à 1). On cherche alors à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \partial_t \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{E} - \mu \nabla p^c & \text{dans } \Omega_c \\ (-\Delta_0)^\alpha p^c = -\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) & \text{dans } \Omega_c \\ p^c = 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{R}_m \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j}^s & \text{dans } \Omega_c \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega_c \\ \mu \partial_t \Delta \phi = -\mu \Delta p^v & \text{dans } \Omega_v \\ \Delta p^v = \Delta \phi & \text{dans } \Omega_v \\ \nabla p^v \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_v \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Dans ce système d'équations, \mathbf{E} représente le champ électrique dans le conducteur (il est éliminé lors de l'écriture d'une formulation faible, cf. [4]), \mathbf{u} est la vitesse (prescrite) de la partie conductrice, \mathbf{j}^s

est un courant donné, μ (resp. σ) désigne la perméabilité magnétique (resp. la conductivité électrique) du milieu, supposée constante sur chaque Ω_{ci} . \mathbf{n} désigne la normale sortante au domaine considéré et α est un paramètre réel entre $\frac{1}{2}$ et 1. Pour une meilleure compréhension, on peut considérer $\alpha = 1$. La nouveauté de cette formulation est la présence des termes p^c et p^v que l'on peut interpréter comme des multiplicateurs de Lagrange et que l'on appellera (abusivement, par analogie aux équations de Navier-Stokes) *pression magnétique*. Il convient d'ajouter à ces équations des données initiales (sur \mathbf{H} , ϕ , p^c et p^v) cohérentes, ainsi que des conditions de bords sur les composantes tangentielles du champ électrique et/ou du champ magnétique. Enfin, il faut imposer la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques au travers des interfaces.

L'ajout des pressions magnétiques, motivé par [1], a pour effet de prendre en compte correctement la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique, en particulier lorsque l'on veut résoudre les problèmes stationnaires associés. Alors que les techniques standards peuvent ne pas converger vers la bonne solution lorsque l'un des domaines conducteurs présente des singularités (ex : coin rentrant) ou lorsque la perméabilité présente des discontinuités dans Ω_c , cette nouvelle formulation forte débouche sur une formulation variationnelle mieux adaptée.

Lorsque les conditions initiales sont cohérentes, i.e.

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H})|_{t=0} = 0 \text{ dans } \Omega_c \quad \text{et} \quad \Delta \phi|_{t=0} = 0 \text{ dans } \Omega_v,$$

on impose $p^c|_{t=0} = 0$ et $p^v|_{t=0} = 0$. On peut alors montrer que $p^c \equiv 0$ et $p^v \equiv 0$.

Partant de cette formulation forte, on peut, comme dans [6] dériver une formulation faible dont les seules inconnues restantes sont \mathbf{H} , ϕ et p^c . Pour la discrétisation en temps, on utilise un schéma de type BDF2 (Backward Difference Formula). L'algorithme prend la forme suivante : on se donne un pas de temps Δt , un maillage du plan méridien (le diamètre moyen d'une maille est noté h), et une initialisation correcte des champs \mathbf{H} , ϕ et p^c , on note

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* &= 2\mathbf{H}^n - \mathbf{H}^{n-1} \\ D\mathbf{H}^{n+1} &= \frac{1}{2} (3\mathbf{H}^{n+1} - 4\mathbf{H}^n + \mathbf{H}^{n-1}) \\ D\phi^{n+1} &= \frac{1}{2} (3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}) \end{aligned}$$

Alors les approximations \mathbf{H}^{n+1} , ϕ^{n+1} et p^{n+1} des champs \mathbf{H} , ϕ et p^c à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ sont calculées en un pas, de sorte que pour tout triplet de fonctions-tests discrètes \mathbf{b} , φ , q , on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \mu \frac{D\mathbf{H}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \mathbf{b} + \int_{\Omega_v} \mu \frac{\nabla D\phi^{n+1}}{\Delta t} \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_c} (\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{n+1} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \\ & + \int_{\Sigma_\mu} \left\{ (\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{n+1} \right\} \cdot \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \times \mathbf{n} + \int_{\Sigma} (\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{n+1} \cdot (\mathbf{b} - \nabla \varphi) \times \mathbf{n} \\ & + h^{-1} \int_{\Sigma_\mu} \llbracket \mathbf{H}^{n+1} \rrbracket \times \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \times \mathbf{n} + h^{-1} \int_{\Sigma} (\mathbf{H}^{n+1} - \nabla \phi^{n+1}) \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \nabla \varphi) \times \mathbf{n} \\ & + h^{2\alpha} \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}^{n+1}) \nabla \cdot (\mu \mathbf{b}) + \int_{\Omega_c} \mu \nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{b} \\ & - \int_{\Omega_c} \mu \mathbf{H}^{n+1} \cdot \nabla q + h^{2(1-\alpha)} \int_{\Omega_c} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla q \\ & + \int_{\Omega_v} \mu \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega_v} \mu (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi^{n+1}) \varphi \\ & = \int_{\Omega_c} \left((\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \mathbf{j}^s + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}^* \right) \cdot \nabla \times \mathbf{b} + \text{termes de bord} \\ & - \int_{\Sigma_\mu} \left\{ (\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \mathbf{j}^s + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}^* \right\} \cdot \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \times \mathbf{n} - \int_{\Sigma} \left((\mathbf{R}_m \sigma)^{-1} \mathbf{j}^s + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}^* \right) \cdot (\mathbf{b} - \nabla \varphi) \times \mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.2}$$

3 Validation de la formulation

3.1 Domaine singulier en 2D

Cette partie sert à valider la nouvelle formulation, et justifie l'ajout de p^c . On regarde les équations de Maxwell dans un domaine plan, en forme de L. On se place dans le cadre $\Omega = \Omega_c = \Omega_{c1}$. On prend $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $\mathbf{u} = 0$ et $\mathbf{j}^s = 0$. On valide la nouvelle méthode sur deux cas-tests. Le premier est le problème aux limites suivants :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \nabla \psi \times \mathbf{n},$$

où ψ un potentiel singulier donné par : $\psi(r, \theta) = r \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$. La solution est alors $\mathbf{H} = \nabla \psi$. Le deuxième test est le problème aux valeurs propres, c'est-à-dire ici la recherche de couples (λ, \mathbf{H}) tels que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \lambda \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0.$$

La figure 2 représente les résultats obtenus, en utilisant des éléments de Lagrange de degré 2 pour le champ magnétique. Les maillages utilisés ont pour diamètre moyen respectivement 1/10, 1/20, 1/40, 1/80 et 1/160. La pente pour le problème aux limites s'approche de 2/3. Pour les valeurs propres, la bibliothèque ARPACK a été utilisée, avec une tolérance de 10^{-8} , ce qui explique que les convergences stagnent pour la troisième et la quatrième valeur propre. On remarque que l'approximation de la première valeur propre est plus difficile, car le vecteur propre associé présente une singularité.

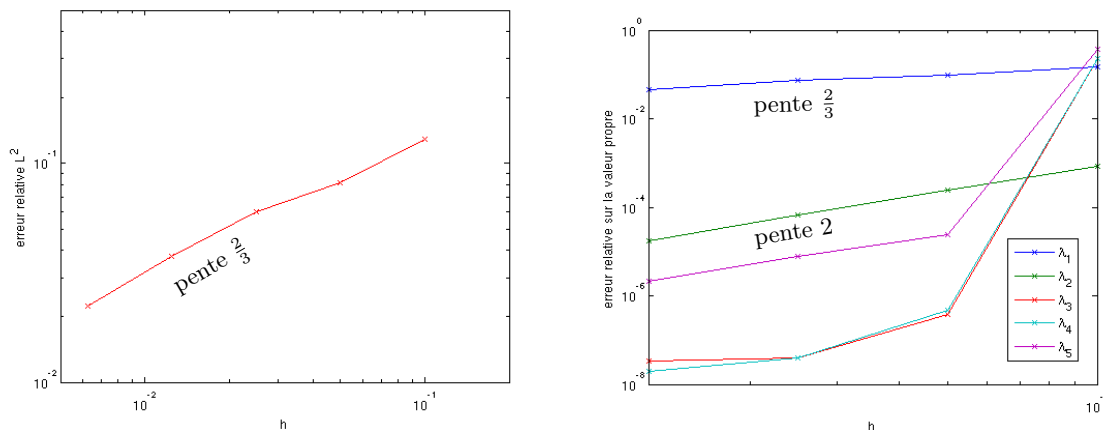


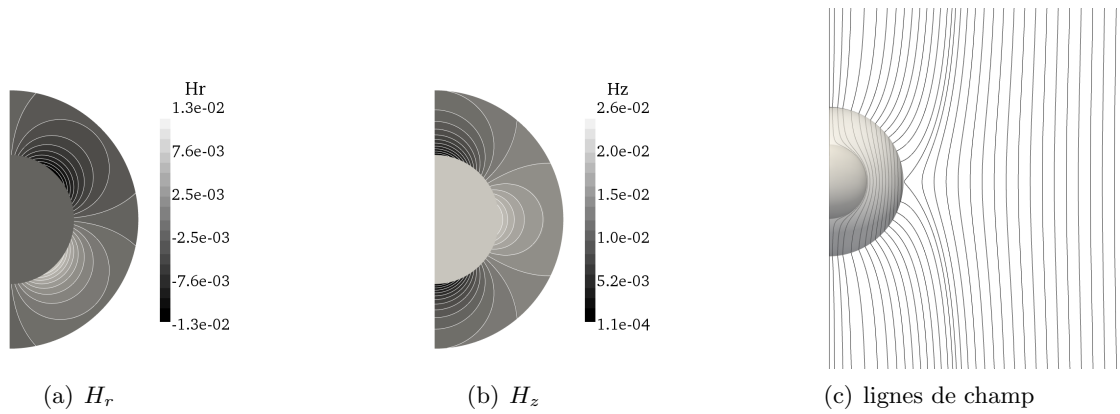
FIG. 2 – Tests en domaine singulier : à gauche, le problème aux limites, à droite, les cinq premières valeurs propres

3.2 Sphère de Durand

On teste ici un cas où $\Omega = \mathbf{R}^3$ avec Ω_c une sphère centrée en 0, de rayon R_2 . Elle est décomposée en deux sous-domaines Ω_{c1} et Ω_{c2} , avec Ω_{c1} une sphère de rayon R_1 centrée en 0. La perméabilité de Ω_{c1} est supposée égale à μ_0 (perméabilité du vide), et celle dans Ω_{c2} égale à $\mu_0\mu$. Le champ magnétique au loin est connu, de la forme $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$, avec H_0 une constante. Le champ magnétique \mathbf{H} vérifie alors (dans \mathbf{R}^3)

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \mathbf{H}(x) = H_0 \mathbf{e}_z$$

Ce problème a alors une solution stationnaire analytique, à laquelle on peut comparer notre approximation. La figure 3 illustre ces calculs. On peut notamment observer (figure 3(c)) que les lignes de champ magnétique se connectent pratiquement perpendiculairement à Ω_{c2} . Les taux de convergence observés pour la norme L^2 de \mathbf{H} et la norme H^1 de ϕ sont pour ce cas-test supérieurs à 2.5.

FIG. 3 – Solution stationnaire calculée pour $\mu = 200$.

4 Dynamo cinématique

Le code basé sur cette nouvelle formulation a été comparé numériquement avec un code volume finis/élément de frontière sur des problèmes de dynamo cinématique avec champs de vitesse analytiques axisymétriques (cf. [2]). Il peut aussi être utilisé pour simuler l'expérience von Kármán Sodium 2 réalisée à Cadarache, modulo une modélisation des pales (qui cassent la symétrie cylindrique). Le schéma du dispositif est visible sur la figure 1. Un schéma simplifié du domaine modélisé (dans le plan méridien) est visible sur la figure 4. Deux disques sont en contra-rotation dans une cuve cylindrique remplie de sodium liquide. Cette cuve est entourée de sodium immobile, le tout étant contenu dans un réservoir en cuivre. Les pales sur les disques n'ont pas été prises en compte ici. Les détails de l'expérience peuvent être trouvés dans [7].

On s'intéresse ici à l'effet de la forme de l'écoulement derrière les disques sur le nombre de Reynolds magnétique critique (qui correspond à un taux de croissance nul pour le champ magnétique). On utilise des données expérimentales sur un écoulement d'eau (documenté dans [8]) pour la forme de l'écoulement dans la zone située entre les disques. Les disques sont eux-mêmes modélisés par une partie fluide dont la vitesse est égale à la vitesse du fluide sur la face intérieure. Quatre cas ont été distingués, pour modéliser deux types différents de matériau pour les disques (fer doux ou acier), et deux types d'écoulement derrière les disques. On donne un exemple d'écoulement utilisé sur la figure 4.

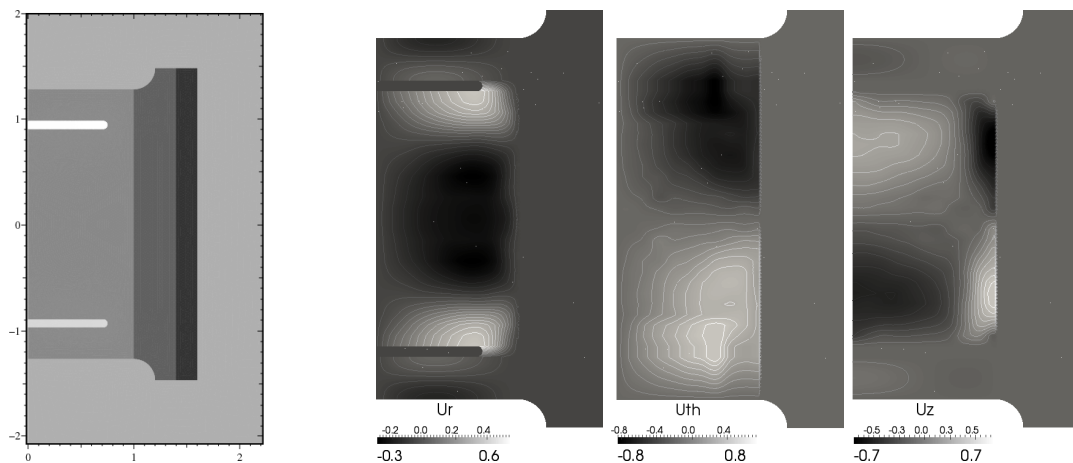


FIG. 4 – Modèle simplifié du dispositif VKS2, et champ de vitesse axisymétrique imposé

Lorsque les disques sont en acier, les deux types d'écoulement utilisés donnent des Reynolds magnétiques critiques différents (82 et 75). Avec des disques en fer doux, ce seuil est significativement abaissé, et indépendant de la forme de l'écoulement derrière les disques (66 et 64). En comparant acier et fer doux, on peut également observer une différence dans la forme des lignes de champ magnétique aux

abords des disques (cf. figure 5). Ce résultat renforce l'idée que la présence de matériau solide ferromagnétique en mouvement est un facteur important de la dynamo observée dans l'expérience VKS2. Non seulement les disques ferromagnétiques écrantent l'effet de l'écoulement dans la zone derrière eux, mais ils abaissent également le Reynolds magnétique critique, ce qui est en accord avec [3].

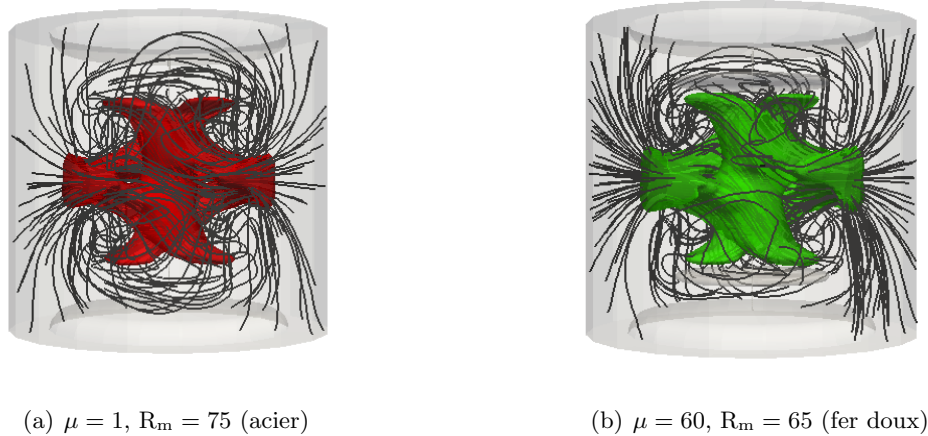


FIG. 5 – Lignes de champ magnétique et iso-valeurs de l'énergie magnétique (25% de l'énergie magnétique maximale) pour des types de disques différents, avec le même champ de vitesse

5 Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle technique d'approximation des équations de Maxwell, utilisant des éléments finis de Lagrange, afin de résoudre des problèmes dans des domaines présentant des singularités et/ou des problèmes pour lesquels la perméabilité présente des discontinuités. Cette technique a été validée numériquement, puis appliquée à une modélisation d'une dynamo cinématique, inspirée de l'expérience VKS2. Par la suite, nous allons utiliser cette même technique pour étudier numériquement des régimes non linéaires, en intégrant tout le système d'équations de la MHD, toujours dans une configuration de type VKS2. En outre, nous pourrions étudier l'effet d'un forçage volumique modélisant l'effet des pales qui existent dans le dispositif réel.

Références

- [1] Bonito, A., Guermond, J.-L. 2010 Approximation of the Eigenvalue Problem for the Time Harmonic Maxwell System by Continuous Lagrange Finite Elements. *Math. Comp.* accepté
- [2] Giesecke, A., Nore, C., Plunian, F., Stefani, F., Gerberth, G., Léorat, J., Luddens, F., Guermond, J.-L. 2010 Electromagnetic induction in non-uniform domains *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **104** : 5-6 505-529
- [3] Gissinger, C., Iskakov, A., Fauve, S., Dormy, E. 2008 Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows *EPL* **82(2)** 29001
- [4] Guermond, J.-L., Laguerre, R., Léorat, J., Nore, C. 2007 An interior penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains. *J. Comput. Phys.* **221(1)** 349-369
- [5] Guermond, J.-L., Laguerre, R., Léorat, J., Nore, C. 2009 Nonlinear magnetohydrodynamics in axisymmetric heterogeneous domains using a Fourier/finite element technique and an interior penalty method. *J. Comput. Phys.* **228** 2739–2757
- [6] Guermond, J.-L., Léorat J., Luddens, F., Nore, C., Ribeiro, A. 2010 Effects of discontinuous magnetic permeability on magnetodynamic problems. *J. Comput. Phys.* accepté
- [7] Monchaux, R., Berhanu, M., Aumaitre, S., Chiffaudel, A., Daviaud, F., Dubrulle, B., Ravelet, F., Fauve, S., Mordant, N., Pétrélis, F., Bourgoin, M., Odier, Ph., Pinton, J.-F., Plihon, N., Volk, R. 2009 The von Kármán sodium experiment : Turbulent dynamical dynamos. *Phys. Fluids* **21** :035108
- [8] Ravelet, F., Chiffaudel, A., Daviaud, F., Léorat, J. 2005 Towards an experimental von Kármán dynamo : numerical studies for an optimized design. *Phys. Fluids* **17** :117104