Exercice 1. (Identification de solutions)
Quelle est l'équation différentielle vérifiée par :

(1) les courbes C_λ d'équation

$$y = \lambda \ln(x) + 1,$$

(2) les courbes C_λ d'équation

$$y = \lambda x^2 + x^3,$$

(3) les courbes C_λ d'équation

$$y = \lambda_1 \exp(2x) + \lambda_2 \exp(-2x),$$

(4) les courbes C_λ d'équation

$$y = \lambda_1 \exp(x)\sin(2x) + \lambda_2 \exp(x)\cos(2x),$$

(5) les droites passant par le point $(0;1)$.

EDO d'ordre 1

Exercice 2. (EDO linéaires homogènes à coefficients constants)
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{array}{lll} (1) & y' - 3y = 0, & y(1) = 4, \\ (2) & 4y' + 7y = 0, & y(0) = 1, \\ (3) & 5y' + 2y = 0, & y(2) = \exp(1). \end{array}$$

Exercice 3. (EDO linéaires homogènes)
Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1) & y' + \dfrac{2y}{x} = 0, \\ (2) & 3t\dfrac{di}{dt} - i = 0, \\ (3) & y' = \exp(x) - y, \\ (4) & y'\cos(x) + y\sin(x) = 0, \\ (5) & y'\sin(x) + y = 0, \\ (6) & y' - \sin(x)y = 0, \\ (7) & (1-t^2)\dfrac{d\theta}{dt} + t\theta = 0. \end{array}$$

Exercice 4. (EDO linéaires non homogènes)
Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1) & y' + y = \cos(x) + \sin(x), \\ (2) & y' - y = \exp(x), \\ (3) & xy' - y = (x-1)\exp(x), \\ (4) & y'\cos(x) + y\sin(x) = 1. \end{array}$$

Exercice 5. (EDO autonomes)
Résoudre les équations différentielles (en précisant les intervalles pour chaque solution) :

$$\begin{array}{ll} (1) & y' = \exp(y), \\ (2) & y' = 1 + y^2. \end{array}$$

Exercice 6. On considère l'EDO : $3y' = y^2 - y - 2$.

1. Donner les solutions constantes de cette équation,
2. On veut déterminer la solution y vérifiant $y(0) = 0$. Montrer que pour tout x où y est définie, on a $-2 < y(x) < 1$,
3. Montrer alors que
$$\ln\left(\frac{1 - y(x)}{y(x) + 2}\right) = x + K,$$
où K est une constante à déterminer,
4. En déduire la solution y.

Exercice 7. (EDO séparables)
Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1) & y' = x(2 + y^2), \\ (2) & y' = 1 - x^2(y - x)^2. \end{array}$$

Indication : pour la deuxième, on pourra faire un changement de fonction.

Exercice 8. (Changements de fonctions)
Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1) & y' + y = xy^3, \\ (2) & 2xy'y + y^2 = x, \\ (3) & y' - y = xy^6, \\ (4) & y' = y(1 + xy). \end{array}$$

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1) & xy' = x - y, \\ (2) & x^2y' = xy + x^2 - y^2. \end{array}$$

(la seconde est une équation de Riccati, dont une solution est $x \mapsto -x$)

EDO d'ordre 2

Exercice 10. (Équations homogènes)
Résoudre les équations différentielles ou problème de Cauchy suivants :

$$\begin{array}{lll} (1) & y'' + y' - 2y = 0, & \\ (2) & y'' - 4y = 0, & \\ (3) & y'' + 2y' + 5y = 0, & \\ (4) & 9y'' + 6y' + y = 0, & y(0) = 3, \ \ y'(0) = 1, \\ (5) & y'' + 4y' = 0, & y(0) = 2, \ \ y'(0) = 0, \\ (6) & y'' + 9y = 0, & y(0) = 1, \ \ y'(0) = 3. \end{array}$$

Exercice 11. Y désignant une fonction de la variable t, soit l'équation différentielle

$$Y'' - 2Y' + Y = \frac{2\exp(t)}{(1+t)^3} \qquad (1)$$

(a) Vérifier que la fonction

$$Y_0(t) = \frac{\exp(t)}{1+t}$$

est une solution de l'équation (1).

(b) Résoudre l'équation (1).

(c) Déterminer la solution de (1) que l'on désignera par $y(t)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles

1. $y'' - y' + y = x^2 \exp(-x)$
2. $y'' - 2y' - 3y = x\exp(-x)$
3. $4y'' + 4y' + y = x\exp(-x/2)$
4. $y'' + y' + y = \exp(-2x)$
5. $y'' + 3y' - 4y = \exp(x)$
6. $9y'' - 6y' + y = \exp(x/3)$
7. $y'' + 3y' = x\exp(-3x)$
8. $y'' + 2y' + y = 4\exp(3x)$

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles

1. $y'' + 4y = \cos(x)$
2. $y'' + y' = \sin(x)$
3. $2y'' + 3y' + y = \cos(2x)$
4. $y'' + y = \sin(2x)$
5. $y'' + 9y = \sin(3x)$
6. $y'' + y = x\cos(x)$
7. $y'' + 4y = x\sin(x)$
8. $y'' - 4y' + 5y = \exp(2x)\cos(x)$

Exercice 14. Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 2my' + y = \exp(x)$$

lorsque m est un paramètre compris entre -1 et 1. Étudier les cas particuliers $m = 1$ et $m = -1$.

Un peu plus loin... Systèmes d'EDO.

Exercice 15. Résoudre le systèmes d'EDO (la variable est t) :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t), & , x(0) = 1, \\ y'(t) &= -2y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 16. On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) - x(t), \\ y'(t) &= 3x(t). \end{cases}$$

Montrer que si on a une solution, alors x vérifie l'EDO :

$$x''(t) + x'(t) - 3x(t) = 0,$$

En déduire les solutions possibles pour x, puis pour y.

Exercice 17. De façon analogue, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$