Université de Rouen
ESITech - 1ère année
2015-2016

Mathématiques 1, Fiche n° 3
Intégrales et primitives

**Exercice 1.** Calculer les primitives de la fonction donnée

$$\frac{1}{2}x^2+3x-4,\quad 1-x^2,\quad x(1+2x),$$
$$2x+\frac{1}{x},\quad \frac{3x-1}{2x},\quad \frac{x-3}{x},$$
$$x\sqrt{x},\quad \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes

$$I_1=\int_2^4 \frac{x^3-4x^2+x}{x^2}\,dx$$
$$I_2=\int_{-3}^0 \left|x^2-x-2\right|\,dx$$
$$I_3=\int_0^{\pi/3}(1-\cos(3x))\,dx$$
$$I_4=\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$I_5=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$$
$$I_6=\int_0^t \tan^2 x\,dx$$
$$I_7=\int_0^{\pi}(\cos 2x+\sin 2x)^2\,dx$$
$$I_8=\int_{\pi/4}^{7\pi/6}(\cos 4x+2\sin x\cos x)\,dx$$

**Exercice 3.** On définit la fonction $f$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ par
$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$

(a) Déterminer les deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $x\in[0,\pi/2]$ on ait
$$f(x)=b\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+a$$

(b) Pour $\alpha\in[0,\pi/4]$ calculer (en fonction de $\alpha$) l'intégrale
$$\int_{\alpha}^{\pi/2-\alpha} f(x)\,dx.$$

**Exercice 4.** Soit la fonction $f$ définie par
$$f(x)=\frac{12x^2-37x+13}{(5x-2)(2x-1)^2}$$

(a) Préciser l'ensemble de définition de $f$

(b) Déterminer les 3 réels $a$, $b$ et $c$ vérifiant pour tout $x$ dans l'ensemble de définition de $f$
$$f(x)=\frac{a}{5x-2}+\frac{bx+c}{(2x-1)^2}.$$

(c) En déduire une primitive de $f$ sur l'intervalle $]-\infty,2/5[$.

(d) Calculer $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

**Exercice 5.** Déterminer $a$ et $b$ tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, on ait
$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}.$$
En déduire la valeur de l'intégrale
$$I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}\,dx.$$

**Exercice 6. (décomposition en éléments simples)** Sur le même modèle que les deux exercices précédents calculer les primitives des fonctions suivantes
$$\frac{x^2-x}{x+1},\quad \frac{2x-1}{(x-1)(x^2+4)},\quad \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)^2}.$$

**Exercice 7.** Calculer les intégrales
$$I_1=\int_0^{\pi/6}\sin 4x\cos 2x\,dx$$
$$I_2=\int_0^{\pi/2}\cos 3x\sin 5x\,dx$$
$$I_3=\int_0^{\pi/4}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$$

**Exercice 8.** Calculer les intégrales
$$I_1=2\int_0^1(x-1)(x^2-2x+2)^3\,dx$$
$$I_2=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx$$
$$I_3=\int_0^2 x\exp(x^2)\,dx$$

**Exercice 9.** Reconnaître les fonctions suivantes comme dérivées de fonctions simples (intégrer de tête donc)
$$\frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}},\quad \frac{\sqrt{\ln x}}{x},\quad \frac{x^2}{x^3+2}$$
$$\frac{\exp(x)}{\exp(x)+2},\quad \tan x,\quad \frac{1}{x\ln x},$$

**Exercice 10.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels non nuls. Calculer les intégrales suivantes
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt,$$
$$I_2=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{1-3\cos x}\,dx$$

**Exercice 11. (changement de variable affine)**
En effectuant le changement de variable adéquat calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x+2}\, dx,$$
$$I_2 = \int_0^2 x\sqrt{x+1}\, dx,$$
$$I_3 = \int_1^3 \sqrt{3-x}\, dx,$$
$$I_4 = \int_0^5 \sqrt{5-x}\, dx.$$

**Exercice 12. (IPP)**
Calculer les primitives des fonctions données

$$x\exp(-x),\quad x\exp(2x),\quad x\sin x,\quad x^4\ln x,$$
$$x^2\exp(x),\quad ,x^3 3^x,\quad x\tan^2 x,\quad x\cos^2 x,$$
$$\ln x,\quad \ln(x^2+1),\quad (\ln x)^3,\quad \sin(\ln x),\quad \cos(\ln x).$$

**Exercice 13.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} 16x\cos^4 x\, dx.$$

**Exercice 14.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^2 x\cos x,\quad g(x) = \sin^3 x.$$

(a) Déterminer une primitive $F$ de $f$ et une primitive $G$ de $g$.

(b) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} 9x\sin^2 x\cos x dx.$$

**Exercice 15.** Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x^2-2x+4)\, dx,$$
$$I_2 = \int_0^{2/3} \ln(9x^2+6x+4)\, dx,$$
$$I_3 = \int_1^4 \ln(2x^2+5x-3)\, dx,$$
$$I_4 = \int_{-4}^{-3} \arctan\left(\frac{x+3}{x+5}\right)\, dx.$$

**Exercice 16.** Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9}}, \qquad \int \frac{d\theta}{\sqrt{5+2\theta-4\theta^2}},$$
$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2+\varphi-\varphi^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

**Exercice 17.** Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2(x)+3\sin^2(x)}$$
$$\int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos(x)}$$
$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3(x)}$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(2+\cos(x))^2}\, dx$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos(x)-2\sin(x)+3}$$

## Pour aller un peu plus loin...

**Exercice 18. (Intégrale et somme de Riemann)**
Pour $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue, dont une primitive est $F$, on a admis que $\int_a^b f(x)\, dx$ était à la fois égal à $F(b)-F(a)$ et à la limite des sommes de Riemann. On va ici le prouver dans un cas particulier. On suppose que $f$ est dérivable, et que sa dérivée est bornée sur $[a;b]$ par un certain $M$, i.e., pour tout $x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leqslant M$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ non nul. On introduit les nombres $x_k$ défini par

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),\quad k = 0, 1, \cdots n.$$

[Noter que $x_0 = a$ et $x_n = b$]. La somme de Riemann est définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n}.$$

(a) Montrer que

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F(x_{k+1}) - F(x_k)\right).$$

(b) En appliquant une formule de Taylor-Lagrange (cf. fiche 2, exercice 22), montrer qu'il existe des nombres $\xi_k \in ]x_k; x_{k+1}[$ (pour $k = 0, 1, \cdots n-1$ ) tels que :

$$F(b) - F(a) = S_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f'(\xi_k)}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

On note $\sigma_n$ cette dernière somme.

(c) Montrer que

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

(d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = F(b) - F(a).$$