Exercice 1. (Dérivée d'une composée)
Dans cet exercice, on se propose de montrer, en utilisant la définition de la dérivée, que $(f \circ g)' = (f' \circ g)\ g'$. On prend $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ et $a \in J$. On suppose que f est dérivable sur I et que g est dérivable sur J.

(1) montrer que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. En déduire que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = f'(g(a)).$$

(2) En déduire que

$$\lim_{x \to a} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(a)}{x - a}$$

existe, et calculer sa valeur. Conclure.

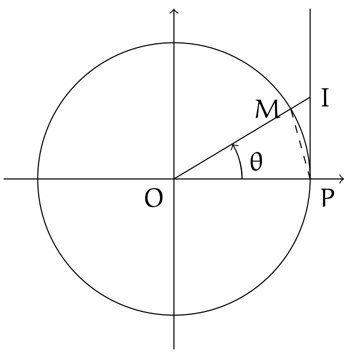
Exercice 2. (Dérivée d'une réciproque)
Dans cet exercice, on se propose de montrer, en utilisant la dérivée d'une composition, que l'on a bien $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On prend $f : I \to J$ une bijection, dérivable sur I, et telle que f' ne s'annule pas. On note $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ et $h(x) = x$.

(1) Calculer la dérivée de h.

(2) En utilisant la formule de dérivation d'une composée, calculer $g'(x)$ en fonction de $f'(f^{-1}(x))$ et $(f^{-1})'(x)$.

(3) En remarquant que $g(x) = h(x)$ (pourquoi ?), conclure.

Exercice 3. (Calcul d'une dérivée grâce à la définition)
Dans cet exercice, on veut montrer que sin est dérivable de 0, de dérivée 1, en utilisant la définition, i.e. la limite du taux d'accroissement.



On note A_1, A_2 et A_3 respectivement l'aire du triangle OPM, l'aire du triangle OPI et l'aire du secteur angulaire OMP.

(1) Calculer A_1 en fonction de $\sin(\theta)$, A_2 en fonction de $\tan(\theta)$ et A_3 en fonction de θ.

(2) En comparant ces trois aires, montrer que

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta).$$

(3) En déduire que

$$\cos(\theta) \leqslant \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1.$$

(4) Montrer que sin est dérivable en 0, de dérivée 1.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions proposées, donner l'ensemble de définition, l'ensemble sur laquelle la fonction est dérivable, et l'expression de sa dérivée.

$$\begin{aligned}
a(x) &= x^3 + \sqrt{x}, \\
b(x) &= -\frac{3}{x^3}, \\
c(x) &= 4x^2 \sin(x), \\
d(x) &= (x^2 + x + 1)^3, \\
e(x) &= \sin(x^4), \\
f(x) &= \frac{x^3 - x + 1}{x^4 + 1}, \\
g(x) &= \cos\left(\sqrt{x}\right), \\
h(x) &= \frac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \sin(x)}, \\
i(x) &= \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. On considère f définie par $f(x) = x + \ln(x)$. Donner le domaine de définition de f (noté D_f), son domaine image I, et montrer que f est une bijection de D_f sur I.

Exercice 6. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 + ax}{1 + bx}\right).$$

Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions proposées, donner l'ensemble de définition, l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable, et calculer la dérivée

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}}, \\
g(x) &= \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right), \\
h(x) &= \frac{\exp(x^2) + 1}{\exp(x^2) - 1}, \\
i(x) &= \ln\left(\tan(x)^2 + \sqrt{x}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer la dérivée des fonctions

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(1 + x + x^2), \\
g(x) &= 2^{x^2}, \\
h(x) &= x^x, \\
i(x) &= (\ln(x))^x, \\
j(x) &= x^{\ln(x)}, \\
k(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.
\end{aligned}$$

Exercice 9. Calculer la dérivée des fonctions

$$a(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), \quad b(x) = \arctan(x^2),$$
$$c(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad d(x) = \frac{1+x\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$e(x) = \arcsin(x+1), \quad f(x) = x\arcsin\left(x+\sqrt{1-x^2}\right),$$
$$g(x) = \arccos(2x^2-1), \quad h(x) = \arcsin(3x-4x^3).$$

Exercice 10. Étudier la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1-\exp(-t)}$ et montrer qu'elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 11. On considère $f(x) = x - \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

(1) Donner une équation de la droite tangente à la courbe représentative de f en $x = 2$.

(2) Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente.

Exercice 12. (extrema sur un intervalle ouvert) Déterminer les extrema globaux de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Sur un segment de 1000km, le TGV roule à une vitesse constante v (en km/h). On suppose que le coût de carburant *par heure* est relié à v de la manière suivante : $C(v) = 2048 + v^{3/2}$.
Quelle est la vitesse v qui permet de minimiser le coût en carburant sur la portion de 1000km ?

Exercice 14. Quelle est la plus grande surface possible d'un rectangle de 20m de périmètre ?

Exercice 15. (extrema sur un intervalle fermé) Donner les extrema globaux de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1;2]$.

Exercice 16. En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\exp(x)}{\cos(x)-1},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\exp x^2 - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Exercice 17. Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \exp(x)\ln(1+x) \qquad \text{ordre } 4,$$
$$f_2(x) = (\ln(1+x))^2 \qquad \text{ordre } 3,$$
$$f_3(x) = \exp(\sin(x)) \qquad \text{ordre } 4,$$
$$f_4(x) = \ln(\cos(x)) \qquad \text{ordre } 4,$$
$$f_5(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{ordre } 4,$$
$$f_6(x) = \tan(x) \qquad \text{ordre } 3.$$

Exercice 18. (Dérivées n−èmes) Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes (a désigne un paramètre réel).

$$f_1(x) = \cos(ax), \qquad f_2(x) = \sin(ax),$$
$$f_3(x) = x\ln(x), \qquad f_4(x) = \frac{1+x}{1-x},$$
$$f_5(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Exercice 19. Calculer les dérivées n−èmes des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x^2+x-1)\exp(x),$$
$$g(x) = \arccos(\sin(x)), \qquad \text{pour } x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Pour la première, on pourra utiliser la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

où $f^{(k)}$ représente la dérivée k−ème de f. Pour la deuxième, bien réfléchir.

Pour aller plus loin...

Exercice 20. (Théorème de Rolle) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a;b]$, non constante, telle que $f(a) = f(b)$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(1) Montrer que f admet un maximum ou un minimum local sur $]a;b[$, pour un certain $x = x_0$. On suppose par la suite qu'il s'agit d'un maximum local.

(2) En regardant le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x > x_0$, montrer que $f'(x_0) \leqslant 0$.

(3) En regardant le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x < x_0$, montrer que $f'(x_0) \geqslant 0$.

(4) Conclure.

Noter que ce théorème reste vrai si f est constante, puisque sa dérivée sera alors nulle.

Exercice 21. (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a;b]$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(1) On définit g par : $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Montrer que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, ou alors g est constante.

(2) En appliquant le théorème de Rolle à g, conclure.

Exercice 22. (Une formule de Taylor-Lagrange) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $[a;b]$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Pour cela, on pose $K = \frac{1}{(b-a)^2}(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a))$ et on définit g par

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2.$$

(1) Montrer que $g(b) = g(a) = 0$.

(2) Montrer que g est dérivable sur $[a;b]$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$ (on pourra utiliser l'exercice 20).

(3) En déduire que $2K = f''(c)$ et conclure.