Exercice 1. Résoudre les équations suivantes (i.e. trouver $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que) :

$$\cos(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin(x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan(x_3) = -\sqrt{3}.$$

Exercice 2. Exprimer sous forme algébrique (i.e. la forme $a + ib$) les nombres complexes suivants

(a) $(1-i)^4$, $(1+2i)^2$, $i(i+2)(2i+1)^2$,

(b) $\dfrac{1+2i}{3+i}$, $\dfrac{1+i}{11+i}$, $\dfrac{1}{1+i}$,

(c) $\dfrac{(i-1)^5}{(i+1)^4}$, $\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}-i}$,

(d) $\dfrac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 3. Calculer le module des nombrs complexes suivants

(a) $-2i$, $4-i$, $1-4i$, $3+4i$,

(b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$, $1-i\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{2}\left(2-i\sqrt{2}\right)$.

Exercice 4. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1, tels que $z+z' \neq 0$. Montrer alors que le nombre $\dfrac{1+zz'}{z+z'}$ est un nombre réel.

Exercice 5. Montrer que l'équation $z + \bar{z} = 1 + i$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z(1+i) - i\bar{z} = 1$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} z + 4z' &= 1 + i\sqrt{2} \\ iz + \sqrt{2}z' &= 1 \end{cases}$$

Exercice 8. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants

$$\begin{array}{cccc} 3+3i, & \sqrt{3}+i, & 1+i\sqrt{3}, & i-1, \\ -4, & \sqrt{3}-i, & \sqrt{2}(i-1), & i\sqrt{3}-1. \end{array}$$

Exercice 9. Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^{44}, \qquad z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}\right)^{18}.$$

Exercice 10. Déterminer sous forme algébrique les *racines carrées* des nombres complexes proposés

$$\begin{array}{cccc} 3+4i, & -5+2i, & -4, & 16i, \\ 4i-3, & -2-2i\sqrt{3}, & 1+i, & 1-i. \end{array}$$

Exercice 11. Utiliser les formules de Moivre pour :

(1) exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$,

(2) exprimer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2 - 2z - 4 = 0$,

(2) $z^2 - 7z + 1 = 0$,

(3) $2z^2 + 3z + 4 = 0$,

(4) $z^2 + z + 1 = 0$,

(5) $4z^2 + z + 4 = 0$,

(6) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$,

(7) $z^2 - 2\sqrt{5}z - 12i = 0$.

Exercice 13. Utiliser les formules d'Euler pour linéariser $\cos(\theta)^2\sin(\theta)$, $\sin(\theta)^2\cos(\theta)$, $\cos(\theta)^3$ et $\sin(\theta)^3$.

Exercice 14. Soient a, b, θ trois réels.

(1) Trouver deux nombres complexes z et z' tels que

$$\mathrm{Re}\,(zz') = a\cos(\theta) + b\sin(\theta).$$

(2) En déduire qu'il existe deux réels $R \geqslant 0$ et φ uniques (modulo 2π pour φ) tels que

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = R\cos(\theta + \varphi).$$

Exercice 15. (résumé à savoir faire)

(1) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que l'on a

$$\frac{|\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|.$$

(2) On pose $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Donner la forme trigonométrique de a, b et ab. Donner également la forme algébrique de ab.

(3) Calculer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. De façon analogue, calculer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ uniquement.

(4) Donner la forme trigonométrique de $z = (1 + i\sqrt{3})^4$.

(5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^6 = (i-z)^6$. [on pourra se ramener aux racines 6èmes de l'unité]

(6) Résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$.

(7) On pose $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$.

-a- Montrer que $z_0^4 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

-b- Donner les 4 solutions de l'équation $z^4 = 1$ (on les notera z_1, z_2, z_3, z_4).

-c- À l'aide de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4, donner les solutions de l'équation :

$$z^4 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Un peu plus loin

Exercice 16. Déterminer les valeurs possibles de $z \in \mathbb{C}$ telles que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ soit un nombre réel.

Exercice 17. On veut résoudre l'équation $z^3-(1+\mathrm{i})z^2+4z-4-4\mathrm{i}=0$. Sachant que $2\mathrm{i}$ est une solution, donner toutes les solutions complexes de cette équation.

Exercice 18. On veut résoudre l'équation $z^3-\mathrm{i}z^2+(1-\mathrm{i})z-2+2\mathrm{i}=0$. On suppose que cette équation admet une solution réelle, notée z_0.

(1) Montrer que z_0 vérifie les deux équations suivantes

$$z_0^3+z_0-2=0,$$
$$z_0^2+z_0-2=0.$$

(2) En déduire que $z_0=1$ est bien solution de l'équation de départ.

(3) Résoudre l'équation de départ.