Université de Rouen
ESITech - 1ère année
2015-2016

Mathématiques 1, Fiche n° 0
Mise en route, récurrence

Exercice 1. (Binôme de Newton)

(a) Vérifier que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(b) Simplifier $a = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{11}{5}}$.

(c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^{n-k}$.

(d) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

(e) Développer $(1+\sqrt{3})^4$ et $(1-\sqrt{3})^4$ et en déduire que $A := (1+\sqrt{3})^4 - (1-\sqrt{3})^4$ est un entier.

(f) On veut calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$:

-i- vérifier que si $n \geqslant k \geqslant 1$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

-ii- en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1},$$

-iii- en utilisant la question (c), montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

Exercice 2. (Récurrence)

Montrer par récurrence les assertions suivantes :

(a) Pour tout $n \geqslant 0$, $13^n - 4^n$ est multiple de 9.

(b) On pose $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et on définit la suite u_n pour $n \geqslant 2$ par : $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$. Alors $u_n = 2^n$.

(c) (inégalité de Bernoulli) : pour tout $x > -1$ non nul, et $n \geqslant 2$, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k).$$

(e) En notant S_n la somme des n premiers entiers impairs, i.e. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$, on a $S_n = n^2$.

Exercice 3. (Somme et produit)

(a) Comparer $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

(b) Soit $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

(c) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=1}^{n} a$.

(d) Calculer $\prod_{k=1}^{n}(ca_k)$ en fonction de c, n et $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

(e) Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. (indice : $1-\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$ et séparer numérateur et dénominateur).

(f) Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$. En remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, calculer S_n. En déduire que S_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. (où il faut se méfier de la récurrence)

On veut montrer l'assertion suivante (fausse) : "quel que soit $n \geqslant 1$, dans une trousse de n crayons de couleur, les n crayons sont de la même couleur".

- Initialisation : cette assertion est clairement vraie pour $n = 1$.
- Hérédité : on suppose que cette assertion est vraie pour tout $n \leqslant m$. On veut la montrer pour $n = m+1$. On prend alors une trousse avec $m+1$ crayons de couleur. On en enlève un, donc la trousse contient m crayons de couleur. En utilisant l'hypothèse de récurrence, ces n crayons de couleur sont de la même couleur (disons rouge pour fixer les idées). On remet le crayon qu'on avait enlevé, et on en enlève un autre. On a toujours n crayons de couleur dans la trousse, donc ils sont de la même couleur, et donc toujours rouges. Ainsi, les $m+1$ crayons de couleur sont de la même couleur. L'hérédité est prouvée.

Il semble que le principe de récurrence assure que tous les crayons d'une même trousse sont de la même couleur.
Où est l'erreur dans le raisonnement ?